

Н.И. Карпенко

ОБЩИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА



Москва Стройиздат 1996

Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. — М.: Стройиздат, 1996. — 416 с.: ил. — ISBN 5-274-01682-0.

Обобщенный построения общих физических соотношений — связей между напряжениями и деформациями или их приращениями. Представлены критерии оценки прочности и трещиностойкости бетона при объемных и частных напряженных состояниях. Учитываются физическая нелинейность, влияние трещин, анизотропия и другие факторы. Общие модели бетона и железобетона увязаны с современными вычислительными методами (МКЭ и др.). Приведены примеры расчета различных железобетонных конструкций.

Для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Табл. 17, ил. 124, список лит.: 206 назв.

Редактор Л.И. Круглова

Formulation of general physical stress-strain relations or their increment is summarized in the book. Evaluation criteria of strength and crack-resistance of concrete and reinforced concrete under volume and particular stress states are presented. Physical non-linearity, influence of cracks, anisotropy and other factors are taken into account. General models of concrete and reinforced concrete are co-ordinated with modern computing methods (MFE and others). Examples of calculation of different reinforced concrete structures (bars, planar, spatial, massive, structures, including of complex configuration) are presented.

Book is useful for engineers, scientific and technical workers, scientific-research and designing organizations.

Издание осуществлено при финансовой поддержке НИИЖБ ГНЦ-Строительства.

3302000000 — 507
К ————— Без объявл.
047(01) — 96

ISBN 5-274-01682-0

© Карпенко Н.И., 1996

В настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники остро встает проблема перевода методов расчета и проектирования строительных конструкций на полностью автоматизированную компьютерную основу. Весьма перспективным и назревшим представляется решение этой проблемы для железобетонных конструкций, занимающих доминирующее место в строительстве.

В основу автоматизированных методов как правило закладываются современные вычислительные методы и, в первую очередь, метод конечных элементов (МКЭ). Однако эти методы слабо увязываются с эмпирическими и частными подходами нормативных документов по проектированию железобетонных конструкций, что стало тормозом на пути автоматизации проектирования.

Возникает проблема построения автоматизированных методов на базе таких механических моделей бетона и железобетона, которые бы по общности приближались к современным моделям и теориям прочности механики деформируемого твердого тела и были с ними тесно увязаны. В то же время они должны максимально учитывать особенности механических свойств бетона и железобетона: нелинейность, трещиноватость, неоднородность, приобретаемую в процессе деформирования и трещинообразования анизотропию, ползучесть, термползучесть, усадку, особенности сцепления арматуры с бетоном и др.

Обобщению работ по современным общим моделям бетона и железобетона и посвящена эта книга. Остановимся на некоторых общих вопросах. Известно, что любой материал «входит» в механику и ее современные вычислительные методы с набором только ему присущих соотношений. К ним относятся связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения), а также общие критерии оценки прочности и трещиностойкости бетона и железобетона. В целом они образуют систему определяющих соотношений материала.

Определяющие соотношения — основа современных механических моделей материалов. Разработке определяющих соотношений для бетона и железобетона в этой монографии уделяется основное внимание. Эти соотношения устанавливаются в довольно общем виде, начиная с объемного напряженного состояния элементов с трещинами и без трещин. Трещины в основном относятся к макроструктуре материала, и их характеристики: углы наклона к арматуре, схемы взаимного пересечения, раскрытие и сдвиг берегов и другие существенно сказываются на характере физических соотношений. Для их учета используются некоторые новые подходы, которые при рассмотрении других материалов не встречаются, например,

для компонент железобетона вводятся несимметричные тензоры напряжений и деформаций.

Свойства бетона существенно зависят от неоднородности, внутренней трещиноватости и ее развития. Эти свойства выходят за рамки привычных гипотез сплошного тела. В связи с этим автор счел необходимым отдельно (гл. 1) остановиться на особенностях применения методов механики сплошного деформируемого тела к таким телам, как бетон и железобетон.

Модели бетона и железобетона приводятся в таком виде, чтобы с их помощью можно было оценивать (моделировать) изменение напряженно-деформированного состояния конструкций в процессе нагружения на различных стадиях деформирования — с трещинами и без трещин вплоть до разрушения. Представленные формулы также позволяют сочетать нелинейный расчет с подбором арматуры в элементах с трещинами и без трещин при различных объемных и частных напряженных состояниях и решать вопросы рационального размещения арматуры.

Представление о железобетоне как о материале требует пояснения. Нередко утверждают, что железобетон — не двухкомпонентный материал, а некоторая система (конструкция). С точки зрения механики оба утверждения могут быть верными в зависимости от формирования и введения в разрешающую систему уравнений физических соотношений. Следует отметить, что материал в этой системе определяется только этими соотношениями. Если удастся составить общие физические соотношения с включением в матрицу жесткости обеих компонент — арматуры и бетона, пусть даже в некотором обобщенном виде, то железобетон выступает как материал. Если физические соотношения для компонент при решении задач используются раздельно с записью дополнительных условий на их контакте, то железобетон — система (сложная конструкция). В книге основное внимание уделяется первому направлению, хотя предлагается и некоторый новый подход к развитию второго направления (гл. 7).

Деформирование железобетона в итоге оказывается подобным деформированию анизотропных тел в общем случае анизотропии при нелинейной матрице жесткости. Заметим, что аналогичная матрица, связывающая напряжения с относительными деформациями в линейной механике называется матрицей упругости (по терминологии МКЭ). Физические соотношения для железобетона как нелинейного анизотропного тела с приобретаемой в процессе деформирования анизотропией, а также заимствованные из теории упругости дифференциальные уравнения равновесия, геометрические уравнения и граничные условия (они записываются по аналогии с граничными условиями теории упругости анизотропного тела) составляют полную систему определяющих уравнений механики железобетона, которые затем преобразуются к разрешающим уравнениям. Поскольку элементы матрицы жесткости физических соотношений (условно жесткости) не являются константами, а

зависят от напряжений и деформаций и нередко представляются неаналитическими зависимостями типа вычислительного оператора, то решение задач выполняется в основном численными методами.

Разрешающие уравнения конструируются с помощью метода конечных элементов (МКЭ), метода конечных разностей (МКР), вариационно-разностным методом (ВРМ). Накоплен уже достаточный опыт решения задач на основе этих методов. Решение уравнений осуществляется шагово-итерационными методами, в основе которых лежат различные модификации метода упругих решений применительно к бетону и железобетону. Хотя многие результаты, например различные диаграммы связи напряжений с деформациями, в том числе при переменных и знакопеременных программах нагружения, критерии оценки прочности и трещиностойкости, зависимости по подбору арматуры и другие, могут использоваться непосредственно без привлечения сложных вычислительных средств.

Основное внимание в книге уделено моделям, которые разрабатывались и исследовались автором или при его участии, однако в обзорах представлены и подходы различных исследователей, оставляя окончательный выбор за читателем.

Необходимо отметить, что некоторые важные вопросы, относящиеся к рассматриваемой проблеме, в монографии только обозначены и их предстоит решить в дальнейшем. К ним относится проблема построения общей нелинейной модели ползучести и термолзучести при одноосных напряжениях, вопросы уточнения моделей применительно к сложным программам нагружения, учет особенностей поведения конструкций при динамических воздействиях и др. Тем не менее представленные исследования прошли проверку и апробацию в лабораторных условиях и доведены до определенного логического завершения. Их использование в программах расчета конструкций на ЭВМ позволит с большей точностью подойти к расчету и конструированию.

Автор благодарен М.М. Холмянскому, который просмотрел гл. 1 и сделал ценные замечания, директору НИИЖБ А.И. Звездову за спонсорскую помощь в издании книги, инженерам Л.Р. Бочаровой и Л.Г. Арсланбековой за техническую работу по подготовке рукописи к изданию.

At present, with intensive development of computer technology, a problem of a full transfer of analysis and design methods of building structures to a computer base is very essential. Solution of this problem is especially important for reinforced concrete structures prevailing in building industry.

Modern methods of numerical analysis and finite elements method (FEM) present such a base for computerized analysis. However, these methods do correspond well to empirical approaches of building codes for designing of concrete structures.

Here arises a problem to develop numerical methods on the base of such mechanical models of reinforced concrete which would correlate with modern approaches of deformed solid body mechanics, and, at the time, would take into account, as much as possible, peculiarities of mechanical properties of concrete and reinforced concrete (non-linearity, cracking, non-uniformity obtained during deformation and crack formation, anisotropy, creep, thermo-creep, shrinkage, peculiarities of bond between steel and concrete, etc.).

This book is dedicated to generalization of works on modern concepts of concrete and reinforced concrete. Let's dwell on certain general problems.

It is known that every material «enters» into mechanics and its modern numerical methods with a set of specific relation. Relationships between stresses and deformations (physical relations), and also general strength and crack-resistance criteria of concrete and reinforced concrete are among them. They form a system of constitutive relationships of material.

Constitutive relationships is the base of modern mechanical models of materials. The principal attention in this monograph is given to development of constitutive relations of concrete and reinforced concrete. These relations are established in a rather general form, considering three-dimensional stressed state of cracked and uncracked members. Cracks, generally relate with a macro-structure of material and their characteristics: angles with reinforcement, schemes of intersections, opening and displacement of edges and others, — influence considerably the character of physical relations. For taking them into account some new approaches used for their consideration are not applicable for examination of other materials, for example: asymmetrical tensors of stresses and deformations are introduced for reinforced concrete.

A properties of concrete depend considerably on nonuniformity of internal cracking state and on its development. These properties exceed the limits of traditional hypotheses of solid body. So the author considered to dedicate a separate chapter (chapter 1) to peculiarities of application of methods of solid deformed body mechanics to such bodies as concrete and reinforced concrete.

Models of concrete and reinforced concrete are presented in such form which makes possible to evaluation (simulation) of changes in stressed-deformed state of a structure under loading at different stages of deformation — with and without cracks — up to a failure. Presented formulas permit also the combination of nonlinear analysis with selection of reinforcement in cracked and uncracked members under different three-dimensional and particular stressed states and with the solution of reinforcement disposal problems.

It is necessary to explain what is the reinforced concrete as a material. It is affirmed often that reinforced concrete is not bi-component material but a certain system (structure). From the point of view of mechanics these both statements may be correct depending on formulation of equations of the physical relations and their introduction into a final system of solving equations.

It is noteworthy that a material is represented in this system only by these relations. If you succeed in development of general physical relations including the both components — reinforcement and concrete, — into the stiffness matrix, than the reinforced concrete is a material. If physical relations of the components are used separately with supplementary conditions on their contacts, — than the reinforced concrete is a system (a complex structure). The first direction is mainly described in this book, although a certain new approach to development of the second direction is also proposed (chapter 7).

Deformation of the reinforced concrete, as a result, is similar to deformation of anisotropic bodies in general case of anisotropy when we have non-linear stiffness matrix. It should be noted, that similar matrix, connecting stresses with strains in linear mechanics is called elasticity matrix (according to FEM terminology). Physical relations for reinforced concrete as non-linear anisotropic body with the anisotropy obtained during deformation process, and also differential equations of equilibrium adopted from the theory of elasticity, geometrical equations and boundary conditions (they are written by analogy with boundary conditions of the theory of elasticity of anisotropic body) form a complete system of determining equations of reinforced concrete mechanics, which later is transformed into solvable equations system.

Since elements of stiffness matrix of physical relation are not constant, but depend on stresses and deformations, and often are presented in the form of non-analytic relations such as calculating operator model, a solution of these problems is mainly obtained by numeric methods.

Solving equations are formulated using finite elements, method differences (MED), variation-difference method (VDM). A sufficient experience is gained already concerning solutions of problems based on these methods. Solution of equations is realized by step-iterational methods based on different modifications of methods of elastic solutions applied to concrete and reinforced concrete.

However, many results, — for example, various stress-strain diagrams under complex and bilateral loading programs, evaluation criteria of strength and crack-resistance, dependencies for reinforcement design, etc. — may be used directly without application of complex computing means.

The principal attention in this book is paid to models developed and investigated by the author or with his participation, however, approaches of different other investigators are presented in the review; a final choice is to be made by reader.

It is necessary to note that certain important points related with the considered problem are only mentioned and should be developed in the future. Among these problems are: formulation of general non-linear model of creep and thermal-creep under non-linear stresses, more accurate definition of models under complex programs of loading, consideration of peculiarities in structural behavior under dynamic actions, etc. Nevertheless, the presented investigations are examined and validated in laboratory and completed. The application of these results in computer programs for structural analysis would permit a more accurate analysis and design of structures.

The author thanks M.M. Kholmiansky who examined Chapter 1 and made the valuable comments: A.I. Zvezdov, director of NIIZHB, for sponsoring the book; engineers L.R. Bocharova and L.G. Arslanbekova for technical preparation of the manuscript for publishing.

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БЕТОНА МЕТОДАМИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕТОНА МОДЕЛЬЮ СПЛОШНОГО ТЕЛА

Некоторые, важные для механики, свойства структуры бетона.

Бетоны — искусственные каменные материалы (каменные композиты, видимо, одни из первых композитов в истории их создания). Как известно, их получают в результате затвердевания бетонной смеси, состоящей из крупного и мелкого заполнителя, вяжущего, воды и специальных добавок. Затвердевший бетон приобретает довольно сложную структуру (внутреннее строение). В таком строении крупнее всего выделяют две основные компоненты (элементы структуры) — матрицу в виде окаменевшего цементно-песчаного раствора и части включения в нее зерен крупного заполнителя (1, 2 на рис. 1.1, а). Матрицей называют компоненту непрерывную (здесь точнее квазинепрерывную) по объему в отличие от прерывной компоненты — крупного заполнителя.

Выделяют еще два важных фактора — свойства контактной зоны (границы раздела) вокруг зерен крупного заполнителя, обеспечивающей совместную работу заполнителя и матрицы; дефекты в структуре бетона включая (см. рис. 1.1, а): 3 — структурные трещины в матрице и на границе зерен заполнителя; 4 — крупные поры и капилляры; 5 — пустоты под зернами крупного заполнителя; 6 — разрыхленную пораами структуру цементного камня под отдельными зернами крупного заполнителя и некоторые другие. С трещинами и их развитием связываются в большей степени: физическая нелинейность (в простейшем случае нелинейность диаграмм связи напряжений с деформациями при сжатии и растяжении), анизотропия свойств (например неодинаковость модулей деформации по разным направлениям), характер разрушения и долговечность элементов бетонных и железобетонных конструкций, а также тот факт, что бетон хорошо сопротивляется сжатию и слабо растяжению. В детальных моделях различают, хотя и довольно условно, дефекты двух типов: собственно дефекты структуры бетона и дефекты компонент бетона, полагая, что первые сказываются непосредственно на механических свойствах бетона, а вторые — опосредованно — через свойства компонент.

Чаще всего используются заполнители диаметром $d_3 = 10...40$ мм в виде гравия или щебня из плотных горных пород (для тяжелых бетонов) или пористых каменных материалов естественного или

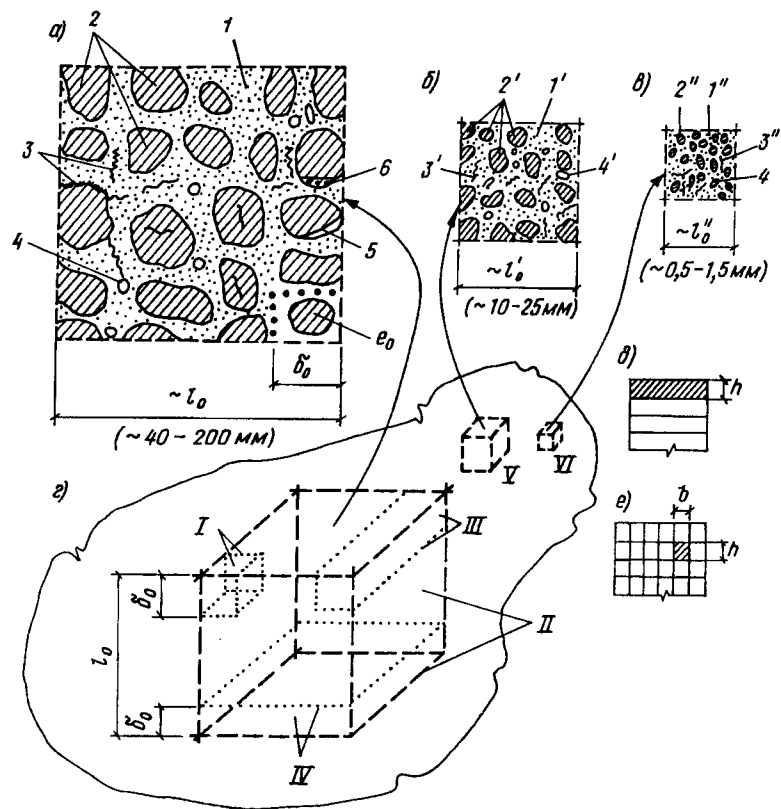


Рис. 1.1. Структура бетона (а) и его компонент (б, в). Характерные элементы структур

искусственного происхождения (для легких бетонов), хотя в крупных сооружениях диаметр заполнителей может достиг 100 мм и более. Диаметр заполнителя — это средний диаметр условного шара, описанного вокруг зерна неправильной формы. Плотность заполнителя влияет на характер разрушения структуры бетона. Различают две схемы разрушения — по матрице в обход зерен плотного заполнителя и с разрывом матрицы и зерен пористого заполнителя.

Наиболее распространенными и эффективными вяжущими являются цементы — основные «строительные» материалы матрицы, которые способны в результате сложных физико-механических процессов затвердевать после затворения их водой. Геометрически матрицы различаются по прослойкам a_m — среднему расстоянию между зернами крупного заполнителя. Частицы мелкого заполнителя (песка) с размерами зерна 3–5 мм равномерно распределяются в теле матрицы и относятся к ее внутреннему строению.

Указанная выше структура бетона называется макроструктурой (макроскопической, видимой невооруженным глазом). Следующая за ней менее крупная структура называется мезоструктурой. Она свойственна матрице обычного бетона и так называемым микробетоном, песчаным бетонам, где в качестве «крупного» заполнителя выступают частицы 3–5 мм, а в качестве матрицы — затвердевший цементный камень (1', 2', рис. 1.1, б). Схематически структура компонент бетона в принципе, повторяет структуру бетона только на более мелком масштабе (3', 4' — дефекты).

Цементный камень имеет весьма сложную и довольно тонкую структуру (микроструктуру). В качестве зерен заполнителя здесь выступают непрогидратированные зерна цемента, в качестве матрицы — ростки субмикросталлов (1'', 2'', рис. 1.1, в). Этой структуре свойственны также трещины (3'') и причудливая капиллярно-пористая (4'') структура твердой фазы с заземленными в ней газообразной и остаточной (после твердения) жидкой, а также некоторой полужидкой (аморфной) фазами. С этими фазами связаны важные свойства бетона, такие как ползучесть, усадка, набухание и др. Подробное рассмотрение физико-химических процессов, связанных со структурообразованием, указанными фазами, а также с усадкой и ползучестью можно встретить во многих известных работах по технологии бетона и компонент [6, 8, 96, 164], а также в отдельных монографиях, посвященных усадке и ползучести [1, 163, 165]. Здесь укажем лишь на некоторые общие представления, используемые в механике бетона (теории ползучести и усадки строятся пока на феноменологическом подходе, а физические представления позволяют лишь правильно отобразить в эмпирических зависимостях влияние различных факторов).

Согласно устоявшимся представлениям аморфная составляющая — гель придает бетону свойства вязкости (свойство текучести во времени — ползучести, например, при постоянных напряжениях). В простейшем случае свойство вязкости иллюстрируется с помощью модели, состоящей из поршня,двигающегося в цилиндре с вязкой жидкостью при постоянном давлении, однако в действительности процесс ползучести реальных тел (и особенно бетона) является довольно сложным и не поддается наглядному моделированию, хотя интересные попытки такого плана неоднократно предпринимались [144]. Часть деформаций ползучести (нелинейная ползучесть) связана с развитием внутренних микротрещин во времени, т.е. с некоторой псевдовязкостью (по терминологии О.Я. Берга).

Во времени происходит трансформация структуры цементного камня, характеризующаяся двумя процессами — созидательным, который связан с затвердеванием цементного камня и «зарастанием» отдельных трещин (этот процесс еще называют старением), и разрушительным, связанным с указанным выше разрыхлением структуры бетона микротрещинами, особенно при некоторых высоких

уровнях напряжений. Оба эти процесса (старения и разрыхления) сказываются на изменении прочности, а также упругих и вязких свойств бетона во времени. Их учет привел к существенным отличиям современных теорий ползучести бетона (по «натеканию» деформаций ползучести при нагрузках и обратимости при разгрузках) от теорий ползучести металлов. Принимая во внимание эти признаки, модели ползучести бетона отличаются одна от другой. Старение учитывается в рамках линейных теорий, а учет развития внутренней трещиноватости (разрыхления) бетона во времени приводит к нелинейным построениям. В линейной наследственной теории старения Г.Н. Маслова — Н.Х. Арутюняна старение приводит к частичной обратимости деформаций ползучести во времени, а в классической теории старения С. Уитни деформации ползучести являются полностью необратимыми. Нелинейные деформации также в одних случаях считаются частично обратимыми [5, 35], а в других — полностью необратимыми [30]. Здесь мы исходим из частичной обратимости обеих составляющих деформации ползучести. Частичная обратимость деформаций ползучести, связанных с внутренним трещинообразованием, следует из представленного далее рассмотрения природы таких деформаций. Старение и разрыхление могут усиливаться в определенных температурно-влажностных условиях, что влияет на ползучесть и термползучесть.

Построение различных вариантов теории ползучести можно встретить во многих капитальных монографиях, обзорах и статьях [1, 2, 4, 5, 26, 27, 29, 30, 32, 35, 97, 122, 140, 141, 144, 145, 149, 159, 165, 171 и др.], поэтому далее они будут затронуты в малой степени. В основном развиваются подходы, позволяющие описать ползучесть и термползучесть бетона при некоторых сложных режимах нагружения и отдельных неоднородных напряженных состояниях.

Ползучесть бетона начинает проявляться с начала приложения напряжений. Однако для упрощения расчетов строят нелинейные модели кратковременного и длительного нагружений. При этом в «кратковременных» моделях деформации ползучести относят к неупругим деформациям, и время действия напряжений в явном виде не вводят, хотя наиболее привлекательными являются единые подходы. В предлагаемом издании развиваются некоторые из таких подходов, а также отдельно выделяются «кратковременные» модели.

Усадочные деформации связаны со сложным неоднородным процессом высыхания во времени бетона на различных уровнях структуры [1, 96, 163, 165] и зависят от влажности окружающей среды и контакта с ней. В неизолированных образцах обычно быстрее всего высыхают и деформируются от усадки наружные слои бетона, что приводит к возникновению так называемых собственных (их еще называют условно-внутренними) напряжений, от неравномерной усадки и связанных с ними дополнительных трещин в структуре. С капиллярно-пористой и трещиноватой структурой бетона также связаны его влаго-

и газонепроницаемость, набухание в водной среде [163], долговечность в различных средах [7].

Описанные выше структуры относятся к плотным структурам. Они свойственны основным конструкционным видам бетона — тяжелому и плотному легкому. Эти бетоны будут основными в данном рассмотрении. Среди других структур можно выделить ячеистую, присущую ячеистым бетонам, и зернистую, свойственную крупнопористым бетонам. В матрице ячеистой структуры равномерно распределены (вместо зерен крупного заполнителя) пустоты (поры) различных размеров. В зернистой структуре матрица фактически отсутствует, а заполнителем являются склеенные в отдельных точках зерна крупного заполнителя.

Таким образом бетоны могут существенно различаться между собой. Несмотря на это, им свойственны некоторые общие, основополагающие с точки зрения механики, свойства — локальная неоднородность, трещиноватость, физическая нелинейность (нелинейность связей между напряжениями и деформациями), конструкционная и приобретаемая анизотропия. Эти свойства могут трансформироваться во времени в зависимости от силовых воздействий и окружающей среды.

Можно выделить два направления в построении общих расчетных моделей бетона — как сплошного и как дискретного тела, однако основным остается первое направление, связанное с нелинейной механикой сплошного деформируемого тела. Это направление требует, однако, некоторых пояснений в силу указанных свойств неоднородности и трещиноватости бетона, которые не укладываются в рамки представлений классической механики.

Гипотеза о сплошности строения твердого тела и реальная структура бетона. Как известно, основополагающей гипотезой механики деформируемого твердого тела и таких важных для нас ее ветвей, как теория упругости и пластичности, является гипотеза о сплошности строения тела. Согласно этой гипотезе, тело представляется непрерывным (без дефектов нарушения сплошности, пор, полостей, трещин) как до, так и после деформаций. Причем непрерывность распространяется на любые сколь угодно малые объемы тела (дискретная, атомистическая структура вещества не учитывается). Гипотеза о сплошности по-существу является не столько физической, сколько математической, поскольку позволяет представлять деформации и перемещения непрерывными функциями координат. В связи с непрерывностью деформаций непрерывными становятся и напряжения.

Даже беглого сопоставления свойств сплошной среды с рассмотренными выше свойствами бетона достаточно, чтобы заметить видимые между ними различия. Основные из них: нарушение геометрической непрерывности (трещиноватость); нарушение физической непрерывности и однородности в малом, вероятностный

характер факторов, влияющих на механические свойства бетона (сплошной среде прописывают детерминированные свойства). Под нарушением физической непрерывности подразумевается то обстоятельство, что бетон начинает выступать как собственно материал не в бесконечно малых объемах, а в конечных объемах макроструктуры (малых, или в зависимости от крупности заполнителя более значительных).

Основные элементы преодоления различий между идеально сплошной средой и бетоном. Несмотря на перечисленные различия бетон представляется некоторой моделью сплошной среды, в которой эти различия преодолеваются. Основные элементы такого преодоления следующие: выявление характерных объемов структурной неоднородности; замена реальных напряжений и деформаций в пределах указанных объемов некоторыми сглаженными; установление связей между сглаженными напряжениями и деформациями (физических соотношений, определяющих соотношение материала); учет влияния градиентов напряжений и деформаций на физические соотношения как важного фактора уточнения «сглаженной» модели; учет особого влияния факторов несплошности (трещиноватости) на характер деформирования и разрушения; способы учета некоторых факторов, имеющих недетерминированную (вероятностную) основу: масштабный фактор, разброс механических свойств, введение механических характеристик, обычно с определенной обеспеченностью, в детерминированной постановке. Такую постановку еще называют полувероятностной. Учет масштабного фактора расширяет возможность такой постановки. Практическая реализация такой постановки стала возможной благодаря современным вычислительным средствам и методам и в первую очередь — методу конечных элементов.

Однако нельзя также не заметить, что в связи с МКЭ и другими вычислительными методами, например методами сосредоточенных деформаций, стержневой аналогии, которые начали стирать некогда четкие грани между дискретными и сплошными моделями твердых тел, заметно ослабло педантичное отношение к гипотезе о сплошности и к анализу возможных погрешностей в связи с ее нарушениями в реальных телах. В связи с этим остановимся более подробно на указанных элементах преодоления различий.

Характерные элементы структуры бетона и его компонент. Бетоны и его компоненты относятся к материалам с неоднородной структурой. Геометрически материал с такой структурой характеризуется некоторыми минимальными объемами, в которых он начинает свое становление как собственно материал — носитель его свойств. Фигуры такого объема удобно представлять в виде параллелепипедов и кубиков, если привязываться к декартовой системе координат. Назовем такие элементы характерными и обозначим l_0 наименьший размер характерного элемента (l_0 — элемента). Знания об l_0 необходимы, в первую очередь, при назначении размеров

опытных образцов по определению физико-механических свойств бетона экспериментальным путем (кубиковой прочности на сжатие, призмочной прочности на сжатие и растяжение, начального модуля деформаций и прочности бетона при многоосном напряжении и др.). Опытные образцы должны включать в себя минимум один l_0 -элемент. База замера в опытах средних относительных деформаций также должна составлять не менее l_0 .

Теоретические пути определения l_0 не разработаны, поэтому о l_0 пока судят на основании экспериментальных исследований. По экспертным оценкам $l_0 \approx 5(d_p + a_m)$, а в случае плотной упаковки $l_0 \approx 5d_s$, где d_s — диаметр заполнителя, a_m — одна средняя прослойка матрицы. Для обычного тяжелого бетона при крупности заполнителя 10–40 мм соответственно $l_0 \approx 50 \dots 200$ мм.

Далее встает вопрос о корректности перенесения механических характеристик l_0 -элементов на элементы реальных конструкций. Обычно полагают [24], такая корректность обеспечена, если $l_0 \ll L$, где L — меньший размер конструкции¹ (чаще ее высота). Однако во многих реальных конструкциях (балках, плитах) размеры l_0 и L являются сопоставимыми. Здесь, а также при исследовании мест концентрации напряжений в отдельных областях крупных конструкций сталкиваемся с отмеченной проблемой перенесения характеристик l_0 -элементов на малые элементы (условно — с проблемой малых элементов при неоднородных напряженных состояниях). Эта проблема явно обозначилась в последнее время в связи с применением современных вычислительных методов и, в первую очередь, метода конечных элементов к расчетам железобетонных конструкций. Размеры конечных элементов (в простейшем виде кубиков, полосок, рис. 1.1, d, e), на которые разделяется конструкция (например балка, как на рис. 1.1, d, e), обычно принимают значительно меньшими, чем l_0 , чтобы получить довольно точное (по меркам идеального тела) распределение напряжений.

Можно указать на несколько способов исследования проблемы малых элементов: на основе некоторой конечно-элементной модели характерных элементов; на основе экспериментального изучения характерных элементов в условиях градиентов напряжений; на основе разработки некоторых статистических моделей. Эти способы рассмотрены в последующих пунктах. Здесь остановимся только на упрощенной статической интерполяции, которая может использоваться для некоторых предварительных (экспертных) оценок.

Выделим в пределах характерного элемента самый малый (начальный) элемент — носитель свойств бетона (l , рис. 1.1, z). В начальный элемент будем включать одно зерно заполнителя d_s и одну прослойку матрицы a_m ; его размер $e_0 \approx d_s + a_m$ (это также наименьшая база замера деформаций). Начальному элементу присущ большой

¹ Хотя, как ясно из дальнейшего рассмотрения, и для массивных тел такая проблема все же возникает в связи с проявлением масштабного эффекта.

разброс свойств. Полагаем, что то или иное свойство начального элемента представляет собой одно из возможных проявлений его в совокупности элементов рассматриваемой однородной области — генеральной совокупности. Характерный элемент (*II*, рис. 1.1, *з*) представляет собой большую выборку свойств начальных элементов. Эта выборка свойств по своим статистическим показателям — среднему значению и коэффициенту изменчивости — должны с большой точностью приближаться к свойствам генеральной совокупности. Такая схема может быть отнесена к некоторой простейшей статистической схеме «объединения» элементов без учета некоторых новых факторов, например масштабного эффекта, которые начинают сказываться при объединении.

Выделим в характерном элементе некоторые более мелкие элементы (подэлементы). Подэлементы (призма *III*, *слой IV*, рис. 1.1, *з*) представляют собой отдельные малые выборки свойств начальных элементов, которые по своим статистическим показателям с допустимой погрешностью приближаются к показателям свойств характерного элемента. В практике разделения конструкций на конечные элементы могут встретиться и другие подэлементы, например 2 (*III*), состоящие из двух элементов *III* или 4 (*III*), которые состоят из четырех элементов *III*. Все указанные подэлементы будем относить к подэлементам масштаба l_0 .

Пусть структура l_0 — элемента такова, что она складывается из 125 одинаковых δ_0 -элементов (в силу того, что $l_0 \approx 5 \delta_0$). Тогда элементы *III*, 2(*III*), 4(*III*), *IV*, *II* (l_0 -элемент) будут включать соответственно 5, 10, 20, 25 и 125 начальных элементов. Пусть они представляют выборки независимых свойств δ_0 -элементов, например, прочности. Учтем дополнительный фактор — возможность изменения этих выборок в процессе прогрессирующего разрушения. Пусть в результате этого 30% слабых элементов во всех членах ряда к моменту «формирования» окончательной прочности уже оказались ранее разрушенными. Тогда новый ряд n с округлениями до целых чисел составит: $n = 3, 7, 13, 17, 83$ (в действительности вероятность попадания слабого элемента в малые подэлементы будет меньше, чем в более крупные, что несколько увеличит малые значения n). Примем для оставшихся элементов значительный коэффициент вариации прочности $c = 35\%$. Ошибка средней прочности с округлениями для указанного ряда соответственно составит: $p = 20, 13, 10, 9, 4\%$ ($p = c/\sqrt{n}$), а результат оценки будет достоверным, начиная с $p = 10\%$.

Разброс прочности 4% в кубах из однородного замеса примерно соответствует действительности, поэтому можно продолжить рассмотрение оценок (фактически $c = 35\%$ назначаем, чтобы выйти на $p = 4\%$, а остальные ошибки соотносятся с этим реальным значением только на основе статистических зависимостей; здесь просматривается аналогия с односторонним интерполированием). Предположим, что точность $p = 10\%$ допустима. Видим, что она соответствует разбивке

сечения характерного элемента на квадратики размером $2\delta_0 \times 2\delta_0 \times l_0$ к меньшей погрешности приводит разбивка на полоски толщиной δ_0 . Таким образом, наименьший объем конечного элемента должен составлять примерно не менее $1/6$ объема характерного элемента. Это обстоятельство следует учитывать в разбивке сечений реальных конструкций на отдельные элементы. Прямоугольная разбивка на элементы 2(*III*) элемента *III*, исходя из указанных соображений, должна быть увеличена в 4 раза и более, что уже мало реально (она, фактически, возможна только в однородных протяженных зонах чистого изгиба и внецентренного сжатия балочных элементов). Эти оценки будут смягчаться при учете влияния градиентов напряжений.

Схема анализа более мелких структур в принципе повторяет схему анализа структуры бетона. Размер характерного элемента цементно-песчаного камня (*Y*, рис. 1, *б*, *з*) составляет $l_0 \approx 10...25$ мм, а цементного камня (*YI*, рис. 1, *в*, *з*) $l_0 \approx 0,5...1,5$ мм; соответственно $\delta_0 \approx 2...5$ мм; $\delta_0 \approx 0,1...0,3$ мм. Механические свойства материала в масштабах l_0' и l_0'' также могут представлять самостоятельный интерес, например, в задачах сцепления арматуры с бетоном, в расчетах тонкостенных конструкций, в построениях дискретных конечно-элементных моделей бетона и др.

С размерами типа l_0 связаны такие основополагающие понятия, как напряжения и относительные деформации в материалах с неоднородной структурой — так называемые сглаженные напряжения и относительные деформации. Понятия сглаживания неотделимы от способа установления связей между напряжениями и деформациями (физических соотношений, определяющих соотношений материала, в простейшем виде — диаграмм связи напряжений с деформациями при центральном сжатии и растяжении образцов). Рассмотрим эти вопросы более подробно, предварительно охарактеризовав для сопоставления свойства напряжений в идеализированном сплошном теле.

Напряжения в сплошном теле. Внешние силы (s , рис. 1.2, *а*) и силы тяжести, действующие на конструкцию, вызывают внутри нее силы взаимодействия между отдельными ее частями и частицами (внутренние силы, q на рис. 1.2, *б*). Сам факт возникновения внутренних сил не зависит от строения тела, меняются только закономерности распределения сил по сечению. Эти закономерности в сплошных телах отображаются эпюрами напряжений; напряжения — мера внутренних сил. Остановимся на понятиях средних напряжений и напряжений в точке.

Средние напряжения на площадке. Пусть ΔA — некоторая площадка, на которую действуют внутренние силы q (рис. 1.2, *б*). Обозначим ΔF — равнодействующую этих сил, c_0 — эксцентриситет положения ΔF относительно центра тяжести площадки (точки k на

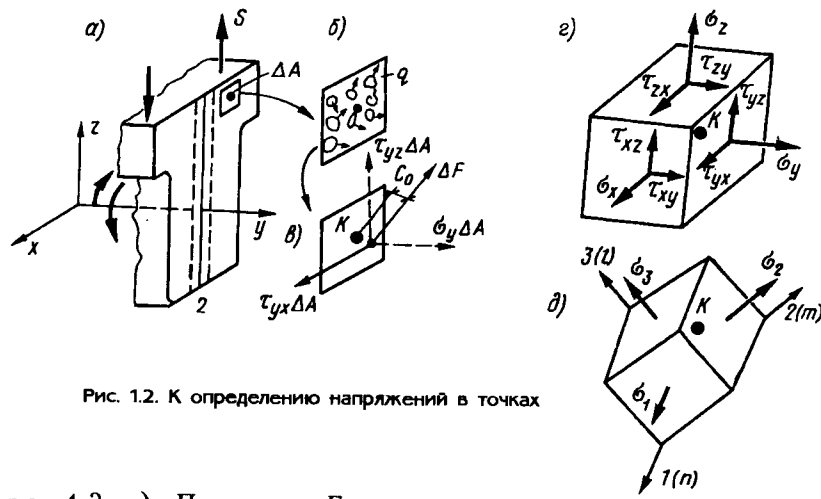


Рис. 1.2. К определению напряжений в точках

рис. 1.2, б). Переноса F в точку K , получим еще и некоторый дополнительный момент $\Delta M = \Delta F c_0$. Действие силы ΔF можно выразить через вектор средних напряжений

$$\sigma^m = \Delta F / \Delta A, \quad (1.1)$$

где m — индекс осреднения; аналогично можно представить и вектор средних распределенных моментов.

Средние напряжения не полностью характеризуют напряженное состояние на площадке, если $\Delta M \neq 0$. В этом их недостаток.

Напряжения в точке K на площадке ΔA сплошной среды. Напряжения в точке являются основным понятием механики сплошной среды. Их получают, стягивая площадку ΔA к точке K . В силу непрерывности сплошной среды возможен предельный переход при $\Delta A \rightarrow 0$. В пределе

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.2)$$

При этом $c_0 \rightarrow 0$ и $\Delta M \rightarrow 0$, за исключением особых точек, например в кончике трещин. Таким образом вектор σ полностью характеризует напряжение в точке K на заданной площадке ΔA .

Полное напряженное состояние в точке. На рис. 1.2, а, б декартовы оси координат выбраны так, что ось y нормальна к площадке ΔA , а две остальные оси проходят параллельно ей. Проецируя σ на оси y, x, z , получим соответственно три компоненты: σ_y — нормальное напряжение, τ_{yz}, τ_{yx} — касательные напряжения. Эти компоненты не полностью характеризуют напряженное состояние в точке, так как вектор σ представляет полное напряжение в точке K лишь на площадке ΔA . Площадка ΔA проведена параллельно одной координатной плоскости xz . Проведя через K еще две площадки

параллельно yz, xy , получим на них соответственно еще по три компоненты: $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ и $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. В теории упругости доказывается парность касательных напряжений: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Таким образом остается шесть компонент напряжений, которые можно представить в виде вектор-столбца, используя матричное представление компонент (рис. 1.2, в).

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T, \quad (1.3)$$

где T — знак транспонирования показывает, что строка в действительности располагается вертикально.

Как будет показано ниже, зная эти компоненты, можно найти напряжения на любой другой секущей площадке, проходящей через точку (при повороте координат они преобразуются по законам симметричного тензора второго ранга). Поэтому говорят, что шесть напряжений полностью характеризуют напряженное состояние в точке сплошной среды. Шесть компонент тензора напряжений характеризуют объемное (трехосное) напряженное состояние.

При определенной ориентации трех ортогональных площадок у заданной точки K касательные компоненты на них обращаются в нуль, и остаются три нормальных напряжения $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2$ — максимальное, минимальное и среднее (рис. 1.2, д). Они образуют вектор-столбец

$$\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, 0\}. \quad (1.4)$$

Аналогично относительные деформации малого элемента образуют тензор относительной деформации. Более подробно свойства тензоров напряжений и деформаций рассмотрены в п. 1.3 (они идентичны).

Однородное напряженное состояние. Если в отдельной области конструкции или отдельном элементе компоненты тензора напряжений остаются одинаковыми, то такое напряженное состояние называют однородным. Элементы с однородным напряженным состоянием играют важную роль — их используют для установления связей между напряжениями и деформациями. В основном эти связи устанавливают в осях главных напряжений; на рис. 1.2, д эти оси обозначаются $1-3$ или n, t, l .

Плоское и одноосное напряженное состояние. Если одно из главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ равно нулю, то такое напряженное состояние называют плоским, а если два главных напряжения обращаются в нуль — одноосным.

Свойства напряжений в сплошном теле. Можно выделить три таких свойства: напряжения являются, за исключением особых точек, например, у кончиков трещин, гладкими и непрерывными функциями координат; несмотря на возможные сложные формы изменения эпюр напряжений по объему конструкции в малых объемах, эти эпюры стремятся к локально однородным; это свойство фактически не является самостоятельным, а вытекает из первого свойства); в

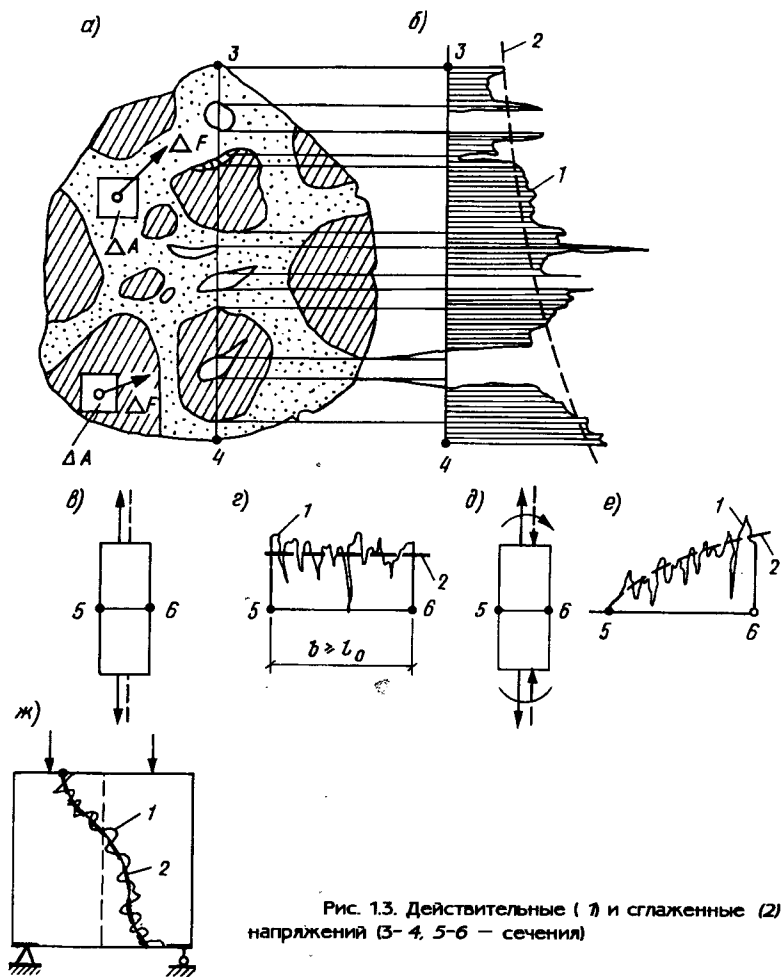


Рис. 13. Действительные (1) и сглаженные (2) эпюры напряжений (3-4, 5-6 - сечения)

отдельных элементах (в зависимости от граничных условий) напряжения могут быть однородными по всему объему, например в призмах, подвергнутых центральному растяжению или сжатию. Аналогичными свойствами обладают и относительные деформации. Третье свойство используется для установления связей между напряжениями и деформациями, а второе — обуславливает применимость этих связей к расчету любых конструкций.

Виды напряжений в бетоне и способы их определения.

Выделяются два вида напряжений — действительные и сглаженные. **Действительные напряжения.** С некоторой идеализацией структуру бетона можно представить в виде сплошных частей матрицы и

сплошных частей зерен заполнителя, в которые вкраплены отдельные полости в виде трещин, пор и других дефектов (рис. 1.3). Бетонную среду будем считать кусочно-однородной, многосвязной средой. Пусть площадка ΔA размещается на сплошных частях такой среды. Тогда возможно осуществить предельный переход (1.2) и вычислить напряжения в точках сплошных частей бетона. Такие напряжения будем условно называть действительными, чтобы оттенить их отличие от сглаженных. Эпюры действительных напряжений будут иметь внутри однородных сплошных частей бетона весьма сложные очертания из-за того, что эти области окаймляются трещинами, порами и сплошными частями структуры бетона уже с иными свойствами. Кроме того, эпюры будут иметь разрывы на границах перехода через полости и на контактах перехода от одной сплошной части структуры к другой (рис. 1.4).

Реальные напряжения в бетоне можно определять методом конечных элементов. На рис. 1.4 для примера представлена конечно-элементная модель бетонной призмы. В отдельные довольно мелкие конечные элементы из цементно-песчаного раствора (см. рис. 1.4, а) вкладывается набор (меню) зерен крупного заполнителя 1 (см. рис. 1.4, б с учетом дефектов на границе: 2 — контактных трещин; 3 — разрыхленной пора матрицы), меню больших пор (4, рис. 1.4, в), а также набор трещин (5, рис. 1.4, г). Все эти разновидности конечных элементов «перемешиваются» статистическими методами, а затем прослеживается поведение такой призмы при одноосном, а в более общем виде и объемном напряженном состоянии.

Можно выделить две особенности действительных напряжений: они являются не гладкими и прерывными функциями координат; для них трудно указать области однородных напряженных состояний и таким образом установить экспериментально связи между

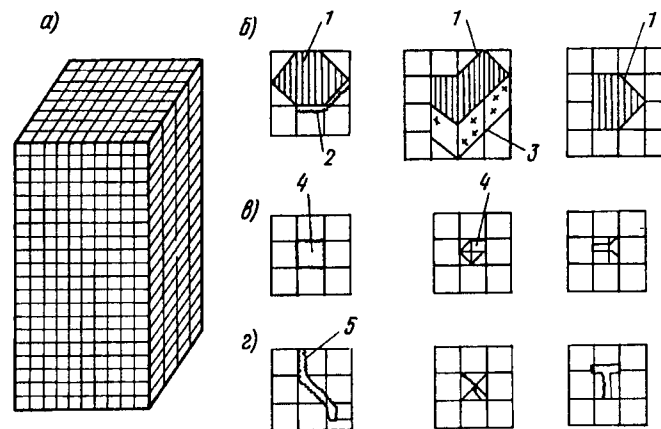


Рис. 1.4. К построению конечно-элементной модели бетона

напряжениями и деформациями. При этом если даже на границе, например кубика, удастся при помощи гидростатического давления приблизиться к однородным напряжениям, то внутри него они становятся неоднородными. Эт и свойства противоположны свойствам напряжений сплошной среды.

Сглаженные напряжения, способы сглаживания. Указанные особенности действительных напряжений бетона фактически исключают возможность их использования при расчете конструкций. Хотя в отдельных малых элементах можно расчетным путем, например на основе МКЭ приблизиться к определению таких напряжений (см. выше). В расчетах реальных конструкций действительные напряжения (1 на рис. 1.3) заменяются сглаженными (2 на рис. 1.3), т.е. гладкими и непрерывными функциями координат. Сглаженные напряжения наделяются всеми указанными выше свойствами напряжений сплошной среды. Процедура сглаживания напоминает математическую процедуру интерполирования – приближение сложной функции некоторым гладким полиномом). Инструментом интерполирования в механике выступают фактически все ее уравнения. Однако основа сглаживания закладывается при установлении связей между напряжениями и деформациями на так называемых однородных элементах. Точнее в основе сглаживания лежит принцип согласования однородных напряженных состояний, который реализуется через физические соотношения.

Образы однородных элементов заимствуются из теории упругости. Это указанные выше кубики, призмы, цилиндры и другие элементы из сплошного однородного материала, в объемах которых при определенных условиях приложения сил на контуре, реализуется однородное напряженное состояние. Принцип согласования выглядит естественным образом. Однородные образцы из сплошного материала принимаются в качестве таковых и в случаях, когда они изготовлены из материала со сложной структурой (на это обращено внимание еще в [31]). Напряжения сплошных однородных тел при этом вступают в качестве сглаженных напряжений образцов из реального материала. Например в центрально нагруженной призме $\sigma = N/A$ – это сглаженные напряжения, где N – сила, A – площадь поперечного сечения (см. рис. 1.3, в, з). Они заменяют реальные напряжения (см. 1 на рис. 1.3, з).

Аналогично, нагружая кубики, призмы и другие элементы напряжениями по двум или трем главным направлениям, изучают поведение бетона при плоском и объемном напряжениях. Методики создания таких сглаженных однородных главных напряжений требуют большого инженерного искусства. Они изложены в работах А.В. Яшина [175], Ю.Н. Малашкина [116] и других работах отечественных и зарубежных исследователей [190, 192, 195]. Здесь только заметим, что при этом заранее предполагается симметрия тензора сглаженных напряжений.

В приведенных выше примерах процедура сглаживания сводится к осреднению по площадкам. Такой способ сглаживания здесь называется простым. В процедуре сглаживания имеется всегда определенный элемент огрубления. Он связан с тем, что трудно одновременно создать сглаженное однородное напряженное и деформированное состояния. Обычно, где это возможно, исследователи стремятся к созданию условий однородной деформации. При этом получаются меньшие разбросы опытных данных.

Влияние структуры сказывается на размерах однородных элементов. Как уже указывалось, объем однородного элемента или его исследуемой части, т.е. объем сглаживания, должен быть таким, чтобы он мог вместить хотя бы один характерный элемент структуры бетона масштаба l_0 . Напряжения в однородных элементах сглаживаются на площадках порядка l_0 , а деформации на длине порядка l_0 .

Физические соотношения, связывающие сглаженные напряжения с деформациями, используются совместно с другими уравнениями механики для определения сглаженных неоднородных напряжений. В результате решения возможны несколько ситуаций: $h < l_0$; $h \ll l_0$; $h \geq l_0$ (h – масштаб, на котором неоднородные сглаженные напряжения приближаются к однородным). В первом случае и частично во втором применение характеристик простого сглаживания представляется оправданным, однако в других случаях следует учитывать влияние градиентов напряжений и деформаций на физические соотношения и прочность. Процедура сглаживания с учетом влияния градиентов относится к сложной (см. рис. 1.3, д, е). Остановимся на учете градиентов более подробно.

Способы учета влияния градиентов напряжений и деформаций на механические свойства бетона. Замечено, что не только неоднородные компоненты структуры бетона и ее дефекты оказывают тормозящее влияние на развитие внутренних трещин, но также и существенное неоднородное напряженное и деформированное состояние – условно силовая неоднородность, если она проявляется на масштабе длины l_0 . В некоторых пределах эта неоднородность сказывается слабо и ее влияние не учитывается в расчетах. Неоднородность напряжений и деформаций оценивается через градиенты (производные) напряжений и деформаций по главным координатам x_i ($i = 1, 2, 3$). Главные координаты совпадают с траекториями главных напряжений и относительных деформаций σ_i и ϵ_i . Ограничимся первыми производными. Градиенты удобно разделять на прямые $\partial\sigma_i/\partial x_i$, $\partial\epsilon_i/\partial x_i$ и косвенные -- моментные $\partial\sigma_i/\partial x_j$, $\partial\epsilon_i/\partial x_j$, $i \neq j$.

Как показывают эксперименты, моментные градиенты сказываются на моменте трещинообразования тонких пластин и на деформациях и прочности бетона сжатой зоны балок над трещинами. Некоторый обзор этих работ представлен в [78]. Влияние градиентов исследовано пока еще недостаточно.

Возможно несколько путей учета градиентов в расчетных моделях, например: градиенты непосредственно включаются в условия прочности и физические соотношения; определяющие соотношения материала остаются традиционными, но входящие в них характеристики (переменные модули деформации и параметры прочности) зависят, кроме прочего, еще и от градиентов.

В предлагаемой работе развивается второе направление. Градиенты деформаций более предпочтительны в расчетных построениях. Это объясняется их «консервативностью», достаточно вспомнить гипотезу плоских сечений и то разнообразие эпюр напряжений, которые ей соответствуют в случае учета физической нелинейности. В расчетные зависимости вводятся не сами градиенты, а безразмерные величины χ_k — отношения текущих градиентов к некоторым эталонным. Эталонные градиенты [79] зависят от вида напряжений — сжатия или растяжения. Считается, что до эталонных величин влияние градиентов можно не учитывать (при $\chi_k \leq 1$).

К проблеме градиентов примыкают еще одни, хотя и несколько обособленные области приложения внешней нагрузки. Это области смятия под малыми площадками приложения нагрузок, под выступами арматуры периодического профиля (области контакта — сцепления арматуры с бетоном) и другие области в масштабах, меньших масштаба l_0 . Интерес к ним повысился в связи с методом конечных элементов, который может указывать на преждевременное разрушение конструкции в этих областях, если не учитывать эффекты существенного упрочнения материала в них.

Получить действительную картину напряженно-деформированного состояния в этих зонах, видимо, возможно на основе специальных конечно-элементных моделей типа той, что представлена на рис. 1.2, но с учетом объемного напряженного состояния. Интересное развитие эта проблема получила в [3, 161] на основе дискретно статической модели. Однако формально учесть повышенную прочность в этих зонах можно по признаку градиентов. Этот путь вписывается в возможности механики сплошной среды.

Заметим еще, что принятая модель сплошной среды с симметричными тензорами напряжений и деформаций типа (1.3) не является единственно возможной. Отдельные результаты по учету реальных и сглаженных градиентов можно получить на основе развития моментной теории упругости. Напряжения в моментной теории характеризуются девятью компонентами несимметричного тензора напряжений и кроме того девятью компонентами тензора моментов $\{m\}$. Моменты здесь в отличие от классической теории не устремляются к нулю (при $A \rightarrow 0$). Физически такая теория моделирует некоторые пилообразные эпюры напряжений (например с одним регулярным «зубцом пилы» на длине δ_0).

Применительно к бетону эта теория нашла некоторое развитие

в [153]. Было показано, однако, что моментная теория приводит к малым уточнениям.

В заключение отметим, что в сглаживании свойств тела в масштабах l_0 и в учете влияния градиентов на деформативность и прочность в этих же масштабах заключен способ модификации известного в механике принципа локального сопротивления («автономной прочности»). Этот принцип для идеально сплошного тела можно сформулировать так: прочность и деформации в точке тела зависят от характеристик материала и напряжений в этой же точке, а также (при появлении физической нелинейности) — от трансформаций характеристик материала в зависимости от истории напряжений и деформаций также в этой же точке и не зависят от проявления указанных факторов в точках окружающей области.

В модифицированном виде этот принцип указывает на то, что прочность и относительные деформации материала в локальной области масштаба l_0 (l_0') зависят от характеристик материала в этой же локальной области, а также от трансформаций характеристик материала в зависимости от истории сглаженных напряжений и деформаций, а также их градиентов в этой же области и не зависят от таковых в областях такого же масштаба, прилегающих к данной локальной области. Этот модифицированный принцип дает возможность, хотя и с некоторыми особенностями, использовать традиционную форму физических соотношений — в виде связей между напряжениями и деформациями; он также позволяет по уровню напряжений и деформаций оценивать локальную прочность.

Влияние масштабного фактора. С этим фактором мы сталкиваемся с самого начала построения моделей бетона с сглаженными характеристиками, выделяя элементы масштаба $l_0 - l_0'$. Более мелкие элементы рассматриваются с учетом влияния градиентов напряжений и деформаций, например, как при разделении сечений изгибаемых балок в расчетах на условные мелкие полоски или другие элементы (см. рис. 1.1, d, e , размеры полосок и квадратиков $h \ll l_0$). В таких задачах оба фактора выступают и учитываются совместно (выделить их в отдельности весьма трудно). Таким образом немасштабных моделей бетона, как и других материалов с неоднородной структурой, не существует: Однако понятие масштабного фактора более емко. Новую информацию о нем дают статистические теории хрупкой прочности (в частности, указывающие на влияние масштабного фактора не только при $h < l_0$ и $h \ll l_0$, но и при $h > l_0$ и $h \gg l_0$, где h — по-прежнему масштаб областей с квазиоднородными сглаженными напряжениями). Довольно полный обзор статистических теорий представлен в [3]. Можно отметить широко известные общие работы Вейбула, В.В. Болотина [23] и многих других, применительно к бетону — М.М. Холмянского [161], В.Д. Харлаба [160], Л.Г. Седрякяна [150] и др. Согласно этим теориям масштабный фактор может заметно проявляться в трещиноватых телах, которым свойствен большой

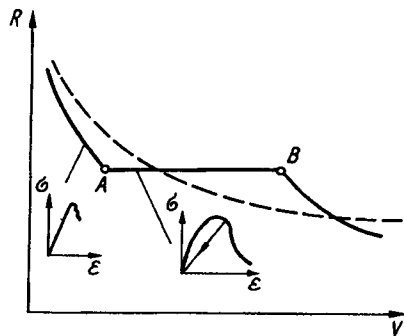


Рис. 1.5. Влияние объема на прочность по статистическим моделям

разброс по объему дефектов (очагов разрушения, обычно структурных трещин). Среди этих трещин выделяется опасная. Статистическая теория в традиционном варианте основана на распределении Вейбула и исходит из того, что вероятность появления опасной трещины в малом объеме меньше, чем в большом, отсюда и повышенная вероятность разрушения большого образца. Такая постановка дает плавное снижение прочности по мере увеличения объема образца (пунктирная линия на рис.1.5). Для бетона зависимость Вейбула конкретизирована в [8].

К иному результату приводит статическая теория разрушения бетона, разработанная М.М. Холмянским и его учениками [3, 161]. Согласно этой теории характер влияния объема на прочность заметно меняется (сплошная ломаная линия на рис.1.5), если учесть эффект торможения опасной трещины другими более мелкими трещинами. В малых объемах влияние торможения невелико, поэтому прочность сначала снижается. Этим малым объемам приписывается хрупкий характер разрушения и линейная диаграмма $\sigma - \epsilon$ вплоть до разрушения. Начиная с некоторого объема (точка А на рис. 1.5), «концентрация» трещин в нем становится достаточной для торможения. АБ — участок торможения; на этом участке прочность не зависит от объема. Бетон в объемах этого участка деформируется по диаграмме $\sigma - \epsilon$ с нисходящим участком. Искривление диаграммы связывается с развитием внутренних дефектов. Такое проявление нелинейности (условной пластичности) называют по О.Я. Бергу [15] псевдопластичностью или по М.М. Холмянскому отрывностью. Затем (после точки Б) возможны уже большие объемы, в которых появляются значительные дефекты, которые малыми дефектами уже не тормозятся.

В статистических моделях структура материала является, в основном лишь средой возникновения дефектов, а сами свойства структуры (размеры заполнителя d_3 и прослоек матрицы a_n , их механические свойства, особенности контактной зоны на границе заполнителя, тормозящее влияние на развитие трещин крупного заполнителя и прослоек матрицы, находящихся в стесненно-объемном напряженном состоянии между заполнителем и др.) учитывается в

интегральной форме, что предопределяет условность статистических моделей.

Некоторые выводы не увязываются со структурой. Например, прочность в малых объемах (порядка σ_0) существенно возрастает и не зависит от прочности крупного заполнителя, который в основном заполняет этот объем. Тем не менее такой главный фактор, как влияние внутренних трещин на прочность, «схватывается» в статистических моделях верно.

Выводы этих моделей, особенно в последних более совершенных вариантах [160, 1], заслуживают серьезного внимания. Это, в первую очередь, вывод о влиянии массивности конструкций на прочность, а также на деформации (на диаграмму $\sigma - \epsilon$). Последний фактор возможно заслуживает большего внимания, так как предопределяет различную способность конструкции к перераспределению усилий. Существенное влияние масштаба образцов на деформации получено, например, в экспериментах [20].

Рассмотрим возможные пути учета масштабного фактора в методах расчета. По данным М.М. Холмянского, объемы, относящиеся к участку торможения АБ, таковы, что приближенно соответствуют изменению размеров сечения призм где-то в пределах десятка см, начиная от 5 см при растяжении и около 10 см при сжатии. Характерные размеры l_0 вписываются в эти размеры, что делает их приемлемыми. Однако все же для малых и больших объемов механические характеристики, полученные на характерных элементах, согласно статистическим моделям, необходимо корректировать. Корректировка может выполняться по одному из трех инженерных критериев: по массивности (объему) всей конструкции, по массивности (объему) областей с однородным напряженным состоянием, по объему локальных областей разрушения (для малых объемов). Видимо, второй и третий критерии — более верные. Учитывая, что расчет, как правило, выполняется численными методами (в основном МКЭ), то такую корректировку выполнить не трудно.

Заметим, что здесь речь идет о дополнительном учете масштабного фактора в детерминированных моделях сплошной среды с некоторыми осредненными характеристиками структурно-неоднородного материала. Уточнения получают отдельно — на основе указанных дискретных статистических моделей или экспериментальным путем.

Возможны, однако, и общие постановки, которые реализуются в «сплошных» статистических моделях. В этих моделях оперируют уравнениями сплошной среды, а структурную неоднородность материала учитывают тем, что вводят дополнительно, кроме тензора средних напряжений, статистические моменты тензора напряжений высоких порядков. Наиболее полное развитие это направление нашло в работах В.А. Ломакина [109]. Выявлена нелокальность связи между напряжениями и деформациями и проанализированы на простых примерах некоторые эффекты, в частности, масштабный эффект.

Однако для решения задач требуется преодоление больших математических трудностей, что сдерживает применение общего подхода.

В этой связи указанная выше комбинированная постановка — с дополнительным учетом масштабного фактора в связях между напряжениями и деформациями отдельных конечных элементов представляется более перспективной. Таким образом, можно учесть не только масштабный эффект, а и то, что в силу, например той или иной технологии или случайных факторов, исходные свойства материала в различных частях конструкции будут различны.

1.2. ТРЕЩИНЫ В БЕТОНЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СВОЙСТВА

Виды трещин, параметры нарушения сплошности. Определив размеры структуры бетона и его компонент, можно перейти к ориентировочной классификации трещин. Заметим, что во многих случаях они допустимы и не сказываются на нормальной эксплуатации конструкций. В принципе трещины можно классифицировать по различным признакам, преследуя те или иные цели. Так, в нормативных документах детализирована классификация по ширине раскрытия трещин. Исходя из раскрытия трещин и сопоставления ее с допустимой шириной раскрытия определяется эксплуатационная пригодность конструкций того или иного предназначения. Этот вопрос рассмотрен в главах, касающихся расчета железобетонных конструкций. Представленное ниже деление трещин преследует цель наметить способы учета трещин в расчетных моделях. На уровне структуры учитываются не только трещины, но и другие дефекты.

Обозначим S_{cr} — площадь берега трещины или характерного сечения плоскости, поры и другой несплошности. Если $(l'_0)^2 k'_0 < S_{cr} < k_0 l_0^2$, то такие дефекты можно отнести к дефектам структуры бетона — дефектам макроструктуры; здесь $k'_0, k_0 < 1$ — некоторые коэффициенты опасного развития трещины. При таком значении k_0 из-за возможной подвижки трещины указанное неравенство в правой части может перейти в неравенство типа $S_{cr} \geq l_0^2 k_0$; если $S_{cr} < (l')^2 k_0$, то такие дефекты уже относятся к дефектам компонент бетона, в данном случае к дефектам мезоструктуры. Коэффициенты типа k_0 могут быть установлены методами механики разрушения, или экспериментальным способом.

Дефекты макроструктуры бетона еще называют собственными или внутренними, хотя, естественно, они могут выходить и на поверхность образца. Структурные трещины обычно не выделяются для отдельного рассмотрения, а учитываются в интегральных характеристиках (модулях) связей между напряжениями и деформациями. При этом способы, точнее возможности их учета, могут быть разными. В этой связи структурные дефекты иногда делят

на два типа: технологические — трещины и поры в матрице, трещины и полости на границе крупного заполнителя и матрицы (см. рис. 1.1, а), возникающие в процессе изготовления конструкции, и силовые — в основном трещины, возникающие в процессе эксплуатации конструкции под нагрузкой. Истинную грань между силовыми и технологическими трещинами в структуре бетона провести трудно, однако силовые трещины обычно располагаются направленно, приводя в итоге к выраженному изменению физико-механических характеристик по разным направлениям (к анизотропии свойств).

В рассмотренных далее моделях этот фактор широко учитывается. Технологические трещины и другие дефекты структуры считаются равномерно ориентированными, хотя в некоторых случаях удается выявить влияние преимущественной ориентации отдельных дефектов. Например, в результате седиментационного эффекта полости могут располагаться преимущественно под зернами заполнителя, что приводит к различным механическим свойствам бетона вдоль и перпендикулярно к слоям бетонирования [37].

Кроме структурных трещин выделим трещины, которые могут пересекать один или несколько структурных элементов, но еще не представлять опасности для несущей способности конструкции в целом ($k_0 l_0^2 k'_0 \geq S_{cr} \geq k_0 L^2$, где L^2 — характерное сечение конструкции). Эти трещины будем называть трещинами разрушения структурных элементов. Заметим, что в железобетонных элементах такие трещины могут относиться к структурным (внутренним) трещинами железобетона по аналогии с тем, как трещины разрушения, например мезоструктурных элементов относятся к внутренним трещинам бетона. Кроме того, вид трещин может зависеть и от вида напряженного состояния. Например неструктурные трещины, при которых начинается разрушение элемента от растяжения, могут быть структурными трещинами, если тот же элемент подвергается сжатию, практически, эта граница определяется пока по концу диаграмм связи между напряжениями и деформациями. Трещины, которые не могут быть отнесены к структурным, должны проследиваться дискретно, например методами конечных элементов, с постепенно выключающимися связями в узлах или методами механики разрушения, которые нашли развитие в работах [48, 134, 154, 161, 165 и др.].

Наконец, последний вид трещин — это магистральные трещины, которые характеризуют разрушение всей конструкции в целом или отдельных важных ее частей. Магистральные трещины относятся к мегатрещинам — большим трещинам. Они также могут быть двух типов. Например они фигурируют в критериях прочности железобетона, выступая как структурные, но также используются в методе предельного равновесия, где выступают уже как дискретные — в виде широко известных линий излома [31].

«Торможение» трещин. Как уже указывалось, структуре бетона свойственны различные дефекты: трещины, поры, полости. При

нагрузении элемента и в процессе его изготовления у этих дефектов концентрируются напряжения, зависящие от характерных размеров дефекта: формы пор и их радиуса, длины трещины и радиуса кривизны в вершине трещины. Так, коэффициент концентрации напряжений (коэффициент превышения их средних значений) для пор в упругом материале по данным [48] составляет 3 — 10. У острых трещин, расположенных внутри хрупких материалов, он может достигать $10^2 - 10^3$. В этом случае уже при довольно низких значениях средних растягивающих напряжений у кончиков трещин будут достигать предельных значений, вызывая практически мгновенное хрупкое разрушение, т.е. трещины будут быстро достигать своей критической длины, при которой появляется тенденция к их неограниченному росту. Этим во многом объясняется низкая прочность бетона при растяжении, однако при сжатии и комбинациях сжатия с растяжением бетон ведет себя как нелинейный материал. Да и при растяжении остаточная прочность превышает ту, которая следует при учете указанных высоких коэффициентов концентрации напряжений у дефектов.

Причины состоят в механизмах торможения внутренних трещин. В качестве факторов торможения выступают (рис. 1.6, а-г): зерна заполнителя, трещины иного направления и ветвления трещин; поры; разрыхленные мелкими порами участки цементного камня и другие неоднородности структуры. Поры «снимают» концентрацию напряжений с кончиков трещин, а зерна заполнителя, огибаясь трещинами, затрудняют их развитие, встречные же трещины направляют их по новым, менее опасным направлениям. При сжатии в месте зигзага трещины будет происходить зажатие берегов (рис. 1.6, д). С энергетической точки зрения торможение сводится к интенсивной диссипации энергии движения трещин. Торможение трещин приводит к пластическому характеру разрушения с развитием псевдопластических деформаций, которые, например в случае сжатия, могут быть весьма значительными. Моделирование методами механики разрушения процесса развития трещин с учетом тормозящего влияния пор и включений заполнителя подробно рассмотрено в [48]. Фактор самоторможения трещин (см. рис. 1.6, б) нашел подтверждение в статистической теории прочности бетонов [161].

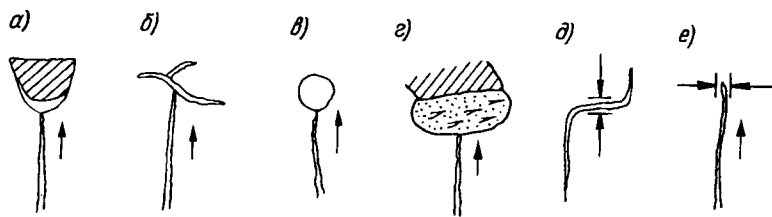


Рис. 1.6. Механизмы торможения трещин

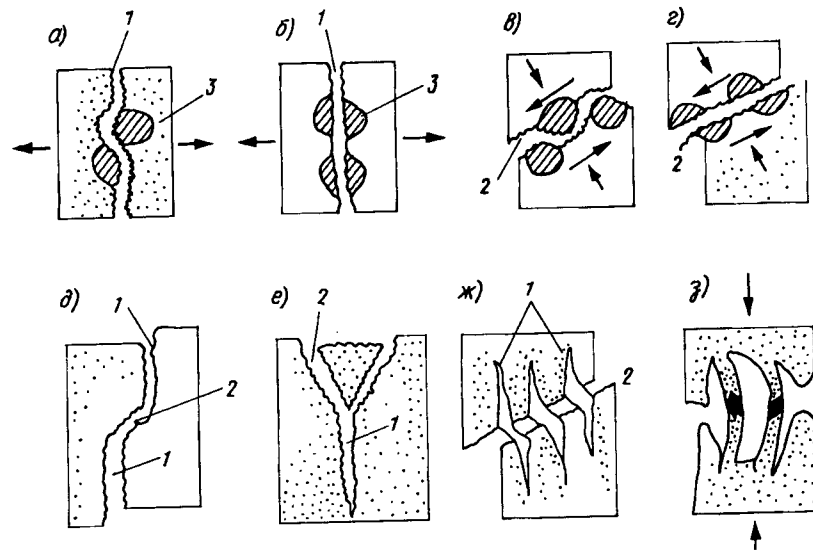


Рис. 1.7. Механизмы разрушения структуры бетона

Таким образом неоднородная структура материала, с одной стороны, является причиной возникновения внутренних трещин, а с другой — фактором, препятствующим их развитию. Важно только, чтобы второй фактор в значительной степени преобладал над первым.

Существенное тормозящее влияние на развитие трещин оказывает и неоднородное напряженное состояние. При этом может срабатывать некоторый эффект зажатия кончиков трещин, схематически он показан на рис. 1.6, е. Характер развития внутренних трещин может зависеть от программы нагружения и других факторов.

Механизмы разрушения структуры бетона. Разрушение бетона начинается с разрушения отдельных элементов его структуры, а затем уже выливается в разрушение более крупных объемов. Можно выделить два исходных механизма разрушения: отрывной (рис. 1.7, а, б по 1 — трещинам отрыва одной части элемента от другой; 3 — зерна заполнителя); сдвиговый (см. рис. 1.7, в, г, по 2 — трещинам сдвига одной части элемента относительно другой). Отрыв и сдвиг могут происходить с разрывом зерен заполнителя (см. рис. 1.7, а, в) — внутризерновые механизмы разрушения и в обход зерен крупного заполнителя (см. рис. 1.7, б, г) — межзерновые механизмы разрушения. Внутризерновые и межзерновые механизмы разрушения являются основными в современной статистической теории прочности бетона [3]. Однако под зернами в этой теории понимают не зерна крупного заполнителя, а некоторые ячейки структуры бетона, окруженные дефектами, которые могут и не содержать зерен крупного

заполнителя. В чистоте отрывный механизм разрушения реализуется при растяжении, при этом отдельные трещины отрыва, объединяясь в одну, образуют магистральную трещину разрушения.

Чисто сдвиговый механизм разрушения встречается редко, в основном при высоких уровнях трехосного сжатия. В остальных случаях преобладают различные смешанные отрывно-сдвиговые механизмы разрушения: в виде зигзаг-трещины (см. рис. 1.7, д), в виде ветвлений зигзаг-трещины с включениями клиновидных элементов (см. рис. 1.7, е), в виде часто расположенных трещин отрыва, пересекаемых трещиной сдвига (см. рис. 1.7, ж). Тонкие части бетона между трещинами могут разрушаться от потери устойчивости (см. рис. 1.7, з). Возможны и другие механизмы. Магистральная трещина разрушения может включать на своем пути различные локальные схемы разрушения. Обычно, чем сложнее и разнообразнее механизмы разрушения, тем большими деформациями это разрушение сопровождается. Такие механизмы свойственны сжатию. Процесс разрушения бетона, таким образом, представляется как процесс прогрессирующего разрушения сплошности. Начало развития такой концепции разрушения в нашей стране было положено работами А.А. Гвоздева [31] и О.Я. Берга [15], затем она развивалась (с теми или иными особенностями) в работах [48, 154, 161 и др.].

Влияние внутренних трещин на диаграммы деформирования бетона. Развитие трещин в структуре бетона приводит, подобно развитию пластических деформаций в металле, к нарушению линейной связи между напряжениями и деформациями — к криволинейной диаграмме $\sigma_c - \epsilon_c$ в случае одноосного растяжения или сжатия. Природа этих деформаций иная, чем природа пластических деформаций в металле, вследствие скольжения слоев кристаллической решетки, поэтому они названы О.Я. Бергом [15] псевдопластическими. Ранее термин «псевдопластический» был введен А.А. Гвоздевым [31], вне связи с раскрытием структурных трещин. М.М. Холмянский [161] считает более правильным термин — «отрывные деформации». Заметим, что наряду с псевдопластическими деформациями в бетоне могут проявляться и некоторые истинные пластические деформации, которые учитываются в окончательных построениях, однако здесь от них абстрагируемся.

Остановимся на природе псевдопластических деформаций, дав им (или, по крайней мере, части из них, учитывая некоторые условности рассмотрения) несколько иную трактовку, чем это принято, и выделим отличительные особенности. Особенности псевдопластического деформирования удобнее рассматривать на примере растяжения. В случае сжатия природа псевдопластических деформаций существенно усложняется, хотя, как показывают эксперименты, некоторые общие особенности схожи.

Представим процесс деформирования некоторой идеализированной призмы в виде последовательности состояний

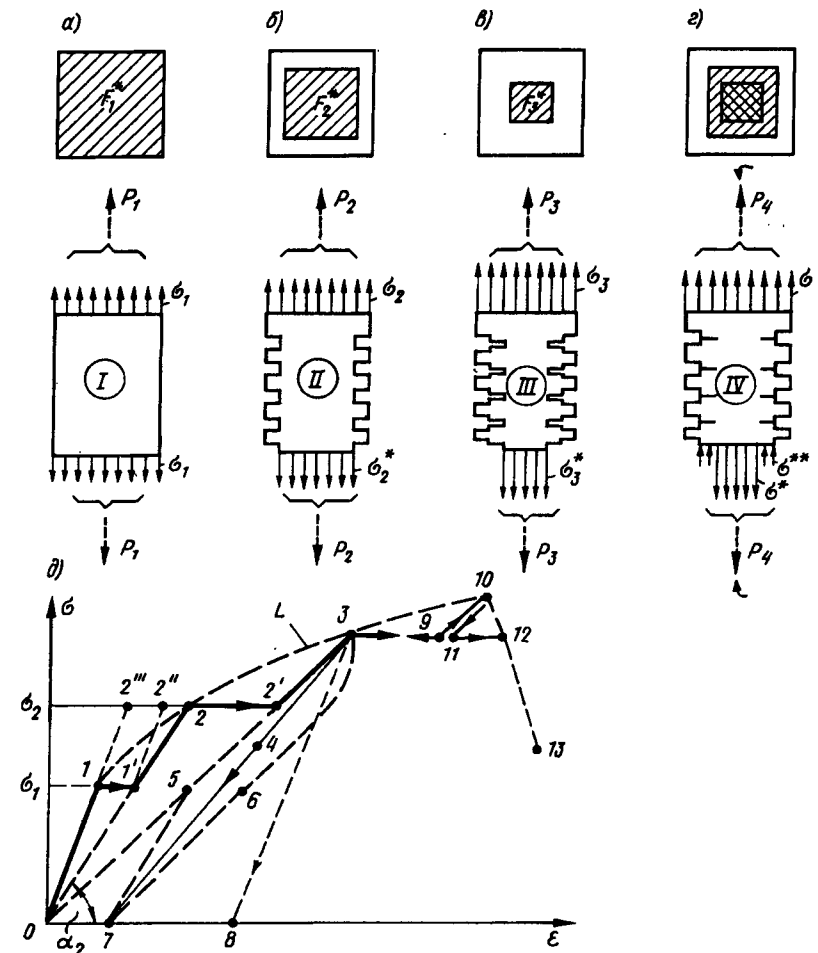


Рис. 1.8. К анализу особенностей деформирования призмы при растяжении с идеализированной схемой нарушения сплошности вследствие трещинообразования

(рис. 1.8, а, б, в). Пусть вначале (до нагрузки P_1 , хотя это не обязательно) трещин нет, затем при нагрузке P_1 трещины образуются в виде равномерно расположенных по периметру прорезей, которые выключает часть сечения по периметру, уменьшая площадь F до величины F_1^* , затем призма площадью F_1^* деформируется до нагрузки P_2 , при которой площадь сплошного сечения скачкообразно уменьшается до F_2^* и так далее.

Что не «затемнять» сути рассматриваемых ниже факторов не будем принимать во внимание концентрацию напряжений у прорезей и нарушение однородности напряжений по сечению. По этой же причине примем, что материал призмы является линейно-упругим с модулем упругости E . Обозначим σ — сглаженные напряжения, вычисленные без учета нарушения сплошности ($\sigma = P/F$), а σ^* — «реальные» напряжения в сплошных частях сечений (см. рис. 1.8, а, б, в). Нагрузкам $P = P_1, P_2, P_3$ (обобщенно P_i) соответствуют одновременно сглаженные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (σ_i) и реальные $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ (σ_i^*); причем $P_i = \sigma_i F = \sigma_i^* F_i^*$ ($i = 1, 2, 3$). Из этого уравнения следует простая связь между сглаженными и реальными напряжениями (индекс i для общности опустим)

$$\sigma^* = \sigma F/F^* = \sigma/\nu, \quad (1.5)$$

где $\nu = F^*/F$ — коэффициент нарушения сплошности сечений.

Зависимость (1.5) указывает на то, что реальные напряжения σ^* в трещиноватых телах всегда выше (здесь в ν^{-1} раз), чем сглаженные σ , которые фигурируют в расчетах. Естественно, и реальные характеристики прочности превышают сглаженные характеристики типа R_{bt} .

Отметим, что параметр ν изменяется в пределах $0 < \nu \leq 1$. Этим он подобен параметру сплошности ψ Л.М. Качанова, который, как известно, нашел применение в построениях теорий разрушения трещиноватых тел [92]. Однако в отличие от ψ параметр ν не является интегральным (по объему) параметром накопления повреждений, а учитывает влияние направленного развития трещин; в случае объемного напряженного состояния таких параметров может быть несколько. Кроме этого ν выступает в ином качестве — в качестве параметра диаграммы $\sigma - \epsilon$, имеющего четкий физический смысл (является коэффициентом изменения секущего модуля, коэффициентом упругости по терминологии В.И. Мурашева [127].) Действительно, относительные деформации элемента составят

$$\epsilon = \sigma^*/E = \sigma/E\nu, \quad (1.6)$$

где $E\nu$ — секущие модули диаграммы $\epsilon - \sigma$ (эта диаграмма становится нелинейной, хотя реальная диаграмма $\epsilon - \sigma^*$ принята линейной; E — модуль упругости).

Уместно сделать еще одно замечание в связи с секущими модулями. Известно, что для материалов с нелинейными диаграммами деформирования теряет силу принцип независимости действия сил (наложения воздействий). Однако при использовании секущих модулей деформации он фактически заменяется на подобный ему принцип, который можно назвать принципом условно независимого суммирования в конечной позиции или сокращенно — принципом конечной позиции. Проиллюстрируем действие этого принципа на примере диаграммы (см. рис. 1.8, д). Пусть напряжения σ_2 в точке

2 относятся, как и сама диаграмма, к некоторому волокну конструкции и состоят из напряжений σ_1 от действия изгибающего момента M и напряжений $\sigma_2 - \sigma_1$ — от действия нормальной силы N . Конечной позицией будет точка 2 с напряжением σ_2 . Ей соответствует секущий модуль E_2 , который по модулю равен $\text{tg } \alpha_2$. Относительные деформации в точке 2 можно представить в виде

$$\epsilon_2 = E_2 \sigma_1 + E_2(\sigma_2 - \sigma_1),$$

в чем и выражается принцип суммирования в конечной позиции. Пока эта запись выглядит формальной, но этот принцип позволяет прийти к удобному традиционному виду физических соотношений в чем и заключается его значимость. Например, в случае стержня [79]

$$\epsilon_2 = MB_{11} + NB_{12},$$

где B_{11}, B_{12} — некоторые коэффициенты податливости сечения.

Диаграмма $\epsilon_i - \sigma_i$, соответствующая последовательному переходу от состояния а к б, от б к в и так далее, если нагрузка P и далее возрастает, показана на рис. 1.8, д в виде ломаной линии 0—1—1'—2—2'—3...9'—10. (Здесь 0—1 — отрезок деформирования в состоянии а,) 1—1' — отрезок перехода от сечения F_1^* в состоянии а к сечению F_2^* в состоянии б, 2''—2 — отрезок деформирования в состоянии б и так далее. Соединив точки 1, 2, 3, 10, получим некоторую непрерывную диаграмму $\epsilon - \sigma$ (пунктирная линия L).

Обратим внимание на одну важную особенность нелинейности, связанной с псевдопластическими деформациями. Разделим в диаграмме $\sigma - \epsilon$ деформации на линейные и нелинейные. Если следовать традиционной схеме разделения, то линейные деформации будут составлять σ/E , общие σ^*/E , а нелинейные будут равны их разности, т.е. составят $(\sigma^* - \sigma)/E$. Таким образом псевдопластические деформации это приращения линейных деформаций, связанные с увеличением разности $(\sigma^* - \sigma)$ между реальными и сглаженными напряжениями. Например в точке 2 диаграммы (см. рис. 1.8, д) псевдопластические деформации будут равны сумме длин двух отрезков 1—1' и 2''—2 или 2'''—2. Эта особенность псевдопластических деформаций позволяет объяснить полную или частичную обратимость этих деформаций при разгрузке (известно, что истинные пластические деформации являются необратимыми).

Рассмотрим процесс разгрузки более подробно. Возможны несколько схем разгрузки элемента с псевдопластическими деформациями. Схема 1 — по секущим линиям 1—0, 2—1'—0, 3—2'—0 (см. рис. 1.8, д), сходящимся в начале координат. Такая схема используется в дискретно статистической модели [161]. В результате полной разгрузки остаточные деформации будут равны нулю. При такой разгрузке трещины не смыкаются и сплошность не восстанавливается.

Схема 2 — разгрузка с постепенным восстановлением сплошности

ти, вследствие постепенного зажатия трещин. Внутренние трещины имеют различную ширину раскрытия, поэтому логично предположить, что они закрываются постепенно в процессе разгрузки. В результате такой разгрузки на берегах трещин, которые смыкаются, возникают напряжения сжатия — зажатия (σ^{**} , см. рис. 1.8, з). Увеличению напряжений σ^{**} способствуют также различные шероховатости и выколы берегов трещин, препятствующие закрытию трещин. Полная разгрузка является условной ($\sigma = 0$ и $P = 0$, однако $\sigma^* \neq 0$ и $\sigma^{**} \neq 0$). В зависимости от тех или иных предполагаемых закономерностей изменения напряжений σ^{**} в процессе разгрузки диаграмма ее может представляться линиями вида 3—5—7, если зажатие трещин в начале разгрузки происходит без возникновения напряжений σ^{**} , или линиями вида 3—6—7, когда существенные напряжения σ^{**} возникают с самого начала разгрузки, и в среднем некоторыми прямыми вида 3—7 (3—4—7 на рис. 1.8, д). Более вероятны для этой схемы диаграммы 3—5—7 и 3—7 (3—8 — линия разгрузки упругопластического тела; нетрудно заметить, что линии 3—7 приводят к большей обратимости деформаций, чем 3—8).

Схема 3 (наиболее общая). Разгрузка сопровождается двумя процессами: нарушением сплошности сечений, особенно в начале перехода с ветви нагрузки на ветвь разгрузки, и процессом зажатия трещин, который наиболее интенсивно протекает в конце полной разгрузки при $\sigma \rightarrow 0$. Графики такой разгрузки изображаются линиями типа 3—6—7 (см. рис. 1.8, д). Такие линии обычно свойственны однократным и многократным циклам разгрузки — нагрузки. Заметим, что схема 3 реализуется и на ниспадающем участке диаграммы (10—12—13, см. рис. 1.8, д), однако при этом процессе нарушения сплошности сечений (в виде линий 11—12) преобладает над процессом зажатия (в виде линий 10—11).

Теперь установим зависимость между напряжениями σ и σ^* . Условие равновесия напряжений, приложенных к граням элемента на рис. 1.8, з, при разгрузке записывается

$$\sigma F - \sigma^* F^* + \sigma^{**}(F - F^*) = 0, \quad (1.7)$$

где σ^{**} — некоторые усредненные по площади ($F - F^*$) напряжения зажатия; они могут быть только сжимающими, поэтому приняты за положительные.

Учитывая, что $F^*/F = \nu$, уравнение (1.7) удобно преобразовать к виду

$$\sigma - \sigma^* \nu + \sigma^{**}(1 - \nu) = 0. \quad (1.8)$$

Рассмотрим решение (1.8) при некоторых дополнительных предположениях, приняв, что: сплошность сечений при разгрузках не изменяется, т.е. $\nu = \nu_3$, где ν_3 — значение ν в точке начала разгрузки 3; напряжения σ изменяются по линейному закону соответственно от значений $\sigma^{**} = \sigma_3^{**} = 0$ в точке начала разгрузки 3 до некоторых значений σ_7^{**} , в точке 7, соответствующей концу отрезка разгрузки (см. рис. 1.8, д). Значение σ_7^{**} находим из (1.8), полагая $\sigma = 0$; $\nu = \nu_3$, $\sigma^* = \sigma_7^* = \epsilon_7 E$, где ϵ_7 остаточные деформации, соответствующие точке 7.

$$\sigma^{**} = \frac{\epsilon_7 E \nu_3}{(1 - \nu)}. \quad (1.9)$$

Линейная функция изменения напряжений σ^{**} с учетом принятых предпосылок записывается

$$\sigma^{**} = [\epsilon_7 E (\sigma_3 - \sigma) \nu_3] / [\sigma_3 (1 - \nu_3)], \quad (1.10)$$

где σ_3 — значение напряжений σ в точке начала разгрузки 3.

Внося (1.10) в (1.8), придем к линейной связи между напряжениями σ и σ^*

$$\sigma^* = \sigma \left(\frac{1}{\nu_3} - \frac{E \epsilon_7}{\sigma_3} \right) + E \epsilon_7, \quad (1.11)$$

а отсюда к линейной зависимости между деформациями ϵ и напряжениями σ , поскольку $\sigma^* = \epsilon E$. Диаграммы такой разгрузки представляются линиями вида 3—7.

Естественно, вводя в (1.8) иные зависимости изменения ν и σ^{**} , можно прийти к тем или иным видам криволинейных диаграмм (3—6—7 или 3—5—7). Обозначим

$$\frac{1}{\nu^*} = \left(\frac{1}{\nu_3} - \frac{E \epsilon_7}{\sigma_3} \right). \quad (1.12)$$

Поскольку величина ν^* на отрезке разгрузки 3—7 являются константой, то приращения напряжений $\Delta \sigma^*$ будут связываться согласно (1.10) с приращениями $\Delta \sigma$, например, $\Delta \sigma^* = \sigma^* - \sigma_3^*$; с $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_3$, соотношением

$$\Delta \sigma^* = \Delta \sigma / \nu^*. \quad (1.13)$$

Эффекты в бетоне типа эффекта Баушингера. Как известно, этот эффект наблюдается в металлах и состоит в том, что пластическая деформация одного знака уменьшает напряжения, при которых такая же деформация достигается в последующем после разгрузки и нагружении напряжениями другого знака. Объясняют этот эффект тем, что в зернах металла остаются напряжения, содействующие деформациям противоположного знака. Рассмотренная на рис. 1.8, з схема остаточных напряжений в структуре бетона после разгрузки показывает, что аналогичные эффекты могут наблюдаться и в бетоне, хотя и не всегда следуют указанной простой схеме [86, 114, 143].

Дилатация (дилатансия). Рассмотрим еще одно понятие, связанное с внутренним трещинообразованием. С дилатацией связывают возрастание объема образцов, вследствие деформации при некоторых видах напряженных состояний, которые в изотропных материалах такое увеличение не должны вызывать. Например, говорят об увеличении объемных деформаций при чистом сдвиге некоторых грунтов, объясняя это шероховатостью поверхностей скольжения в виде той, что показана на рис. 1.7, в. В бетонных элементах дилатацию связывают с возрастанием объема образцов, подвергаемых одноосному или многоосному сжатию, в стадиях, близких к разрушению. Об изменении объема судят по объемным деформациям ($\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$, где ϵ_i ($i = x, y, z$) — относительные деформации; значение θ — инвариантно относительно преобразования координат). В начале

нагружения, как и положено, при сжатии объем уменьшается (Θ — является отрицательной), затем уменьшение объема затормаживается и приходит в состояние $\Theta = 0$, а в стадии, близкой к разрушению, начинается интенсивный рост объема, при этом Θ становится положительной и возрастает.

Замедление роста объема сопровождается накоплением в структуре бетона микротрещин и повреждений (со смешанными механизмами, см. рис. 1.7, ∂ — ε), которые особенно интенсивно начинают накапливаться после точки $\Theta = 0$. Точка Θ по О.Я. Бергу [15] называется верхней параметрической точкой. По напряжениям в этой точке в некоторых случаях судят о некотором безопасном уровне напряжений и долговечности.

Рост объемных деформаций при центральной сжатии связан со значительным увеличением поперечных деформаций. Если в начале коэффициент поперечной деформации $\mu^0 = 0,15 - 0,2$, то затем он возрастает до 0,5 и может превысить эту величину. Этим характер деформаций при сжатии существенно отличается от характера деформаций при растяжении. Как уже указывалось, при растяжении этот коэффициент остается без изменения и даже может несколько снижаться.

На эффект дилатации в бетоне обращали внимание А.А. Гвоздев [31], О.Я. Берг [15], Г.А. Гениев [40], который, видимо, первым начал его учитывать в предложенной им модели бетона. В настоящее время этот эффект учитывается практически во всех моделях. Заметим, что наиболее естественным образом этот эффект учитывается в ортотропной модели бетона, вследствие изменения коэффициентов матрицы податливости бетона [77].

Влияние внутренних трещин на деформации ползучести бетона. Пусть вид нарушения сплошности сечений, представленный на рис. 1.8, a — z , реализуется во времени. Выделим две схемы нарушения сплошности сечений во времени, назвав первую из них согласованной, а вторую несогласованной.

Согласованная схема. Изменение сглаженных σ и действительных σ^* напряжений во времени согласовывается между собой по схемам, приведенным на рис. 1.9, a , b . Начнем рассмотрение с простейшего случая — простой ползучести (рис. 1.9, a). Пусть образец-призма в возрасте τ сут после изготовления сначала нагружается в некоторое короткое время до напряжений $\sigma(t)$, например до напряжений в точке 3 на рис. 1.8, ∂ , а затем выдерживается под достигнутым постоянным напряжением σ длительное время (t , сут). Схематически такой режим нагружения изображается сплошными линиями $1'$, 1 (здесь, как и принято в теории ползучести, σ обозначается $\sigma(\tau)$, а начальный участок нагружения представляется схематически вертикальным отрезком $1'$).

Выше указывалось, что σ — сглаженные напряжения. В процессе кратковременного нагружения происходит нарушение сплош-

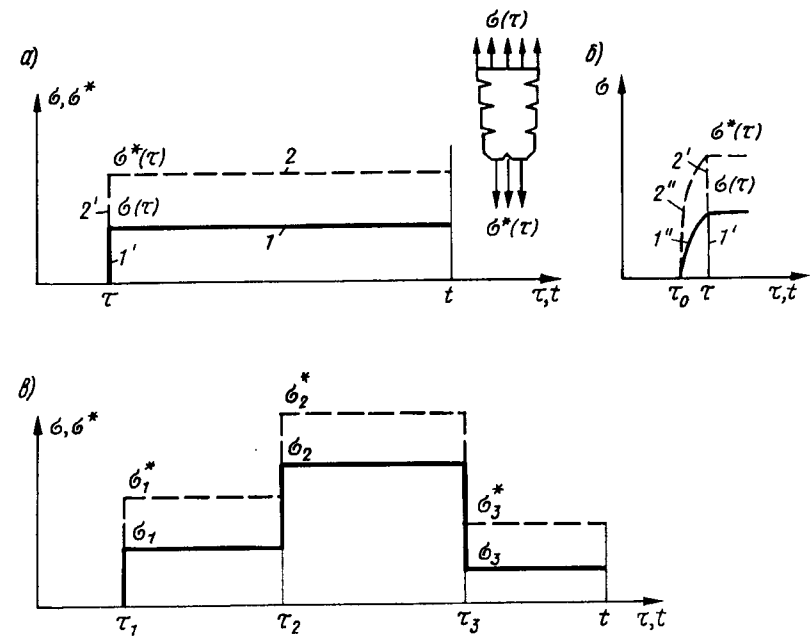


Рис. 1.9. Изменение напряжений σ^* при согласованной схеме изменения сплошности сечений во времени

ности сечений и изменение реальных напряжений σ^* по линии 2'; $\sigma^*(\tau)$ — реальные напряжения, которые соответствуют сглаженным $\sigma(\tau)$. При простой ползучести напряжения $\sigma(\tau)$ во времени не изменяются; в согласованной схеме не изменяются и напряжения $\sigma^*(\tau)$ — пунктирная линия 2. Заметим (см. рис. 1.9, b), что реальные линии кратковременного нагружения напряжениями σ и ($1''$ и $2''$) отличаются от схематических ($1'$ и $2'$); τ — фактически время, при котором напряжения достигают значений $\sigma(\tau)$ и $\sigma^*(\tau)$.

Время кратковременного нагружения составляет $\tau - \tau_0$ где τ_0 — время начала нагружения. На это указываем в связи с тем, что $\sigma^*(\tau)$ может зависеть не только от $\sigma(\tau)$, но и времени $\tau - \tau_0$, что позволяет несколько расширить возможности согласованной схемы, хотя и является некоторым от нее отступлением. Если говорить о возрасте бетона в момент нагружения или догрузки, то различий между τ_0 и τ можно не делать, поскольку они ничтожны.

По аналогии с (1.5) связь между $\sigma^*(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ представляется в виде

$$\sigma^*(\tau) = \sigma(\tau) \frac{F}{F^*(\tau)} = \sigma(\tau) \nu(\tau), \quad (1.14)$$

где $\nu(\tau) = F^*(\tau)/F$, $F^*(\tau)$ — площадь сплошной части сечения в момент времени τ .

Практически в случае согласований схемы $\nu(\tau)$ можно определить как коэффициент изменения секущего модуля диаграммы типа 1.8, ∂ , построенный для бетона в возрасте τ . Он зависит, естественно, не только от возраста τ , но и от напряжения $\sigma(\tau)$, достигнутого к концу кратковременной нагрузки, поэтому подразумевается, что

$$\nu(\tau) = \nu[\tau, \sigma(\tau)] \quad \nu(\tau) = \nu[\tau, \eta(\tau)], \quad (1.15)$$

Здесь $\eta(\tau)$ — уровень напряжения ($\eta(\tau) = \sigma(\tau) / R(\tau)$, где $R(\tau)$ — некоторая кривая изменения прочности во времени).

Вводим еще одну предпосылку, полагая, что деформации ползучести бетона под действием действительных напряжений $\sigma^*(\tau)$ следуют линейной наследственной теории старения Г.Н. Маслова — Н.Х. Арутюняна [4, 118], хотя в принципе можно использовать и нелинейный вариант. Особенности этой теории в первую очередь отражаются на конструировании меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ и записи меры $\delta(t, \tau)$ полных деформаций,

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (1.16)$$

где $E(\tau)$ — начальный модуль деформации бетона в возрасте τ .

Конструкции мер ползучести $C(t, \tau)$ представлены в работах [1, 4, 18, 120, 121, 140, 141, 165 и др.].

В силу принятых предпосылок общие деформации $\epsilon(t)$ и деформации ползучести $\epsilon'(t)$ образца, нагруженного напряжениями $\sigma^*(\tau)$ по схеме рис. 1.9, а (пунктирные линии 2', 2), в момент времени t составят

$$\epsilon(t) = \sigma^*(\tau) \delta(t, \tau); \quad \epsilon'(t) = \sigma^*(\tau) C(t, \tau). \quad (1.17)$$

Внося значение $\sigma^*(\tau)$ из (1.14) в (1.15), находим

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(\tau)}{\nu(\tau)} \delta(t, \tau); \quad \epsilon'(t) = \frac{\sigma(\tau)}{\nu(\tau)} C(t, \tau). \quad (1.18)$$

Как известно, для определения деформаций ползучести бетона при сложных режимах изменения напряжений во времени, современные линейные теории ползучести используют принцип наложения воздействий. Этот принцип в редакции И.Е. Прокоповича [144] сформулирован так: полная деформация при переменных напряжениях равна сумме полных деформаций, вызванных соответствующими приращениями. Причем значение полной деформации от данного приращения напряжений прямо пропорционально значению этого приращения и зависит от длительного действия этого приращения, но не зависит от значений и длительности действия других приращений напряжений. Полагаем, что этот принцип действует относительно приращений действительных напряжений $\sigma^*(\tau)$. Пусть, например (см. рис. 1.9, в), в моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 к образцу приклады-

ваются соответственно ступени напряжений $\sigma_1^*, (\sigma_2^* - \sigma_1^*), (\sigma_3^* - \sigma_2^*)$, тогда общая деформация к моменту $t > \tau_3$ составит

$$\epsilon(t) = \sigma_1^* \delta(t, \tau_1) + (\sigma_2^* - \sigma_1^*) \delta(t, \tau_2) + (\sigma_3^* - \sigma_2^*) \delta(t, \tau_3) \quad (1.19)$$

[здесь $\delta(\tau_1), \delta(\tau_2), \dots$ обозначается $\delta_1, \delta_2, \dots$]

Относительно напряжений σ это выражение на основании (1.14) и (1.12) преобразовывается к виду

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_1}{\nu(\tau_1)} \delta(t, \tau_1) + \left(\frac{\sigma_2}{\nu(\tau_2)} - \frac{\sigma_1}{\nu(\tau_1)} \right) \delta(t, \tau_2) + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\nu^*(\tau_3)} \delta(t, \tau_3). \quad (1.20)$$

Два первых слагаемых (1.20) относятся к ступеням возрастающих напряжений (нагрузке), они получаются из (1.19) путем подстановки (1.14). Третье слагаемое относится к разгрузке, здесь вместо $\nu(\tau)$ согласно (1.12), (1.13) вводится параметр $\nu^* = \nu^*(\tau_3)$. Таким образом деформации ползучести при нагрузке и разгрузке протекают по-разному. Сопоставляя (1.19) с (1.20), можно еще заметить, что применительно к сглаженным напряжениям $\sigma(\tau)$, точнее к их приращениям, принцип наложения воздействий претерпевает существенные изменения.

Интегральные уравнения наследственной теории старения относительно напряжений $\sigma^*(\tau)$ записываются без изменения, например в виде уравнений (73), (74) из книги [140]. Относительно неубывающих во времени напряжений $\sigma^*(\tau)$ эти уравнения на основании подстановки (1.14) преобразовываются к виду

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1)}{\nu(\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t \frac{d}{\tau_1} \left(\frac{\sigma(\tau)}{\nu(\tau)} \right) \delta(t, \tau) d\tau \quad (1.21)$$

$$\text{или} \quad \epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t) \nu(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma(\tau)}{\nu(\tau)} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.22)$$

Эти уравнения являются нелинейными относительно $\sigma(\tau)$, поскольку под $\nu(\tau)$ подразумеваются выражения (1.15). Видно, что в случае согласованной схемы уравнения (1.21), (1.22) можно отнести к частному типу уравнений современной нелинейной теории ползучести бетона, поскольку в них фактически фигурируют одинаковые функции нелинейности кратковременных (мгновенных — по терминологии теории ползучести) деформаций и деформаций ползучести, которые, однако, меняются со временем. Если изменение функций нелинейности не связывать со временем, а полагать $\nu(\tau) = \nu$, причем может быть вынесен за знак интеграла, то можно прийти к предложению [145] (здесь такая схема возможна только на ступенях разгрузки при линейной диаграмме разгрузки по линиям типа 5—7, см. рис. 1.8, ∂).

Нелинейные диаграммы мгновенных деформаций введены в уравнения ползучести в [26] вне связи с рассмотренной схемой

нарушения сплошности сечений. На фактор развития внутренних трещин во времени и влияние этого фактора на нелинейные деформации обратил внимание О.Я. Берг [14]. Экспериментальное подтверждение нелинейности деформаций ползучести можно встретить в работах [2, 32, 93 и др.]. Фактор нелинейности учитывается в различных построениях моделей ползучести [5, 27, 28, 30, 35, 144, 149 и др.].

В этих построениях дискуссии ведутся вокруг ряда кардинальных вопросов: применимости принципа наложения воздействий к определению нелинейных деформаций ползучести, модификации этого принципа, конструирования специальных мер нелинейной ползучести, обратимости нелинейных деформаций ползучести. Все это указывает на сложность влияния фактора трещиноватости бетона на ползучесть, который, конечно, выходит за рамки представленной на рис. 1.9, а, б упрощенной схемы. Эта схема представляет скорее методический интерес из-за своей наглядности, поскольку другие схемы обычно такой наглядности лишены. Качественно новые свойства и возможности приобретают уравнения (1.21), (1.22) для несогласованной схемы нарушения сплошности сечений.

Несогласованная схема. Примеры такой схемы показаны на рис. 1.10, а, б (здесь режимы изменения сглаженных напряжений $\mathcal{B}(\tau)$, которые показаны сплошными линиями, и режимы изменения действительных напряжений $\mathcal{B}^*(\tau)$ — пунктирные линии, не согласуются между собой). Рассогласование связано с эффектом подрастания внутренних трещин во времени.

Особенности такой схемы удобно рассмотреть на примере одноступенчатого режима нагружения напряжениями $\mathcal{B}(\tau_i) = \mathcal{B} = \text{const}$ (рис. 1.10, а). Напряжения $\mathcal{B}^*(\tau)$ не следуют этому простому режиму. Допустим, что график изменения $\mathcal{B}^*(\tau)$ известен (см. пунктирную линию на рис. 1.10, а). Заменим этот график некоторым ступенчатым, тогда деформации во времени будут определяться по формуле типа (1.19).

$$\varepsilon(t) = \sigma_i^* \delta(t, \tau_i) + \sum_{i=2}^n (\sigma_i^* - \sigma_{i-1}^*) \delta(t, \tau_i). \quad (1.23)$$

Чтобы перейти к записи уравнения (1.23) относительно сглаженных напряжений $\mathcal{B}(\tau)$, следует использовать подстановку (1.14). Здесь по-прежнему $\nu(\tau) = F^*(\tau)/F$, однако определение $\nu(\tau)$ как секущего коэффициента диаграммы $\mathcal{B}(\tau) - \varepsilon(\tau)$ сохраняется лишь для начальной ступени \mathcal{B}_i^* при $\nu(\tau) = \nu(\tau_i)$. В результате, учитывая еще, что $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B} = \text{const}$, уравнение (1.23) записывается

$$\varepsilon(\tau) = \sigma \left[\frac{\delta(t, \tau_1)}{\nu(\tau_1)} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\nu(\tau_i)} - \frac{1}{\nu(\tau_{i-1})} \right) \delta(t, \tau_i) \right]. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) может быть положено в основу методики определения дискретных значений $\nu(\tau_i)$ из экспериментов, а затем построения функций нарушения сплошности во времени для различных уровней \mathcal{B} . Таким образом в несогласованных режимах парамет-

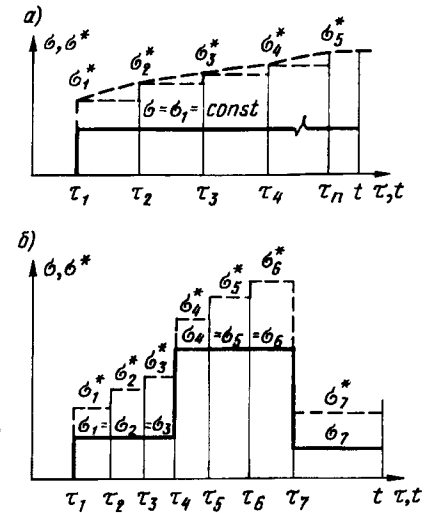


Рис. 1.10. Изменение напряжений σ^* при несогласованной схеме изменения сплошности сечений во времени

ры $\nu(\tau)$ будут зависеть от уровней и длительности действующих к моменту τ напряжений, условно

$$\nu(\tau) = \nu[(\tau - \tau_1), \sigma(\tau - \tau_1)] \quad \text{или} \quad \nu(\tau) = \nu[(\tau - \tau_1), \eta(\tau - \tau_1)], \quad (1.25)$$

хотя конкретные выражения еще необходимо установить.

При такой трактовке $\nu(\tau)$ интегральная форма записи уравнения ползучести в виде (1.21) или (1.22) в принципе не изменяется. Так, соотношение (1.24) при $n \rightarrow \infty$ можно представить интегралом вида

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[\frac{\delta(t, \tau_1)}{\nu(\tau_1)} + \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\nu(\tau)} \right) \delta(t, \tau) d\tau \right].$$

Этот интеграл также следует из (1.21), если принять $\mathcal{B}(\tau) = (\text{const})$ и представить $\nu(\tau)$ в виде (1.25).

Аналогично можно рассмотреть и более сложные режимы изменения напряжений, показанные на рис. 1.10, б. Общая запись (1.23) здесь сохраняется, меняются лишь значения $\mathcal{B}(\tau_i)$ в связях $\mathcal{B}^*(\tau_i) = \mathcal{B}(\tau_i)/\nu(\tau_i)$ для различных участков при переходе к записи типа (1.24).

В заключение этого рассмотрения укажем на возможность иного подхода к конструированию уравнений для тела с двумя видами напряжений — \mathcal{B} и \mathcal{B}^* . Выше расчетными приняты напряжения \mathcal{B} , для которых справедливы традиционные уравнения равновесия и граничные условия. Меняются лишь физические соотношения при переходе от \mathcal{B}^* к \mathcal{B} . Однако можно поступить наоборот — менять уравнения равновесия и граничные условия, записывая их относительно \mathcal{B}^* на основании подстановок (1.5) или (1.14), а простые физические соотношения относительно \mathcal{B}^* оставлять без изменения.

1.3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определяющая и разрешающая система уравнений. Напряженно-деформированное состояние в каждой точке тела характеризуется в общем случае 15 компонентами, куда входят: шесть компонент тензора напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$); шесть компонент тензора относительных деформаций ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) и три перемещения (u, v, w) соответственно вдоль декартовых осей координат (x, y, z). Для их определения устанавливают: три дифференциальных уравнения равновесия напряжений, которые характеризуют изменение напряжений тела при переходе от одной точки к другой (в виде уравнений (3.04) из [13]); шесть геометрических уравнений, характеризующих связи между относительными деформациями и перемещениями (в виде уравнений (3.08), например из [13], из которых следуют шесть уравнений неразрывности деформаций (3.09)); шесть уравнений, связывающих относительные деформации и напряжения (физические соотношения для бетона рассмотрены далее).

Таким образом приходим к 15 уравнениям для определения указанных выше 15 неизвестных. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности, образующие систему из девяти уравнений, не зависят от свойств материалов, т.е. являются общими для тел из любого сплошного материала, в том числе бетона и железобетона. Специфика того или иного материала отражается в физических соотношениях, которые для бетона и железобетона имеют много новых свойств.

Чтобы указанная выше система 15-ти уравнений имела не тривиальное (не нулевое) решение, к ней еще необходимо добавить граничные условия (в напряжениях или перемещениях; статические, кинематические или смешанные). Таким образом приходят к так называемой системе определяющих уравнений механики сплошной среды.

Определяющая система уравнений механики представляется громоздкой и неудобной для решения, поэтому ее предварительно сводят к некоторой меньшей по размерности системе дифференцированных уравнений более высоких порядков (с более высокими порядками частных производных). Такая система называется разрешающей. Она может быть записана относительно напряжений через функцию напряжений, в перемещениях или в некотором смешанном виде. Однако и решение разрешающей системы дифференцированных уравнений представляет собой довольно сложную задачу, поэтому в последнее время используют различные численные методы сведения дифференциальных уравнений к алгебраическим.

Среди таких численных методов следует отметить метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностный (ВМР). Наибольшую популярность в последнее

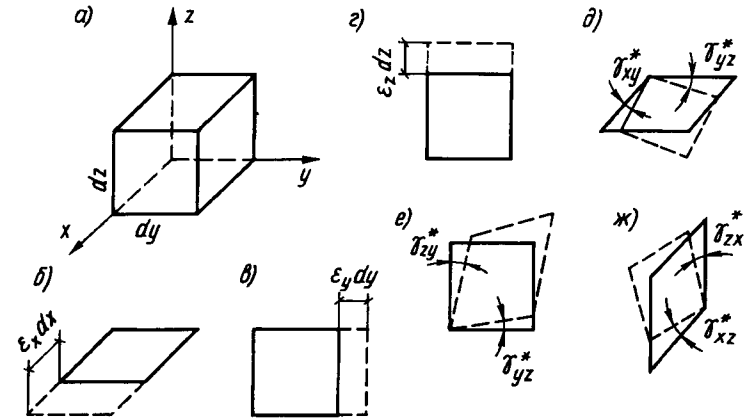


Рис. 1.11. Компоненты тензора относительных деформаций

время приобрел МКЭ, как наиболее универсальный. Коэффициенты матрицы жесткости физических соотношений бетона и железобетона обычно представляются, в свою очередь, функциями напряжений или относительных деформаций, а в более общем (для железобетона) — некоторыми неаналитическими операторами. В связи с этим численные методы являются основными при расчете различных бетонных и железобетонных конструкций.

Девять и шесть компонент тензора относительных деформаций. Общую малую деформацию бесконечно малого параллелепипеда (рис. 1.11, а) удобно представлять в виде ряда простейших деформаций (рис. 1.11, б — ж): трех относительных удлинений его ребер $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и шести угловых деформаций (сдвигов) $\gamma_{xy}^*, \gamma_{yx}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zy}^*, \gamma_{zx}^*, \gamma_{xz}^*$, которые искажают прямые углы между ребрами параллелепипеда. Обобщенно эти деформации составляют девятикомпонентный вектор-столбец.

$$\{\epsilon^*\}_x = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yx}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zy}^*, \gamma_{zx}^*, \gamma_{xz}^*\}^T. \quad (1.33)$$

Относительные деформации преобразуются при повороте осей координат как компоненты несимметричного тензора второго ранга. Несимметричность тензора относительно главной диагонали наглядно проявляется, если его представить в виде

$$T_{\epsilon}^* = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}^* & \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yx}^* & \epsilon_y & \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx}^* & \gamma_{zy}^* & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Тензор несимметричен, потому что $\gamma_{ij}^* \neq \gamma_{ji}^*$ ($i, j = x, y, z$). По причинам, которые будут указаны ниже, использование несимметричного тензора связано с существенными осложнениями. Поэтому в

расчет вводят половинные значения общих ($\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*$) деформаций сдвига

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \gamma_{xy} &= -\frac{1}{2} \gamma_{yx} = -\frac{1}{2} (\gamma_{xy}^* + \gamma_{yx}^*); \\ -\frac{1}{2} \gamma_{yz} &= -\frac{1}{2} \gamma_{zy} = -\frac{1}{2} (\gamma_{yz}^* + \gamma_{zy}^*); \\ -\frac{1}{2} \gamma_{xz} &= -\frac{1}{2} \gamma_{zx} = -\frac{1}{2} (\gamma_{xz}^* + \gamma_{zx}^*) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Компоненты деформаций с усредненными углами сдвига образуют шестикомпонентный вектор-столбец

$$\{\epsilon\}_x = \left\{ \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, -\frac{1}{2} \gamma_{xy}, -\frac{1}{2} \gamma_{yz}, -\frac{1}{2} \gamma_{zx} \right\}^T. \quad (1.35)$$

Тензор такой деформации представляют так:

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & -\frac{1}{2} \gamma_{xy} & -\frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ & \epsilon_y & -\frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ & & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{симметрично} \\ \end{matrix}$$

Заметим, что в случае линейно-упругих изотропных материалов, видимо, $\gamma_{ij}^* = \gamma_{ji}^*$, поэтому условия (1.34) удовлетворяются автоматически. В случае анизотропных материалов, а также в случае упругопластических изотропных материалов условия (1.34) выступают уже как дополнительные условия осреднения. Выполнение неравенства $\gamma_{ij}^* \neq \gamma_{ji}^*$ можно наглядно представить на примере сдвига колоды игральные карт.

Компоненты поворота. На рис. 1.12, а, б представлены схемы, на основании которых устанавливают связи между малыми относительными деформациями и перемещениями точек тела, точнее производными от перемещений. Вывод этот можно встретить в любом курсе теории упругости, например в 3.87 книги [13], поэтому мы остановимся только на одном факторе, который связан с несимметричным тензором относительной деформации. Пусть бесконечно малый параллелепипед, выделенный у заданной точки M сплошного тела с ребрами, параллельными осям координат x, y, z в процессе деформации тела сам продеформируется и переместится в положение M' (рис. 1.12, а — деформированное состояние тела и элемента показано точечными линиями, u, v, w — перемещения точки M).

На рис. 1.12, б показано положение проекции стороны $MKNL$ этого элемента на координатную плоскость zoy до ($MKNL$) и после ($M'K''N''L'$) деформации тела.

Переход из недеформированного $MKNL$ в деформированное

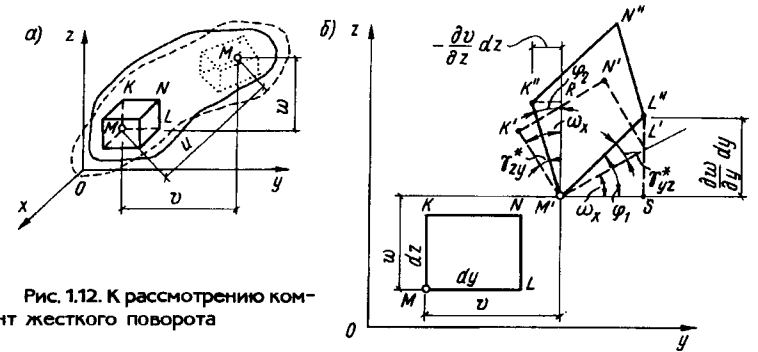


Рис. 1.12. К рассмотрению компонент жесткого поворота

состояние $M'K''N''L'$ можно условно представить в виде следующих этапов: перемещения v и w элемента $MKNL$ в состояние с точкой M' как жесткого целого и его жесткий поворот ω_x вокруг оси x , нормальной к плоскости yoz , в результате чего тело займет положение $M'K'N'L'$; собственные деформации параллелепипеда, включая сдвиги γ_{yz}^* и γ_{zy}^* и относительные удлинения сторон. Общие повороты граней $M'L''$ и $M'K''$ в деформированном состоянии вокруг оси x соответственно составят φ_1 и φ_2 , где

$$\varphi_1 = \omega_x + \gamma_{yz}^*; \quad \varphi_2 = \omega_x - \gamma_{zy}^*. \quad (1.36)$$

Согласно рис. 1.12, б

$$L''S = \frac{\partial w}{\partial y} dy = M'L'' \sin \varphi_1 \approx dy (1 + \epsilon_y) \varphi_1 \approx dy \varphi_1;$$

$$K''R = -\frac{\partial v}{\partial z} dz \approx dz \varphi_2,$$

$$\text{откуда } \varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \varphi_2 = -\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Внося значения φ_1 и φ_2 в (1.36), находим:

$$\gamma_{yz}^* = \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_x; \quad \gamma_{zy}^* = \frac{\partial v}{\partial z} + \omega_x. \quad (1.37)$$

Аналогичным образом можно определить:

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_x; \quad \gamma_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_x; \quad (1.38)$$

$$\gamma_{zx}^* = \frac{\partial u}{\partial z} - \omega_y; \quad \gamma_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y,$$

где ω_x, ω_y — повороты элемента вокруг осей z и y .

Суммируя попарно зависимости (1.37), (1.38), находим

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}^* + \gamma_{zy}^* &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{xy}^* + \gamma_{yx}^* = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{zx}^* + \gamma_{xz}^* &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Таким образом, в общих углах сдвига (1.39) повороты $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ исключаются, что и обуславливает необходимость осреднения (1.34).

В зависимости от введения или невведения в расчет углов ω_i ($i = x, y, z$) различают два варианта теории упругости: безмоментный (ω_i не фигурируют) и моментный (с введением ω_i). Обычно моменты связываются с производными от ω_i по координатам (в варианте моментной теории Миндлина). Аналогия такой связи прослеживается следующим образом. Рассматривая случай одноосного напряженного состояния, например из (1.37), можно прийти к гипотезе плоских сечений (при этом $\gamma_{yz}^* = \gamma_{zy}^* = 0$) и к кривизне балки, если взять производную $d\omega_i/dz$, где z — координата, направленная вдоль оси балки. Кривизна же, как известно, непосредственно связана с моментом.

Моментная теория была предложена братьями Коссера. Одно время она интенсивно развивалась в работах советских и зарубежных исследователей, а затем интерес к ней упал. Причина состояла в том, что полученные уточнения решений классической безмоментной теории оказались малыми, в основном значимые результаты получались только для мест концентрации напряжений. В материалах с неоднородной структурой моментный фактор может быть более значимым. Здесь же к зависимостям (1.38), (1.39) возвратимся в связи с тем, что для железобетона с трещинами физические соотношения устанавливаются относительно углов сдвига γ_{ij}^* .

Свойства симметричного тензора напряжений в точке сплошного тела [13, 31, 135 и др.]. Как уже указывалось в п. 1.2, напряженное состояние элемента в ортогональных осях x, y, z характеризуется девятью компонентами тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$, которые в случае парности касательных напряжений преобразуются к шести компонентам $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ (см. рис. 1.2, г).

При использовании тензорной символики координаты x, y, z обозначают x_1, x_2, x_3 , где индекс i принимает значения 1, 2, 3. При этом нормальные напряжения обозначают $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, а касательные $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$. Общий компонент записывают σ_{ij} ($ij = 1, 2, 3$). Отдельные компоненты получают из общего заменой букв i, j цифрами 1, 2, 3 (или x, y, z — при переходе к нетензорной символике). Симметрия выражается соотношениями $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i \neq j$).

Основными в представленном ниже рассмотрении являются соотношения симметричного (шестикомпонентного) тензора напряжений, которые приведем без вывода. Соотношения, относящиеся к несимметричному тензору, будут специально оговариваться.

Можно выбрать такую ориентацию граней бесконечно малого параллелепипеда у заданной точки, что на этих гранях касательные напряжения будут обращены в нуль (см. рис. 1.2, д, оси 1, 2, 3 или n, m, l). Нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на таких площадках называют главными. Заметим, что в случае несимметричного тензора

главными являются площадки, на которых обращаются в нуль суммы $\sigma_{ij} + \sigma_{ji}$ ($i \neq j$).

Существует три соотношения между компонентами тензора напряжений, которые приводят к одним и тем же результатам независимо от поворота системы координат. Их называют инвариантами тензора напряжений (независимыми от поворота координат) и обозначают I_1, I_2, I_3

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad (1.40)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1;$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Тензор напряжений зачастую представляют в виде двух составляющих: шарового тензора и девиатора. По физическому смыслу шаровой тензор должен обуславливать изменение объема тела при его нагружении, а девиатор — изменение формы. Шаровой тензор характеризуется одним инвариантом σ_0 (средним напряжением в точке), а девиатор — вторым D_2 и третьим D_3 инвариантами девиатора напряжений (первый инвариант девиатора равен нулю):

$$D_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (1.41)$$

$$D_3 = (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) - (\sigma_x - \sigma_0)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_0)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_0)\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0).$$

Далее будут рассмотрены и некоторые другие инварианты. Встает вопрос, сколько всего существует независимых инвариантов? Методами тензорной алгебры доказывают, что независимых алгебраических инвариантов — три в качестве которых могут быть выбраны инварианты I_1, I_2, I_3 или I_1, D_2, D_3 . Обычно в той или иной модификации предпочитают последнюю тройку инвариантов.

Особый интерес представляют напряжения на так называемых октаэдрических площадках, равнонаклоненных к направлениям трех главных напряжений. Нормальное октаэдрическое напряжение σ_0 на этой площадке равно среднему напряжению

$$\sigma_0 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -\frac{1}{3}I_1, \quad (1.42)$$

а полное касательное напряжение — октаэдрическое касательное напряжение составляет

$$\tau_0 = -\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{-\frac{2}{3}D_2} \quad (1.43)$$

В теории пластичности широко используется понятие интенсивности касательных напряжений τ_i и интенсивности нормальных напряжений σ_i , которые формально равны

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_0 = \sqrt{D_2}; \\ \sigma_i &= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_0 = \sqrt{3 D_2}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Пусть главные напряжения расположены в последовательности $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, тогда на площадке, наклоненной под углом 45° к площадкам приложения напряжений σ_1 и σ_3 действуют максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = (1/2) (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (1.45)$$

Наряду с инвариантами σ_0 и τ_0 при конструировании критериев прочности бетона важную роль играет параметр Лоде—Надаи по напряжениям

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (1.46)$$

где также $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Инвариант Лоде—Надаи имеет важную особенность — он изменяется от +1 до -1 ($1 \geq \mu_\sigma \geq -1$). Используя параметр μ_σ можно установить ряд интересных зависимостей [135]:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2} (3 + \mu_\sigma^2)} \tau_0; \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} (3 + \mu_\sigma^2)} \tau_0; \\ \sigma_2 &= \sigma_0 + \frac{\sqrt{2} \mu_\sigma}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_0; \\ \sigma_3 &= \sigma_0 - \frac{3 + \mu_\sigma}{\sqrt{2} (3 + \mu_\sigma^2)} \tau_0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Вывод зависимостей (1.48) сводится к следующему. Второе соотношение (1.48) устанавливает, внося $(\sigma_1 - \sigma_3)$ из (1.45) в (1.46). Затем, рассматривая это соотношение с зависимостями (1.42) и (1.46), получают остальные соотношения (1.48) для σ_1 и σ_3 .

Полагая в (1.47) $\mu_\sigma = 1$ и $\mu_\sigma = 0$, можно получить граничные значения отношения τ_0/τ_{\max} ,

$$0,941 \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \frac{\tau_0}{\tau_{\max}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816.$$

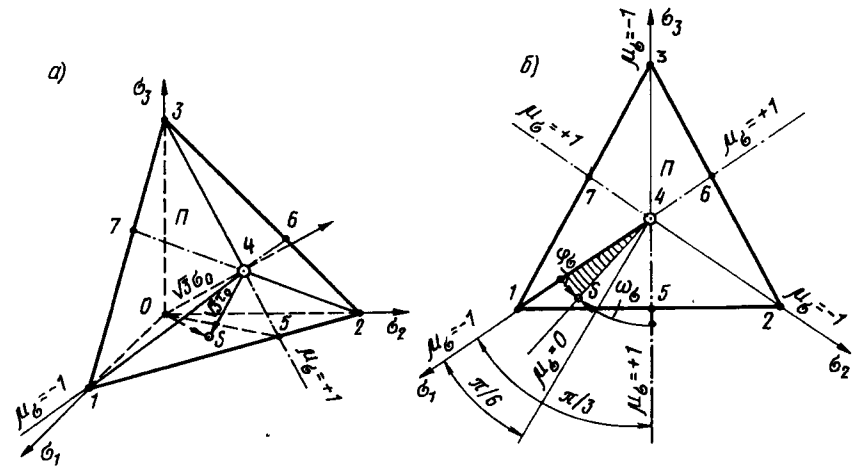


Рис. 1.13. К рассмотрению геометрических интерпретаций некоторых инвариантов

Таким образом октаэдрические касательные напряжения мало отличаются от значений максимальных касательных напряжений.

Значениям σ_0 , τ_0 и μ_σ можно дать некоторую геометрическую интерпретацию. Примем в качестве декартовых координат оси главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, тогда их можно связать с цилиндрической системой координат, которую представляют величины $\sqrt{3}\sigma_0$, $\sqrt{3}\tau_0$ и угол $\omega_\sigma = f(\mu_\sigma)$. Это показано на рис. 1.13, а, б. Построения рис. 1.13, а сводятся к следующему.

Пусть известны главные напряжения $\sigma_1^s > \sigma_2^s > \sigma_3^s$ в некоторой точке s твердого тела. Представим эту точку в декартовой системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; OS — вектор полного напряжения, а $\sigma_1^s, \sigma_2^s, \sigma_3^s$ — его проекции на координатные оси. Проведем через точки S плоскость Π , равнонаклоненную к этим осям (девиаторную плоскость). Кроме этого проведем через точку O ось, равнонаклоненную к координатам $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Эта ось пересечет Π в точке 4. Нетрудно показать, что эта ось совпадает с нормалью к девиаторной плоскости Π . Тогда вектор OS можно представить в виде двух новых составляющих 04 и $4S$ (см. рис. 1.13, а), причем длины этих векторов составят $(04) = \sqrt{3}\sigma_0$, $(4S) = \sqrt{3}\tau_0$.

Таким образом, положение точки S задается иначе: $\sqrt{3}\sigma_0$ — осевая, а $\sqrt{3}\tau_0$ — радиальная ее координаты в цилиндрической системе координат. Однако этих осей недостаточно, необходимо зафиксировать еще угол вращения вектора OS вокруг точки 4. Для этого проводим плоскости 104 ($1-4-6$ — след этой плоскости на плоскости Π), 304 ($3-4-5$ след ее на Π) и 240 (со следом $2-4-7$ на Π). Отдельно плоскость Π со следами пересечения показана на

рис. 1.13, б. Положение вектора OS можно зафиксировать углом φ_6 его наклона к следу $1-4$ или углом ω_6 — к следу $4-5$. Эти следы обладают интересными свойствами. На плоскости 104 соблюдается условие $\sigma_3 = \sigma_2$, а на плоскости 045 $\sigma_1 = \sigma_2$. Если это учесть, то из (1.46) следует, что в первом случае $\mu_\sigma = -1$, а во втором $\mu_\sigma = +1$. Таким образом, линия $1-4$ — это линия $\mu_\sigma = -1$, а линия $4-5$ — это линия $\mu_\sigma = +1$. В промежутке между ними находятся все остальные линии ($-1 < \mu_\sigma < +1$). Между углом ω_σ и μ_σ существует связь

$$\mu_\sigma = 3 \operatorname{ctg} (\omega_\sigma + \pi/3), \quad (0 < \omega_\sigma < \pi/3). \quad (1.49)$$

Можно указать и на другую интересную зависимость

$$\cos 3 \omega_\sigma = \frac{3\sqrt{3} D_3}{2\sqrt{D_2^3}}. \quad (1.50)$$

Сопоставляя (1.49), (1.50), видим, что μ_σ отражает в простой форме влияние третьего (и, естественно, второго) инвариантов девиатора напряжений.

Границы изменения ω_σ , указанные в (1.49), следует пояснить. Рассмотренными выше следами пересечения угол 2π при вершине H (центре тяжести равностороннего треугольника 1 2 3) делится на шесть равных углов, которые составляют $\pi/3$.

Все точки с напряженными состояниями $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ помещаются в секторе типа 145. Можно представить другие комбинации напряжений, например $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$, всего их будет шесть. Точки с такими комбинациями будут помещаться на параллельных 1 2 3 плоскостях в шести других секторах.

Можно указать еще на интересную связь ω_σ с интенсивностью касательных напряжений τ_i , которая используется в теории пластичности [31]:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_i \cos \left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_i \cos \left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_i \cos \omega_\sigma$$

Определение направляющих косинусов главных площадок.

Направление каждого главного напряжения σ_e ($e = 1, 2, 3$) фиксируется тремя направляющими косинусами l_{ei} ($i = x, y, z$ или $i = 1, 2, 3$, приняв $x = 1, y = 2, z = 3$) к декартовым координатам x, y, z , причем должно соблюдаться геометрическое условие

$$l_{e1}^2 + l_{e2}^2 + l_{e3}^2 = 1. \quad (1.51)$$

Фактически к каждой главной площадке восстанавливается

нормаль, и ее положение фиксируется тремя косинусами углов (направляющими косинусами) наклона к осям координат x, y, z . Значения направляющих косинусов находят, рассматривая условие (1.51) совместно с двумя из трех известных (см., например, 2.04—2.06 из [13]) условий равновесия малого тетраэдра, выделяемого из точки:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_e) l_{e1} + \tau_{xy} l_{e2} + \tau_{xz} l_{e3} &= 0; \\ \tau_{yx} l_{e1} + (\sigma_y - \sigma_e) l_{e2} + \tau_{yz} l_{e3} &= 0; \\ \tau_{zx} l_{e1} + \tau_{zy} l_{e2} + (\sigma_z - \sigma_e) l_{e3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Уравнения (1.52) являются однородными, кроме этого направляющие косинусы l_{e1}, l_{e2}, l_{e3} не могут быть одновременно равными нулю, поэтому определитель системы (1.52) должен обращаться в нуль

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.53)$$

Рассмотрим практический способ определения направляющих косинусов. Определим миноры (адьюнкты A_{ei}) элементов первой строки матрицы (1.53), приняв $e = 1$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_1) & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \tau_{yx} (\sigma_y - \sigma_e) \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix}$$

(здесь минус \leftrightarrow , если $e + i$ — нечетное).

Определяем

$$A_e = \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}.$$

Направляющие косинусы l_{11}, l_{12}, l_{13} , фиксирующие положение нормали к площадке приложения σ_1 , будут равны:

$$l_{11} = A_{11}/A_1; \quad l_{12} = A_{12}/A_1; \quad l_{13} = A_{13}/A_1.$$

Повторяя эту процедуру для второй строки (1.53) и полагая $e = 2$, находят l_{21}, l_{22}, l_{23} . Аналогичная процедура с третьей строкой (1.53) приводит к значениям l_{31}, l_{32}, l_{33} . В общем случае

$$l_{ei} = A_{ei}/A_e \quad \left[\text{где } A_e = \left(\sum_{i=1}^3 A_{ei}^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (1.54)$$

Необходимо принимать во внимание некоторые особенности. Если $A_e = 0$, то:

$$\text{при } \sigma_x = \sigma_e, \quad l_{e1} = 1; \quad l_{e2} = l_{e3} = 0;$$

$$\text{при } \sigma_y = \sigma_e, \quad l_{e2} = 1; \quad l_{e1} = l_{e3} = 0;$$

$$\text{при } \sigma_z = \sigma_e, \quad l_{e3} = 1; \quad l_{e1} = l_{e2} = 0.$$

Инварианты тензора относительной деформации [13, 31, 135 и др.]. Как уже указывалось, деформированное состояние объемного (трехмерного) элемента в ортогональных осях x, y, z может характеризоваться шестью компонентами деформаций: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$, которые образуют симметричный тензор относительных деформаций. Несимметричный тензор характеризуется девятью компонентами (1.33) и здесь не рассматривается.

Деформированное состояние может характеризоваться тремя главными деформациями $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Направляющие косинусы компонент главных деформаций определяются по вышеприведенным формулам, где следует лишь формально заменить \mathfrak{b} на ϵ и \mathfrak{c} на $(1/2)\gamma$.

Инварианты тензора деформаций, которые обозначаем $I_1, I_2, I_{3\epsilon}$ и инварианты девятиатора деформаций ($D_{2\epsilon}, D_{3\epsilon}$ можно также формально определять по формулам для соответствующих инвариантов тензора и девятиатора напряжений [см. формулы (1.40), (1.41), заменив \mathfrak{b} на ϵ и \mathfrak{c} на $(1/2)\gamma$].

Кроме того часто используются следующие инвариантные характеристики, их также можно получить применяя указанные замены: ϵ_0 — нормальная октаэдрическая (средняя) деформация; γ_0 — октаэдрическая деформация сдвига; μ_ϵ — параметр Лоде—Надаи по деформациям; ϵ_i — интенсивность продольных деформаций; γ_i — интенсивность деформаций сдвига.

Значения $\epsilon_0, \gamma_0, \epsilon_i, \gamma_i$ определяются зависимостями:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3);$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2} + \frac{3}{2} \quad (1.55)$$

$$(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} D_{2\epsilon};$$

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_0 = 2 \sqrt{D_{2\epsilon}};$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{D_{2\epsilon}} \quad (1.56)$$

Параметр Лоде—Надаи по деформациям

$$\mu_\epsilon = \frac{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3}; \quad (1.57)$$

Параметр Лоде—Надаи μ_ϵ связан с ω_ϵ — углом вида деформированного состояния соотношением

$$\mu_\epsilon = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\omega_\epsilon + \frac{\pi}{3} \right) \quad (1.58)$$

$$(0 \leq \omega_\epsilon \leq \pi/3).$$

Главные линейные деформации определяются: при использовании инвариантов

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + \frac{3 - \mu_\epsilon}{2\sqrt{2(3 + \mu_\epsilon^2)}} \gamma_0;$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 + \frac{\sqrt{2}\mu_\epsilon}{2\sqrt{(3 + \mu_\epsilon^2)}} \gamma_0; \quad (1.59)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_0 - \frac{3 + \mu_\epsilon}{2\sqrt{2(3 + \mu_\epsilon^2)}} \gamma_0;$$

при использовании инвариантов $\epsilon_0, \gamma_i, \omega_\epsilon$:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_i \cos \left(\omega_\epsilon - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_i \cos \left(\omega_\epsilon + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_i \cos \omega_\epsilon$$

Преобразования при повороте осей координат. Пусть заданы исходные оси координат x, y, z и некоторые новые оси x', y', z' (или n, m, l , рис. 1.14), повернутые относительно исходных. Связь двух систем координат определяется по таблице направляющих косинусов. Требуется выразить компоненты тензора напряжений в одних осях через компоненты в других. Такую процедуру называют преобразованием тензора напряжений при повороте осей координат

Таблица			
	x	y	z
$x'(n)$	$l_{11}(n_x)$	$l_{12}(n_y)$	$l_{13}(n_z)$
$y'(m)$	$l_{21}(m_x)$	$l_{22}(m_y)$	$l_{23}(m_z)$
$z'(l)$	$l_{31}(l_x)$	$l_{32}(l_y)$	$l_{33}(l_z)$
j	l_{j1}	l_{j2}	l_{j3}

Примечание. Последняя строка относится к некоторому j -направлению.

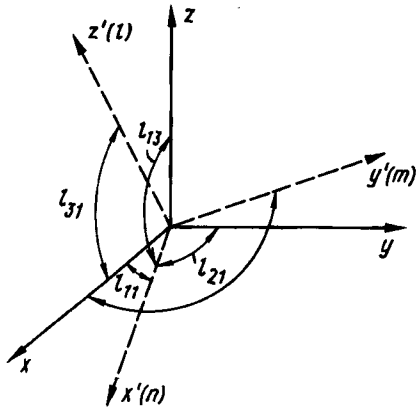


Рис. 1.14. Поворот осей координат

Примем для начала девятикомпонентный тензор напряжений, обозначив его компоненты в осях x, y, z в виде σ_{ij} ($\sigma_{11} = \sigma_x; \sigma_{22} = \sigma_y; \sigma_{33} = \sigma_z; \sigma_{12} = \tau_{xy}; \sigma_{23} = \tau_{yz}; \sigma_{31} = \tau_{zx}; \sigma_{21} = \tau_{yx}; \sigma_{32} = \tau_{zy}; \sigma_{32} = \tau_{zy}$). Компоненты тензора напряжений в повернутых осях обозначаются σ'_{ij} . Тензор σ_{ij} преобразуется в тензор σ'_{ij} по стандартным формулам преобразования

$$\sigma'_{ek} = \sigma_{ij} l_{ei} l_{kj} \quad (1.60)$$

где первый индекс при l обозначает номер новой оси ($x' = 1, y' = 2, z' = 3$), а второй — номер исходной оси координат ($x = 1, y = 2, z = 3$). В формуле (1.60) предполагается суммирование по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$. Индексы $e, k = 1, 2, 3$, стоящие в правой и левой частях формулы (1.60), являются неповторяющимися (свободными). Для примера, приняв $e, k = 1, 1; e, k = 1, 2$, из (1.60) получим

$$\sigma'_{11} = \sigma_{ij} l_{i1} l_{j1} = \sigma_{11} l_{11}^2 + \sigma_{12} l_{11} l_{12} + \sigma_{13} l_{11} l_{13} + \sigma_{21} l_{12} l_{11} + \sigma_{22} l_{12}^2 + \sigma_{23} l_{12} l_{13} + \sigma_{31} l_{13} l_{11} + \sigma_{32} l_{13} l_{12} + \sigma_{33} l_{13}^2 \quad (1.61)$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{ij} l_{i1} l_{j2} = \sigma_{11} l_{11} l_{21} + \sigma_{22} l_{12} l_{22} + \sigma_{33} l_{13} l_{23} + \sigma_{12} l_{11} l_{22} + \sigma_{23} l_{12} l_{23} + \sigma_{31} l_{13} l_{21} + \sigma_{21} l_{12} l_{21} + \sigma_{32} l_{13} l_{22} + \sigma_{13} l_{11} l_{23}$$

Обратное преобразование от осей x', y', z' к осям x, y, z осуществляется по формулам

$$\sigma_{ji} = \sigma'_{ke} l_{ki} l_{ej} \quad (1.62)$$

В этой формуле повторяющимися являются индексы $k, e = 1, 2, 3$ (по ним производят суммирование), а неповторяющимися — индексы ij . Полагая $ij = 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$, получим все девять компонент σ_{ij} .

Тензорная форма записи преобразований компонент при повороте осей координат не является единственной. В настоящее время широко используется матричная форма записи этих преобразований.

Остановимся на ней более подробно. Представим компоненты тензора напряжений в новой и исходной системе координат в виде вектор-столбцов $\{\sigma'\}_x$ и $\{\sigma\}_x$, где

$$\{\sigma^*\}_x = \{\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}, \sigma'_{12}, \sigma'_{23}, \sigma'_{31}, \sigma'_{21}, \sigma'_{32}, \sigma'_{13}\}^T \quad (1.63)$$

Здесь τ — знак транспонирования, показывающий, что вектор-столбец в действительности располагается вертикально; $\{\sigma\}_x$ записывается аналогично, только его компоненты не имеют верхних штрихов. Нижние индексы x и x' в обозначениях $\{\sigma'\}_x, \{\sigma\}_x$ указывают на принадлежность столбца к соответствующей системе координат (x — к системе x, y, z ; x' — к системе x', y', z').

Эта форма обозначений сохраняется и в последующем.

Преобразования (1.60), (1.62) можно представить в матричной форме

$$\{\sigma'\}_x = [\alpha^*] \{\sigma\}_x; \quad (1.64)$$

$$\{\sigma\}_x = [\alpha^*]^{-1} \{\sigma'\}_x = [\alpha^*]^T \{\sigma'\}_x.$$

где $[\alpha^*]$ — матрица направляющих косинусов размером 9×9 ; индекс $*$ указывает на обращение матрицы, а индекс τ — на ее транспонирование; в данном случае обе, в принципе разные процедуры над матрицами, приводят к одним результатам.

Матрица направляющих косинусов формируется на основании зависимостей типа (1.61); при этом только следует учитывать иную, принятую в (1.62), последовательность расположения компонент напряжений в вектор-столбцах. Матрицу $[\alpha^*]$ удобно формировать по правилу

$$[\alpha^*] = \begin{bmatrix} l_{11} l_{j1} & l_{12} l_{j2} & l_{13} l_{j3} & l_{11} l_{j2} & l_{12} l_{j3} & l_{13} l_{j1} & l_{12} l_{j1} & l_{13} l_{j2} & l_{11} l_{j3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

где построчно $i, j = 1, 1; 2, 2; 3, 3; 1, 2; 2, 3; 3, 1; 2, 1; 3, 2; 1, 3$ (для первой строки $i, j = 1, 1$, второй $i, j = 2, 2$ и так далее).

Учтем условие парности касательных напряжений. При этом количество компонент напряжений в вектор-столбцах $\{\sigma\}_x$ и $\{\sigma'\}_x$ можно уменьшить до шести:

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}, \sigma'_{12}, \sigma'_{23}, \sigma'_{31}\}^T; \quad (1.66)$$

компоненты $\{\sigma\}_x$ записываются без штрихов.

Шестикомпонентные вектор-столбцы напряжений в двух системах координат (x, y, z и x', y', z') связываются зависимостями:

$$\{\sigma\}_x = [\alpha] \{\sigma\}_{x'}; \quad \{\sigma\}_{x'} = [\alpha]^{-1} \{\sigma\}_x \quad (1.67)$$

где $[\alpha]$ — матрица преобразования размером 6×6 .

Матрицу $[\alpha]$ удобно формировать по правилу

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} l_{11} l_{j1} & l_{12} l_{j2} & l_{13} l_{j3} & l_{11} l_{j2} + l_{12} l_{j1} & l_{12} l_{j3} & l_{13} l_{j2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

принимая построчно $i, j = 1, 1; 2, 2; 3, 3; 1, 2; 2, 3; 3, 1$.

При формировании матрицы (1.68) используются зависимости (1.61), в которых, учитывая парность касательных компонент, количество независимых компонент уменьшается до шести.

Ниже используются, как правило, не тензорные обозначения компонент напряжений в вектор-столбцах $\{\sigma^*\}_x$ и $\{\sigma^*\}_n$, кроме этого формально вектор-столбец $\{\sigma^*\}_x$ заменяется на $\{\sigma^*\}_n$ (используется система координат n, m, l , см. табл. 1.1)

$$\{\sigma^*\}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{zx}\}; \quad (1.69)$$

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{ln}, \tau_{mn}, \tau_{lm}, \tau_{nl}\}.$$

В этом случае проще формировать матрицу $[\alpha^*]^{-1}$ по правилу

$$[\alpha^*]^{-1} = \begin{bmatrix} n_i n_k & m_i m_k & l_i l_k & n_i n_k & m_i m_k & l_i l_k \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

где построчно: $i, k = x, y, z; x, y, z; x, y, z; z, x, y; z, x, y; x, z$.

Например, чтобы сформировать первую строку матрицы (1.70), необходимо принять $i = x, k = x$, в результате эта строка пишется

$$\begin{bmatrix} n_x^2 & m_x^2 & l_x^2 & n_x m_x & m_x l_x & l_x n_x & m_x n_x & l_x m_x & n_x l_x \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

при формировании, например, последней строки: $i = x; k = z$.

Матрица $[\alpha^*]$ получается путем транспортирования матрицы $[\alpha^*]^{-1}$ (в данном случае $[\alpha^*]^{-1} = [\alpha^*]^T$). Формула связи в виде (1.64) остается без изменения.

Вектор-столбцы симметричного тензора обозначаются:

$$\begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T, \quad (1.72)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix}_n = \{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{ln}\}^T$$

Матрицу направляющих косинусов $[\alpha]^{-1}$ преобразования симметричного тензора получают из (1.70), учитывая парность касательных компонент. Фактически учитывается шесть первых строк матрицы (1.70) и кроме того суммируются элементы при подобных компонентах (четвертый с седьмым, пятый с восьмым, шестой с девятым). Например, первая строка шестикомпонентной матрицы $[\alpha]^{-1}$ записывается

$$\begin{bmatrix} n_x^2 & m_x^2 & l_x^2 & 2n_x m_x & 2m_x l_x & 2l_x n_x \end{bmatrix}$$

В данном случае $[\alpha] = ([\alpha]^{-1})^{-1}$, однако $[\alpha]^{-1} \neq [\alpha]^T$ (в преобразованиях (1.67) это правило не действует).

Остановимся еще на преобразованиях компонент тензора относительной деформации в матричной форме. Вектор-столбцы компонент такого тензора в исходной (x, y, z) и новой (n, m, l или x', y', z') осях обозначаются:

$$\begin{bmatrix} \epsilon^* \end{bmatrix}_x = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}\}^T; \quad (1.73)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon^* \end{bmatrix}_n = \{\epsilon_n, \epsilon_m, \epsilon_l, \gamma_{nm}, \gamma_{ml}, \gamma_{ln}, \gamma_{mn}, \gamma_{lm}, \gamma_{nl}\}^T,$$

вектор-столбцы симметричного (шестикомпонентного) тензора составляют

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}_x = \left\{ \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, -\frac{1}{2} \gamma_{xy}, -\frac{1}{2} \gamma_{yz}, -\frac{1}{2} \gamma_{zx} \right\}^T; \quad (1.74)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}_n = \left\{ \epsilon_n, \epsilon_m, \epsilon_l, -\frac{1}{2} \gamma_{nm}, -\frac{1}{2} \gamma_{ml}, -\frac{1}{2} \gamma_{ln} \right\}^T.$$

Столбцы (1.73) преобразовываются при повороте осей координат по формулам (1.64), а столбцы (1.74) по формулам (1.67).

Нередко столбцы (1.74) записывают в виде:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \end{bmatrix} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (1.75)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}_n = \{\epsilon_n, \epsilon_m, \epsilon_l, \gamma_{nm}, \gamma_{ml}, \gamma_{ln}\}^T,$$

опуская множители $1/2$ при компонентах сдвига. При этом

$$\begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}_x = [\alpha]^T \begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}_n; \quad \begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}_n = ([\alpha]^{-1})^T \begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}_x \quad (1.76)$$

Остановимся на особенности перехода от преобразований (1.64) девятикомпонентных столбцов (1.73) к преобразованиям (1.67) или (1.76) шестикомпонентных столбцов (1.74) и (1.75), поскольку как указывалось выше, парность сдвигов не соблюдается (т.е. $\gamma_{ij}^* \neq \gamma_{ji}^*$ при $i = j; i, j = x, y, z$ или n, m, l).

Корректность такого перехода подтверждается тем, что он фактически может осуществляться без предположения о парности касательных компонент. Оставим первые четыре уравнения, например первой системы из (1.64), без изменения и просуммируем четвертое с седьмым, пятое с восьмым, шестое с девятым, а затем приведем подобные члены. Таким образом получим систему шести уравнений с девятью компонентами. В этой системе можно заметить, что направляющие косинусы, стоящие при компонентах σ_{ij} и σ_{ji} оказываются одинаковыми, следовательно можно ввести их суммы $(\sigma_{ij} + \sigma_{ji})$ при $i \neq j$. Составленные таким образом компоненты преобразовываются по формуле (1.76), здесь только $(\sigma_{ij} + \sigma_{ji})$ заменяется на $(\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*) = \gamma_{ij}^*$. Можно принять $\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^* = 2(\frac{1}{2} \gamma_{ij}^*)$, тогда приходим к преобразованиям (1.67). В случае с симметричным тензором напряжения получим $\sigma_{ij} + \sigma_{ji} = 2\sigma_{ij}$, поскольку $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ при $i \neq j$. В этом случае также приходим к преобразованиям (1.67).

В процессе возрастания нагрузок на конструкцию, естественно, увеличиваются и компоненты тензора напряжений в отдельных точках. Однако их увеличение не может быть беспредельным. При некоторых значениях этих напряжений наступает экстремальная ситуация. В этой ситуации (в зависимости от материала) возможны: переход материала в окрестности точки в состояние пластического течения; хрупкое разрушение с разделением на отдельные части; переход на ниспадающую ветвь деформирования и постепенного разрушения после некоторого критического накопления повреждений (псевдопластическое разрушение, его еще можно назвать псевдопластическим течением). Псевдопластическое разрушение предполагает возможность перераспределения усилий с ослабленной области на ее окружение.

Бетону присущи два последних характера разрушения (второй может реализовываться при различных комбинациях одноосного растяжения, третий — в случае трехосного сжатия). Критерии (условия), которые позволяют определять наступление указанных критических ситуаций при одноосных напряженных состояниях, называют критериями или условиями прочности. Отмеченный первый случай свойственен металлам; условия, характеризующие его наступление, называются условиями или критериями текучести. Заметим, что нарушение условия прочности в окрестности какой либо точки может еще не означать разрушение конструкции в целом, хотя такие предположения часто делаются. Современные методы позволяют проследить постепенное выключение материала в окрестностях точек (обычно внутри отдельных конечных элементов) или переход их на ниспадающую ветвь деформирования — и так до некоторого максимального значения прилагаемой нагрузки, при которой этот прогрессирующий процесс накопления разрушений приводит к полному обрушению конструкции. В таких расчетах критерии прочности выступают в качестве составной части расчетного алгоритма, указывая на переход материала в отдельных элементах в состояние разрушения или пластического и псевдопластического течения.

Заметим, что понятие окрестности точки для бетона как материала с неоднородной структурой ассоциируется с характерным элементом масштаба l_0 (см. п. 1.1). Именно такие или большие элементы используют для установления и проверки критериев прочности на основании экспериментов.

Критерии удобно анализировать и конструировать в осях главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В этих осях критерии прочности

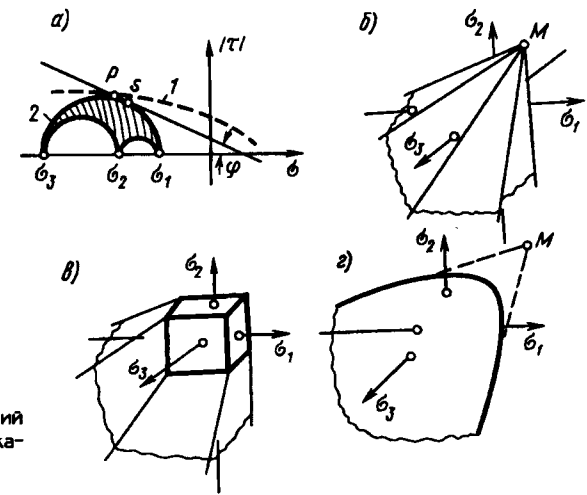


Рис. 2.1. Критерий Мора (а, б) и его модификация (в, г)

представляются в виде некоторой поверхности, которая заключает внутри себя безопасные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Наоборот, выход за эту поверхность указывает на разрушение. В бетоне $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — это сглаженные напряжения (см. п. 1.2). Примем растягивающие напряжения за положительные.

2.1. КРАТКИЙ АНАЛИЗ НАЧАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА И ИСТОРИЯ ИХ СОЗДАНИЯ

Развитие критериев прочности имеет достаточно длительную и богатую историю. Эта проблема привлекала исследователей с самого начала становления бетона как конструкционного материала и продолжает притягивать к себе внимание по сей день.

Классические теории прочности. Первые исследования были направлены на то, чтобы проверить применимость к бетону классических теорий прочности: наибольшего нормального напряжения; наибольшей упругой деформации; наибольшего касательного напряжения; энергетических теорий (полной удельной потенциальной энергии деформации Бельтрами — Хейга и удельной потенциальной энергии изменения формы Губера — Мизеса — Генки); теории прочности Мора [193]. Подробное изложение классических теорий можно встретить в монографиях [31, 135, 155]. Анализ классических теорий интересен с точки зрения раскрытия механизмов разрушения бетона, которые были выявлены в результате такого анализа. В последующем механизмам разрушения уделялось мало внимания.

Наибольшие дискуссии по поводу своей применимости к бетону вызвала теория Мора, поэтому остановимся на ней более подробно.

Согласно Мору разрушение происходит вследствие скольжения по некоторым опасным площадкам, на которых напряжения сдвига достигают предельного значения. Причем предельное значение τ не является константой, а зависит от величины нормального напряжения σ на этой площадке, т.е.

$$|\tau| = f(\sigma) \quad (2.1)$$

Мор дал этому условию наглядную графическую интерпретацию (рис. 2.1, а). Расположим главные напряжения в последовательности $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Тогда согласно Мору все возможные нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках должны лежать в области, заключенной между тремя полуокружностями Мора (на рис. 2.1 эта область заштрихована).

Пусть известна предельная кривая (2.1). Она может быть криволинейной или, в частном случае, линейной (линии 1, 2 на рис. 2.1). Естественно, пока заштрихованная область лежит ниже предельной кривой, разрушение не происходит. Разрушение начинается, когда заштрихованная область касается предельной кривой (в точках P или S). Из геометрических соображений ясно, что точки касания должны лежать на большом круге Мора. Представленный большой круг Мора построен для одного из возможных соотношений между главными напряжениями (условно для напряжений одной точки).

В действительности каждому напряженному состоянию соответствует свой большой круг диаметром $(\sigma_1 - \sigma_3)$. Все центры кругов располагаются на линии σ , а предельная кривая является по отношению к ним огибающей. В связи с этим о предельной кривой (2.1) говорят как об огибающей больших кругов Мора. Из рис. 2.1 следует одно важное свойство условия прочности Мора. Оно состоит в том, что разрушение зависит только от напряжений σ_1 и σ_3 , по которым строится большой круг и не зависит от промежуточного напряжения σ_2 . Причем этот вывод не связан с видом кривой (2.1). Это важное условие критерия Мора для бетонов не выполняется, что послужило причиной его модификаций, рассмотренных далее.

Видимо наибольшее распространение получила простейшая форма огибающей Мора — (прямая линия 2 на рис. 2.1). В этом случае критерий (2.1) преобразуется к виду

$$\sigma_3 = -R_{bc} + m \sigma_1, \quad (2.2)$$

где R_{bc} — прочность материала при одноосном сжатии;

$$m = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}; \quad (2.3)$$

здесь ψ — угол внутреннего трения (ψ см. на рис. 2.1, а).

Заметим, что условие (2.2) нашло применение в определении прочности бетонов при трехосном сжатии [31] при $m = 4,1$, чему

соответствует $\psi \approx 38^\circ$, однако условие (2.2) не применимо к оценке прочности бетона в случаях растяжения и смешанных напряжений растяжение — сжатие. Вывод (2.2) элементарен, его можно найти во многих работах, например в фундаментальной работе [136], которая посвящена критерию Мора. Условие (2.2) совпадает с точностью до констант с условием Кулона, который предложил его раньше, поэтому его называют условием Кулона — Мора. Заметим еще раз, что прежде, чем пользоваться условием (2.2), необходимо выполнить перенумерацию напряжений, расположив их в последовательности $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (именно так мы будем поступать в дальнейшем). Если указанная перенумерация не производится, тогда необходимо выделить шесть отдельных состояний:

$$\begin{aligned} \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; & \quad \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1; & \quad \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2 \\ \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_1; & \quad \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3; & \quad \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

заменяя в (2.2) σ_1 и σ_3 на соответствующие крайние напряжения в неравенствах (2.4). Например, если $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$, то вместо σ_1 в (2.2) принимают σ_2 , а вместо σ_3 значение σ_1 . Составленные таким образом шесть условий (2.2) определяют в пространстве напряжений шесть плоскостей, которые проходят через одну точку M и образуют пирамиду с вершиной в этой точке (рис. 2.1, б). Такая пирамида и представляет поверхность разрушения Кулона — Мора в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Тот факт, что в области растяжения прочность материала оказывается существенно завышенной, натолкнул исследователей на мысль произвести усечение пирамиды согласно рис. 2.1, в. В таком виде условие прочности Кулона — Мора применялось к анализу прочности легких бетонов в [42].

Подробный анализ применимости различных классических теорий прочности к бетону на основе анализа опытов различных исследователей можно встретить в монографиях А.А. Гвоздева [31], О.Я. Берга [14], затем Г.А. Гениева, В.Н. Киссюка и Г.А. Тюпина [41]. Если относительно неприменимости к бетону первых четырех теорий исследователи были практически единодушны, то относительно применимости критерия Мора возникали разные мнения. Так, Г.А. Гениев, например, считает, что теория Мора не применима к бетону в своей классической форме (это убедительно показал А.А. Гвоздев [31]), однако она может быть удачно модифицирована.

Не будем останавливаться на количественных расхождениях показателей прочности указанных теорий с показателями экспериментов (согласно [14] они могут различаться в несколько раз), а рассмотрим некоторые качественные выводы указанного анализа относительно теории Мора. А.А. Гвоздев [31] пришел к выводу, что классические формы разрушения в виде скольжения по некоторым опасным площадкам к бетону не применимы. Рассматривая процесс

С
н
д
я
б

деформирования в тесной связи с процессом накопления внутренних трещин, А.А. Гвоздев указывает на преобладающее влияние отрывного механизма разрушения не только при простом растяжении и кручении, но и в случае одноосного и неодносного сжатия. Им было обращено внимание и на влияние среднего напряжения σ_2 на прочность, а также на влияние эффекта дилатации, который выразился в видимом увеличении объема образцов в момент разрушения при неравномерном трехосном сжатии.

ц
н
и
в
ри

Наличие эффекта дилатации фактически указывает на то, что если и возможен сдвиговой механизм разрушения бетона, то он сопровождается увеличением объема (т.е. проходит не по классической схеме, согласно которой сдвиг не вызывает изменение объема). Учитывая этот эффект, Г.А. Гениев предложил дилатационную теорию деформирования бетона, которая будет рассмотрена в гл. 3 [40]. Позже появились предположения, что не только касательные напряжения вызывает увеличение объема, но и средние напряжения могут влиять на деформации сдвига (см. гл. 3). При этом нетрудно заметить, что теряется классическое представление о том, что шаровой тензор напряжения ответствен за изменение объема образца, а инварианты деватора напряжений приводят только к изменению формы образца. Заметим, что такое классическое разделение положено в основу энергетических теорий прочности, что и обусловило, наряду с другими факторами, неприменимость их к бетону.

кр
ри
пр
ет
то
ка
бо.
ме:
то

Анализируя результаты экспериментов, О.Я. Берг [15] пришел к выводу, что механизм сдвига в бетоне подобен механизму, представленному на рис. 1.7, ж. Согласно этой схеме сначала образуются трещины отрыва, а затем уже по ним проходит площадка сдвига. Основным в этом факторе О.Я. Берг (как и А.А. Гвоздев) считал наличие трещин отрыва. По их мнению, они являются определяющими факторами разрушения, а видимый сдвиг — это уже как последствие разрушения. Хотя, с другой стороны, в [15] указывается на возможную ориентацию площадок такого последствия, в чем, на наш взгляд, выразилась некоторая противоречивая точка зрения О.Я. Берга. В действительности, как указано в п. 1.3, трещина сдвига на своем пути может включать в себя несколько схем разрушения, представленных на рис. 1.7.

вет
рас
ни
гов
од
раз
стр
 σ_2
усл
при

Анализируя наклон поверхностей разрушения в опытных образцах, О.Я. Берг пришел к выводу, что они располагаются близко к площадкам приложения среднего касательного напряжения τ_{cp} , которое ввел В.В. Новожилов ($\tau_{cp} = \sqrt{3/15} \tau_0$). По мнению автора [15], именно в закономерностях связи наибольших нормальных напряжений со средними касательными напряжениями необходимо искать законы, управляющие процессом разрушения бетона при сжатии. Эта предпосылка в реализации [15] приводит, как и теория Мора, к выводу о том, что промежуточное напряжение σ_2 не влияет на прочность. Это уменьшило интерес к критерию [15], хотя высказан-

фо
слу

проч

ные при этом соображения о возможном механизме среза по площадке τ_{cp} не утратили интерес. Кроме этого работа [15] представляет собой образец раскрытия физических процессов, связанных с разрушением бетона. Видимо τ_{cp} в момент разрушения является функцией нормального напряжения σ_{cp} на площадке приложения τ_{cp} ; $\tau_{cp} = f(\sigma_{cp})$.

Иную трансформацию получила в свое время идея Мора в работе А. Надаи [128], который высказал гипотезу о том, что в предельном состоянии октаэдрическое касательное напряжение (τ_0) является функцией октаэдрического нормального напряжения σ_0

$$\tau_0 = f(\sigma_0). \tag{2.5}$$

Эта идея, как будет показано, получила развитие применительно к бетону.

Двухинвариантные критерии прочности. Рассмотрение рис. 2.1, б, в не может не наводить на мысль о возможной трансформации поверхности разрушения Кулона — Мора в некоторую гладкую поверхность (рис. 2.1, г). Возможности такой трансформации подробно рассмотрены в работе [41]. Показано, что поверхности (рис. 2.1, б, в) хорошо аппроксимируются поверхностью вращения, в частности параболоидом вращения, к которому сводится условие П.П. Баландина — Г.А. Гениева. В этих аппроксимациях учитывается влияние промежуточного напряжения σ_2 на прочность и тем устраняется один из недостатков критерия Мора.

Попытки представления критериев прочности некоторыми поверхностями вращения в построениях теорий прочности заняли примерно 35 лет (если считать за начало работу Е. Schleiber [201] (Шлейхера) 1926 г. и кончая обобщающей работой М.М. Филоненко-Бородича [157] — 1961 г.), хотя полное обобщение этих теорий дано позже в работе Г.А. Гениева, В.Н. Киссюка, Г.А. Тюпина [41] — 1974 г.

Начальные критерии прочности — эллипсоиды вращения Е. Schleiber (Шлейхера), В. Bunzinski (Бужинского), параболоид П.П. Баландина [12], круговой конус И.Н. Миролюбова [123] устанавливались исходя из некоторых энергетических подходов, которые названы авторами новыми. К такому же направлению относится более поздняя работа А.И. Ноткуса, А.П. Кудзиса [130]. В дальнейшем, как справедливо указано в [41], физическая трактовка явлений стала отступать на второй план.

Механические теории развивались в работах А.И. Боткина, А.Н. Василькова, А. Фрейденталя, Л.К. Лукши и др. Более подробный обзор указанных построений можно встретить в монографиях [41, 110]. Рассматривая представленные выше уравнения прочности, М.М. Филоненко-Бородич [156] пришел к выводу, что все они могут быть записаны в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\gamma(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_{bc} - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_{bc}R_{bt}, \quad (2.6)$$

где R_{bc} , R_{bt} — пределы прочности при одноосном сжатии и растяжении.

Придавая γ то или иное значение, можно получить все указанные выше критерии (например $\gamma = 1/2$ соответствует параболоиду вращения П.П. Баладина, $\gamma = 1$ — двухполостному гиперболоиду Л.К. Лукши [110] и т.д. [41]).

Геометрической интерпретацией различных соотношений типа (2.6) являются поверхности второго порядка. Как известно [15], все уравнения таких поверхностей могут быть сведены к функциональной связи между первым инвариантом тензора напряжений (I_1) и вторым инвариантом девиатора напряжений (D_2),

$$I_1^2 - AD_2 + BR_{bc}I_1 - CR_{bt} = 0, \quad (2.7)$$

где A , B , C — коэффициенты, определяемые опытным путем в условиях сложного напряженного состояния.

По мере накопления экспериментальных исследований начали выявляться недостатки двухинвариантных критериев в тех или иных областях напряженных состояний [41, 110], что уменьшило к ним интерес.

2.2. НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ

Одни из начальных направлений были связаны с модификацией критерия прочности в виде поверхности вращения (Г.А. Гениев и В.Н. Киссюк [39]) и развитием других идей по совершенствованию подходов Мора — Надаи (Г.С. Писаренко и А.А. Лебедев [135], П.М. Бич [22] и др.). Вводя третий инвариант девиатора напряжений D_3 в уравнение типа (2.6), Г.А. Гениев и В.Н. Киссюк получили

$$3D_2 = (AI_1 + B) \left\{ 1 - (1 - c) \left[1 - \frac{D_3}{2} \left(-\frac{D_2}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad (2.8)$$

где A , B , C — постоянные коэффициенты, которые зависят от прочности бетона при одноосном сжатии (R_{bc}), растяжении (R_{bt}) и чистом сдвиге (T_c).

Как известно, поверхность прочности должна быть выпуклой (согласно постулату Д. Дракера и Р. Хилла для изотропных материалов). Это накладывает на параметры (2.8) следующее ограничение:

$$\sqrt{39} < \frac{T_c}{\sqrt{R_{bc}R_{bt}}} > \sqrt{3}$$

Это ограничение, по данным [3], для бетона может не выполняться, что сужает возможности критерия (2.8).

Большинство предложенных в последнее время критериев прочности сводится к построению технических функциональных связей между октаэдрическим нормальным (σ_0) и касательным (τ_0) напряжениями и параметром Лоде — Надаи (μ_σ)

$$F(\tau_0, \sigma_0, \mu_\sigma, R) = 0. \quad (2.9)$$

Редко μ_σ в (2.9) заменяют углом вида напряженного состояния ω_σ , который связан с μ_σ формулой (1.49). Его также можно выразить через инварианты по формуле (1.50). Один из способов построения уравнения (2.9) был предложен М.М. Филоненко-Бородичем [156]. Согласно этому способу сначала на основе обработки экспериментальных данных устанавливают две главные (для $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$) меридиональные кривые, а остальные кривые (для промежуточных значений параметра Лоде — Надаи μ_σ) находят по интерполяционной зависимости между главными кривыми. В интерполяционной зависимости отражают характер изменения девиаторных кривых (следов поверхности прочности на девиаторных сечениях). Этот метод в определенной степени является развитием идеи А.А. Гвоздева [31] о рациональной форме предельной поверхности для бетона. Показанная в [31] форма криволинейной девиаторной кривой явилась прообразом кривых, которые закладываются в современные критерии прочности типа (2.9)

Способ М.М. Филоненко-Бородича использован при конструировании многих критериев прочности, которые были предложены на протяжении последних двадцати лет отечественными и зарубежными исследователями (Е.С. Лейтесом [104], Л.К. Лукшей [110], И.Н. Arguris [176], А.В. Яшиным [173], М.Б. Лившицем [107], М.Д. Kotsvos [191], В.М. Кругловым [102], Т.А. Баланом [9] и др.).

Приведем для примера критерии А.В. Яшина, В.М. Круглова, которые были сконструированы на основе обобщения большого массива экспериментальных данных по тяжелым (плотным) бетонам. Условие прочности, разработанное А.В. Яшиным, можно записать так:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}R_{bc}}{3\sqrt{3}} \left[A + \frac{1-A}{F_b} F(\sigma_0) \right] k(\omega_\sigma), \quad (2.10)$$

где $F(\sigma_0)$ — функция, отражающая изменение меридиональных кривых поверхности прочности; $k(\omega_\sigma)$ — функция, характеризующая изменение девиаторных кривых; A — характеристика критерия прочности при одноосном растяжении:

$$F(\sigma_0) = \lg \left(B + \frac{R_{bt}}{R_{bc}} - a \frac{\sigma_0}{R_{bc}} + \beta \frac{\sigma_0^2}{R_{bc}^2} \right);$$

$$k(\omega_\sigma) = 1 - a \sin \frac{3}{2} \omega_\sigma + b \sin^2 \frac{3}{2} \omega_\sigma;$$

$$A = \left(\frac{R_{bt}}{R_{bc} k_p} - \frac{F_p}{F_c} \right) / \left(1 - \frac{F_p}{F_c} \right).$$

Входящие в указанные выше выражения константы принимают значения: F_c — значение $F(\sigma_0)$ при $\sigma_0 = -R_{bc}/3$; F_p — значение $F(\sigma_0)$ при $\sigma_0 = R_{bt}/3$; $B = 1,1$; $\alpha = 1,41$; $\beta = 0,081$; $a = 0,55 - R_{bt}/R_b$; $b = 0,15$; $k_p = 1 - a + b$.

Использованная при конструировании (2.10) функция $(k(\omega_g))$ предложена Е.С. Лейтесом (ω_g — см. п. 1.6). Девиаторная кривая представляется криволинейным треугольником.

Критерий В.М. Круглова [102] имеет вид

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\tilde{\tau}_{oc}^3 k(1+k^2) - \sqrt{2}(1-k)\tilde{D}_3}{\tilde{\tau}_{oc}^2(1+k^3)}, \quad (2.11)$$

где

$$\tilde{\tau}_{oc} = \frac{1}{6} \left\{ A + [A^2 - 48\sqrt{2}(\sigma_0 - c)]^{1/2} \right\};$$

$$A = \sqrt{2} - 4 - 2c(3\tilde{\sigma}_0 + 7); \quad k = m\sqrt{2}/(m\sqrt{2} - \alpha);$$

$$\alpha = [2(2+c)\tilde{\tau}_{oc}] \cdot [4(\tilde{\sigma}_0 - c) - \tilde{\tau}_{oc}]^{-1};$$

$$m = 1 + 1,25 \chi; \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0/R_{bc}; \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0/R_{bc};$$

$$D_3 = D_3/R_{bc}^3; \quad \chi = R_{bc}/R_{bt};$$

$$c = \frac{4m(\chi - 1) - [1 + m(1 + \chi)] \{4 + m\sqrt{2}(\chi - 1) [\chi + m(1 + \chi)]^{-1}\}}{2[1 + m(7 + \chi) - 6m/\chi]}.$$

Функция $\tilde{\tau}_{oc}$, характеризующая изменение меридиональных кривых, построена на основе характерной функции прочности бетона, предложенной Н.И. Карпенко [67] (она рассмотрена далее). Девиаторные сечения в (2.11) представляются частями эллипса.

Конструирование критериев прочности по способу М.М. Филоненко — Бородича представляет достаточно трудоемкую процедуру. Непосредственных экспериментальных данных по выявлению форм девиаторных кривых имеется весьма мало, поэтому их конструирование сводится к некоторому долгому ряду последовательных приближений. Сначала вид кривой прогнозируется. На основе такого прогноза и предположения о форме главных меридиональных кривых составляется критерий, который начинает проверяться на основе разнообразных экспериментов. Выявив расхождение, исследователь уточняет параметры девиаторной кривой или изменяет ее форму до удовлетворительного совпадения данных расчета с результатами экспериментальных исследований.

В работе Н.И. Карпенко [72] было замечено, что графики прочности при двухосном сжатии и растяжении по сути представляют следы девиаторной кривой на плоскости в интервалах $-1 < \mu_g < 1$. Этот факт значительно упростил процедуру воспроизведения девиа-

торных кривых. Кроме того был замечен довольно простой путь построения меридиональных кривых. Предложенный в [72] способ построения критерия прочности для различных бетонов рассмотрен ниже. Большие экспериментальные исследования в нашей стране по выявлению главных меридиональных кривых выполнены Ю.Н. Малашкиным [115, 116] и А.В. Яшиным [172 — 175].

Обобщая современные направления в развитии критериев прочности бетона, можно заметить, что все они сводятся к нахождению тех или иных функциональных зависимостей между тремя инвариантами: первым инвариантом тензора напряжений (I_1) и вторым (D_2) и третьим (D_3) инвариантами девиатора напряжений,

$$F(I_1, D_2, D_3) = 0.$$

Такие критерии уже гораздо лучше согласуются с данными экспериментов, чем указанные выше двухинвариантные критерии, поэтому можно предположить, что тремя инвариантами (I_1, D_2, D_3) косвенно отражаются различные механизмы разрушения бетона — от отрыва, от сдвига и смешанные отрывно-сдвиговые механизмы (см. рис. 1.7). Возможности двухинвариантных критериев в этом плане оказались более ограниченными.

В феноменологических теориях прочности вид разрушения, как уже указывалось, прогнозируется опосредствованно — путем введения в критерий определенных инвариантов. Естественным поэтому является стремление исследователей подойти к проблеме прочности с некоторых физических (структурных) позиций. Интерес к физическим построениям возникал периодически на всем пути развития проблемы прочности (тем более столь распространенного как бетон материала) и также периодически отодвигался на второй план, учитывая сложность проблемы.

В настоящее время в связи с развитием вычислительной техники и вычислительных методов физические подходы могут приобрести реальную значимость. Выше уже говорилось о возможностях конечно-элементной модели бетона (рис. 1.2). Можно выделить еще некоторые интересные направления: объемно-структурную модель Ю.В. Зайцева [48], построенную с позиции трещин механики разрушения, и теорию прочности бетона как некоторого статистически неоднородного материала зернистой структуры при неоднородных напряженных состояниях М.М. Холмянского и Е.И. Шифрина [162] и др. К интересным и неожиданным результатам может привести разработка критериев прочности на основе теории накопления повреждений. В частности, могут трансформироваться представления о значимости тех или иных критериев (в том числе и некоторых классических), управляющих прочностью неповрежденных (сплошных) частей бетона. На это указывают удовлетворительные результаты работы [162], где в качестве критерия разрушения статистически неоднородных компонент структуры был принят, например, критерий типа (2.5) Надаи.

2.3. ОБЩИЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ БЕТОНОВ И СПОСОБ ЕГО ПОСТРОЕНИЯ

Предложенные выше критерии относились в основном к тяжелым (плотным) бетонам. Рассмотрим критерий, охватывающий различные виды бетонов как на плотных, так и пористых заполнителях. Критерий прочности предложен в [67, 72].

Некоторые начальные сведения о поверхности прочности — геометрическом образе критерия прочности. В координатах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ критерий прочности бетона представляется поверхностью общего вида $F = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, которая является замкнутой в области всестороннего равномерного сжатия для плотных бетонов (рис. 2.2, а) и замкнутой для пористых (рис. 2.2, б). Для наглядности поверхность прочности удобно изображать в цилиндрических координатах нормального $\sqrt{3}\sigma_0$ и касательного $\sqrt{3}\tau_0$ октаэдрических напряжений и угла вида напряженного состояния ω_σ или параметра Лоде — Надаи μ_σ (см. п. 1.6).

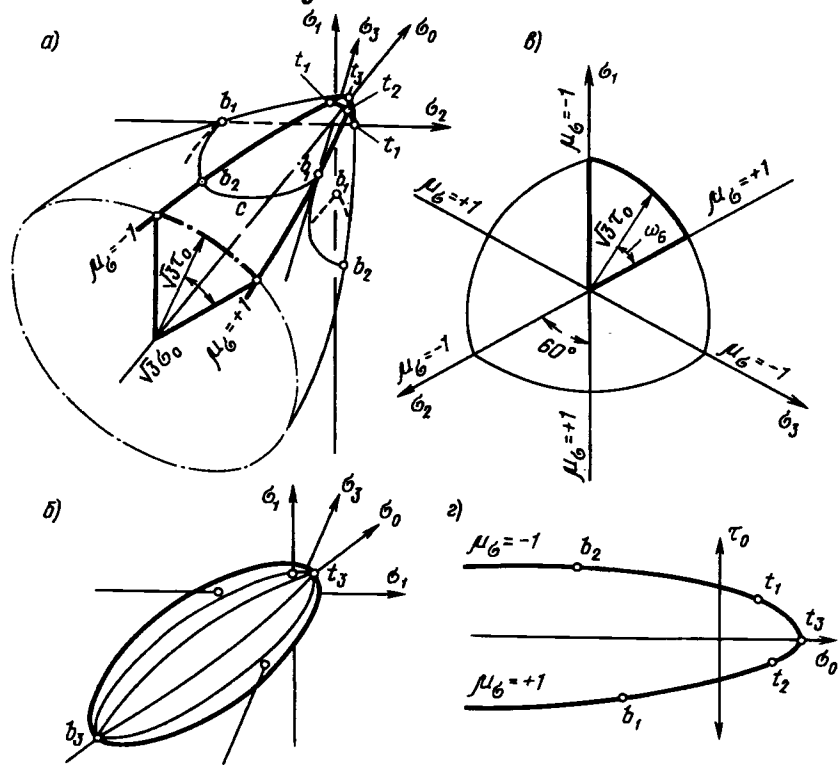


Рис. 2.2. Характеристика современных критериев прочности

Поверхность состоит из шести одинаковых частей (лепестков), которые располагаются между сечениями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$. В качестве направляющей поверхности выступает девиаторная кривая, которая является функцией τ_0 и ω_σ (см. рис. 2.2, в). Формы девиаторных кривых зависят от вида бетона и изменяются в различных областях напряженных состояний (неодноосного растяжения, сжатия — растяжения, трехосного сжатия). Образующими являются меридиональные кривые (их вид показан на рис. 2.2, г). Каждому соответствует своя меридиональная линия. Линии, соответствующие $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$ обычно выделяют и называют главными.

На линии $\mu_\sigma = -1$ находятся точки одноосного растяжения (t_1) и двухосного равномерного сжатия (b_2), а на линии $\mu_\sigma = +1$ — двухосного равномерного растяжения (t_2) и одноосного сжатия (b_1). Кроме этого на рис. 2.2, а, б, г представлены: t_3 — точка, соответствующая трехосному равномерному растяжению; b_3 — трехосному равномерному сжатию (см. рис. 2.2, б), r — линия, соответствующая двухосному растяжению (см. рис. 2.2, а); c — линия, соответствующая двухосному сжатию. Заметим, что линии r и c пересекают все меридиональные кривые (от $\mu_\sigma = +1$ до $\mu_\sigma = -1$). Их вид зависит от вида девиаторных кривых, что использовано в [67] при построении критерия прочности.

Поверхность должна удовлетворять некоторым общим требованиям: она должна быть непрерывной; симметрично расположенной относительно оси σ_0 , равнонаклоненной к координатным осям главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; согласно постулату Д. Драккера и Р. Хилла она должна быть выпуклой, т.е. произведение ее главных кривизн должно быть не меньше нуля. Это условие выполняется, если выпуклыми являются девиаторные и меридиональные кривые. В некоторых работах еще ставится условие гладкости (без ребер и переломов), однако оно не является обязательным и для многих поверхностей не выполняется. Простейшее тому подтверждение — пирамида Кулона — Мора (см. рис. 2.1, а, б).

Заметим еще, что строго говоря, указанное выше второе условие справедливо только для изотропных материалов, в то время как бетон представляется моделью ортотропного тела. Однако эта ортотропия является упорядоченной (т.е. зависит от расположения главных напряжений в последовательности $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). В таком случае второе условие не нарушается.

Критерии прочности бетонов исследовались: в условиях простого нагружения образцов — $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ изменялись пропорционально одному параметру; в условиях активного напряжения — ни одно из главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в процессе опытов по модулю не уменьшалось; в условиях отдельных сложных режимов нагружения. В первых двух случаях все представленные критерии могут применяться без изменения. В некоторых случаях сложного нагружения, не сопровождающегося значительной разгрузкой, они также могут при-

меняться. В остальных случаях вопрос о применимости критериев еще требует исследования.

В [72] показано, что проще строить критерий прочности в координатах $\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma$,

$$F(\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma, R) = 0, \quad (2.12)$$

а затем уже переходить при необходимости к виду (2.9)

В основу построения (2.12) положена характерная функция прочности бетона и функции следов девиаторной кривой на плоских графиках двухосного сжатия и растяжения.

Частный случай характерной функции прочности бетона.

Примем за положительные напряжения растяжения, при этом в случае трехосного сжатия максимальными будут напряжения σ_1 , которые равны минимальным по модулю напряжениям сжатия (эти напряжения отрицательны), а минимальными — напряжения σ_3 , хотя по модулю эти напряжения превышают напряжения σ_1 . Здесь это подчеркиваем в связи с тем, что обычно за положительные принимают напряжения сжатия. Рассмотрим случай сжатия элемента напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$ называют напряжениями бокового сжатия. Для определения σ_3 , соответствующего исчерпанию прочности образца, часто используют простое условие вида

$$\sigma_3 = -R_{bc} + \beta_\Pi \sigma_1, \quad (2.13)$$

которое по сути является условием (2.2) Кулона — Мора. Оно использовалось в работах Ф. Рихарда, А. Брандзаега и Р. Брауна при $\beta_\Pi = 4.1$. Консидер (на это указывал А.А. Гвоздев [31]) предлагал принимать $\beta_\Pi = 5$. В других работах предлагались иные значения β_Π , отмечалось также, что этот коэффициент следует принимать переменным, например, зависящим от напряжения σ_1 [110] или класса бетона [115].

В работе [67] показано, что ни одно из указанных предложений не отражает действительного характера изменения β_Π . Величина β_Π зависит в основном от отношения σ_1/σ_3 . Введем безразмерные величины напряжений, разделив их на R_{bc} — прочность бетона при одноосном сжатии и изменив знаки,

$$-\frac{\sigma_1}{R_{bc}} = \tilde{\sigma}_1; \quad -\frac{\sigma_2}{R_{bc}} = \tilde{\sigma}_2; \quad -\frac{\sigma_3}{R_{bc}} = \tilde{\sigma}_3, \quad (2.14)$$

(здесь уже $\tilde{\sigma}_3 > \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1$) и преобразуем (2.13) к виду

$$\tilde{\sigma}_3 = 1 + \beta_\Pi \tilde{\sigma}_1 \quad (2.15)$$

Разделив правую и левую части (2.15) на $\tilde{\sigma}_3$, можно получить иную запись (2.15):

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{1 - \beta_\Pi m}, \quad (2.16)$$

где

$$m = \tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_3. \quad (2.17)$$

В расчетах прочности $R_{bc} = R_b$ — призмочной прочности бетона, однако в экспериментальных исследованиях могут испытываться кубы, тогда R_{bc} (при анализе экспериментов) приравняется к кубиковой прочности.

Пусть значение β_Π фиксировано, например $\beta_\Pi = 4.1$. Тогда из (2.16) следует, что уже при сравнительно низких отношениях σ_1/σ_3 (в данном случае $\sigma_1/\sigma_3 \rightarrow 1/4.1$) наступает неразрушимость материала ($\sigma_3 \rightarrow \infty$). Это явное противоречие указывает на неприменимость условия типа (2.13), а отсюда и критерия Кулона — Мора к оценке прочности материалов при высоких уровнях неравномерного сжатия. Здесь этот критерий может на порядок и более завышать прочность. Это обстоятельство не было замечено исследователями, видимо, потому, что в опытах обычно принимались сравнительно невысокие значения напряжений бокового сжатия.

Логично предположить, что указанная неразрушимость может наступать лишь в одном частном случае (и то для плотных бетонов) — в случае трехосного равномерного сжатия (при $\sigma_1/\sigma_3 \rightarrow 1$). Для описания этого предельного случая зависимостью (2.16) необходимо, чтобы параметр β_Π был переменным и устремлялся к единице при $\sigma_1/\sigma_3 \rightarrow 1$. Заметим, что в случае пористых бетонов (они будут рассмотрены далее) β_Π становится меньше единицы при $\sigma_1/\sigma_3 \rightarrow 1$, и таким образом наличие какой-либо области неразрушимости бетона исключается.

Как показали исследования [67], указанному граничному значению $\beta_\Pi \rightarrow 1$, а также данным экспериментов по плотным бетонам отвечает некоторая дробная функция вида

$$\beta_\Pi = \frac{1 + a - am}{b + (1 - b)m}, \quad (2.18)$$

где a, b — коэффициенты материала, устанавливаемые на основании опытов.

Согласно данным опытов, представленных на рис. 2.3, некоторой нижней границе прочности бетонов соответствует линия I, описываемая зависимостью (2.18) при $b = 0.118, a = 0.5b$; некоторым средним значениям прочности соответствует линия II ($b = 0.096; a = 0.5b$). Можно также использовать простое выражение (2.18) при $a \approx 0, b \approx 0.1$. Линии I, II удовлетворительно согласовывались с данными опытов различных исследователей (А.В. Яшина и Р.Г. Касимова — 1; Ю.Н. Малашкина и Б.В. Тябликова — 2; Г. Ферара — 3; Илинойского Университета — 4, Раймана — 5, А. Ноли — 6, С. Ито — 7) над бетонными кубиками из тяжелого бетона прочностью при одноосном сжатии $3 \text{ МПа} < R_{bc} < 70 \text{ МПа}$. Подробные сведения об этих опытах приведены в работах [110, 115,

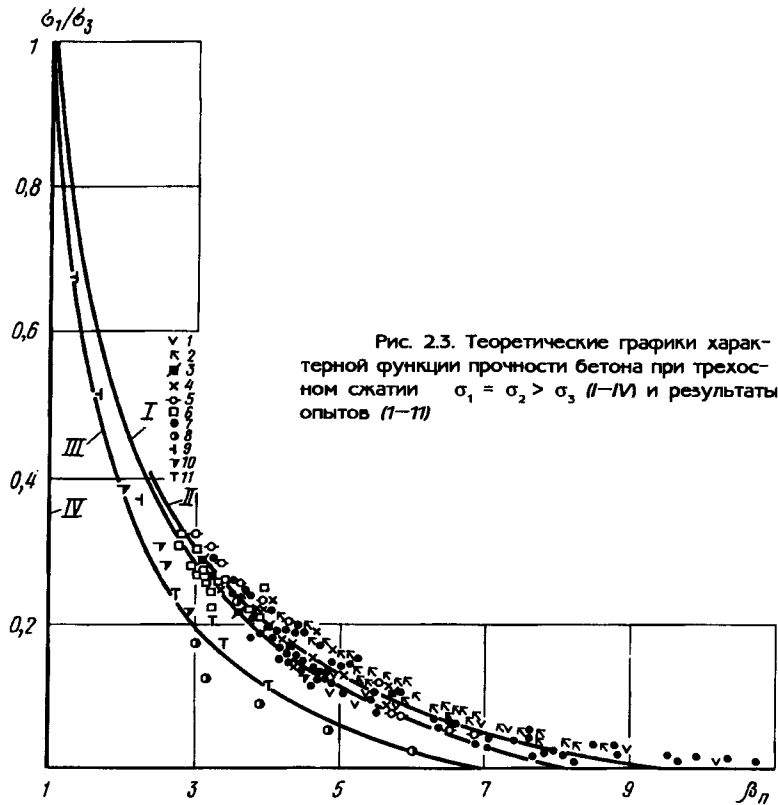


Рис. 2.3. Теоретические графики характерной функции прочности бетона при трехосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ (I-IV) и результаты опытов (1-11)

173, 175]. Согласно опытам мелкозернистый бетон без крупного заполнителя (8, 11 из опытов С. Ито и института ИГД [110]) сопротивлялся трехосному сжатию хуже, чем бетон с крупным заполнителем. Этому бетону, а также раствору (9, 10 — из опытов ИГД) соответствует линия III на рис. 2.3.

Предварительные исследования показывают, что функция (2.18) достаточно универсальна. Она пригодна и для других материалов, например горных пород (анализировались опыты над мрамором), поэтому названа характерной. Разрушению материалов по гипотезе максимальных касательных напряжений соответствует $\beta_n = 1$ (линия IV на рис. 2.3). Согласно рис. 2.3 при высоких уровнях бокового обжатия ($m \rightarrow 1$). К линии IV приближаются все линии (I-III). Таким образом, если при небольших уровнях обжатия характер разрушения различных материалов неодинаков, то при высоких уровнях все они имеют тенденцию разрушаться от сдвига. Изменение β_n , по-видимому, отражает различные механизмы разрушения бетона от отрыва (при самых высоких значениях β_n), затем от комбинаций

отрыва и сдвига и, наконец при $\beta_n < 3$ — от сдвига. Этот вопрос еще требует исследования.

Выражения (2.15), (2.13) будут использованы ниже для конструирования общего критерия прочности, однако их можно использовать и самостоятельно вместо приближенной формулы (2.13). В случаях, когда известна величина бокового обжатия $\sigma_1 = \sigma_2$, можно преобразовать (2.15), (2.18) к более удобному виду. Подставляя (2.18) в (2.15) или (2.16) и решая получаемое при этом квадратное уравнение, приходим к следующей формуле по определению $\tilde{\sigma}_3$ в функции от $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$,

$$\tilde{\sigma}_3 = [\tilde{\sigma}_1(a+b) + b]/2b + \sqrt{[\tilde{\sigma}_1(a+b) + b]^2/4b^2 + [(1-b)\tilde{\sigma}_1 - a\tilde{\sigma}_1^2]/b}. \quad (2.19)$$

Сопоставление опытов с результатами расчета по условию (2.19) ($a = 0,5b$; $b = 0,096$), представленное в [74], показывает их хорошее согласование как для низких, так и сравнительно высоких уровней сжатия.

Исследование кривой (2.19) показывает, что она обращена выпуклостью вверх (выпукла, в дальнейшем это обеспечивает выпуклость такой кривой, перестроенной в меридиональную кривую поверхности прочности относительно гидростатической оси $\tilde{\sigma}_0$). Условия выпуклости и определения функции: $(b-a-1) \leq 0$. Кривая имеет две асимптоты, которые различны для двух случаев.

В первом случае (при $a < b$):

$$\lim \tilde{\sigma}_3/\tilde{\sigma}_1 = 1;$$

асимптота $\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_1 + 1/(b-a)$.

Во втором случае (при $a > b$):

$$\lim \tilde{\sigma}_3/\tilde{\sigma}_1 = a/b;$$

асимптота $\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_1 a/b + (1+a-b)/(a-b)$.

Показанные на рис. 2.3 кривые (I, II, III) относятся к первому случаю, и таким образом он находит экспериментальное подтверждение. Второй случай указывает на то, что знаменатель в (2.16) может обращаться в нуль при отношении $\tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_3 < 1$, точнее при $\tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_3 = b/a$. В данном случае при $\tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_3 > b/a$ разрушение невозможно. Имеется ли в действительности указанная область неразрушимости бетона и каковы ее границы пока утверждать трудно.

Описанный анализ показывает, что точность зависимости (2.18) для практических расчетов является вполне достаточной, однако для целей исследования, особенно высоких уровней обжатия, а также смешанных напряженных состояний, может представить интерес зависимости типа

$$\beta_n = \frac{a_0 + a_1 m + a_2 m^2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2},$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 = 1; b_0 + b_1 + b_2 = 1),$$

которая приводит к кубическому уравнению относительно β_1 или β_3 .

Общая зависимость для характерной функции прочности бетона. Представленные выше зависимости (2.15), (2.18) относились к частному трехосному сжатию $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Функцию (2.15) можно распространить на все случаи трехосного сжатия, если ввести в нее вместо единицы дополнительную функцию k_c , тогда

$$\tilde{\sigma}_3 = k_c + \beta_{II} \tilde{\sigma}_1. \quad (2.20)$$

Функцию k_c определим как относительную безразмерную функцию изменения прочности бетона при двухосном сжатии (этот вопрос рассмотрен ниже).

Однако зависимости (2.20) в сочетании с (2.18) обладают еще тем недостатком, что они не распространяются на смешанные напряженные состояния растяжения — сжатия и на случаи чистого растяжения. Этот недостаток, как показано в [72], можно устранить, приняв функцию β_{II} и входящий в нее параметр m в виде:

$$\beta_{II} = \frac{1 + a - am}{b + (f - b)m}; \quad (2.21)$$

$$m = (\tilde{\sigma}_1 + \delta_p) / (\tilde{\sigma}_3 + \delta_p), \quad (2.22)$$

где δ_p — определяется как относительная (безразмерная) функция изменения прочности бетона при двухосном сжатии (ее рассмотрение также выделено отдельно).

Параметр f к перечисленным выше свойствам не имеет отношения. От него зависит новое свойство критерия, а именно: будет ли поверхность замкнутой ($f > 1$) или разомкнутой ($f = 1$) в области всестороннего равномерного сжатия. Таким образом в довольно компактной форме удается учесть все основные требования, предъявляемые к критериям прочности бетона. Функцию (2.20) в сочетании с (2.21) назовем общей характерной функцией прочности бетона при объемном напряженном состоянии.

Распространение функции β_{II} на область растяжения накладывает на параметры a и b , входящие в β_{II} , одно ограничение. Установим это ограничение. Обработка экспериментальных исследований показала, что выражение (2.21) хорошо описывает прочность бетона в области растяжения, если в случае плоского растяжения условие (2.22) приводит к $m = 0$. Требование будет выполняться, если при $\tilde{\sigma}_3 = 0$, $\beta_1 + \beta_p = 0$. Учитывая эти условия, соотношения (2.20) и (2.21) можно преобразовать к виду:

$$0 = k_c - \beta_{II} \delta_p; \quad \beta_{II} = (1 + a)/b.$$

Внося β_{II} в первое уравнение, находим

$$k_c b - (1 + a) \delta_p = 0. \quad (2.23)$$

Обозначая $n = a/b$, условие (2.23) можно переписать:

$$b = \frac{\delta_p}{k_c - n \delta_p}. \quad (2.24)$$

Остановимся на результатах экспериментальных исследований новой функции β_{II} при $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ($\mu_\sigma = +1$), то

$$k_c = 1; \quad \delta_p = \delta_{p2} = R_{bt2}/R_{bc}, \quad (2.25)$$

где R_{bt2} — прочность бетона при двухосном равномерном растяжении.

Заметим, что если $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ($\mu_\sigma = -1$), то

$$k_c = k_{c2} = R_{bc2}/R_{bc}; \quad \delta_p = \delta_{p1} = R_{bt1}/R_{bc}, \quad (2.26)$$

где R_{bc2} — прочность бетона при двухосном равномерном сжатии.

Таким образом в относительных функциях k_c и δ_p прочность бетона относится к его прочности при одноосном сжатии.

Новые графики функции β_{II} , представленной в виде (2.21), (2.22), показаны на рис. 2.4, где: 1 — теоретическая линия для тяжелого бетона ($R_{bc} = 10$ МПа, $n = 1$, $\delta_{bp1} = 0,12$; 2 — то же ($R_{bc} = 50$ МПа; $\delta_{p1} = 0,06$; $n = 1$); 3 — для мелкозернистого бетона ($R_{bc} = 35,4$ МПа, $\delta_{p1} = 0,089$; $n = 3$); 4 — для условного пористого бетона ($R_{bc} = 10$ МПа, $\delta_{p1} = 0,12$; $f = 2$); ● — опытные данные для тяжелого

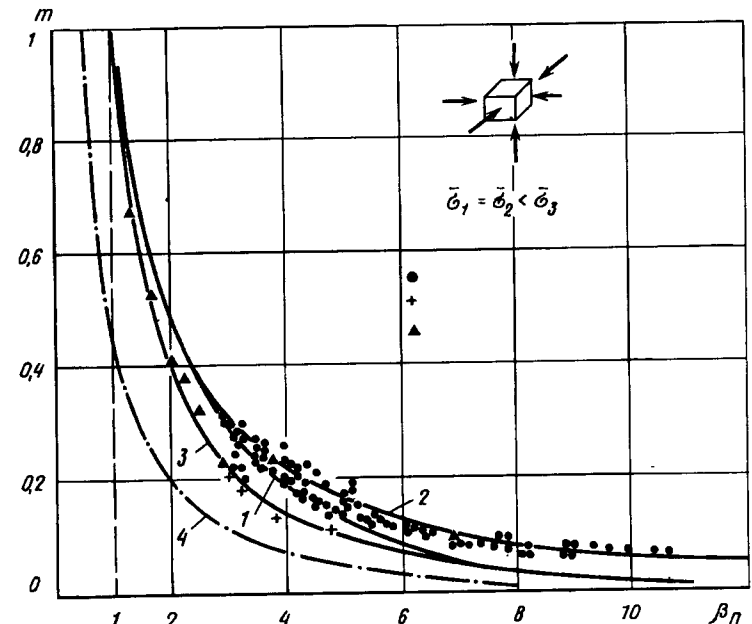


Рис. 2.4. Графики функции β_{II} для трехосного сжатия $\sigma_3 > \sigma_2 = \sigma_1$ и данные опытов

бетона ($R_{bc} = 5-60$ МПа); «+» — для мелкозернистого бетона; ▲ — для раствора ($R_{bc} = 12,7; 27; 35,4$ МПа).

Новые значения β_n также удовлетворительно согласуются с данными экспериментов (использованы эксперименты, представленные ранее на рис. 2.3). Однако параметры функции β_n изменились. Для тяжелых бетонов $n \approx 1 - (-1)$, а для мелкозернистых $n \approx (-1) - (-3)$. Значения b являются зависимыми и определяются по формуле (2.24).

Более полные экспериментальные исследования параметров n и f новой функции β_n были выполнены в НИИЖБ [138, 148] (в [149] испытывались образцы из тяжелого и мелкозернистого бетона, в [137, 138] — образцы из шлакопемзобетона). Эксперименты выполнялись под руководством А.В. Яшина. Для анализа были также привлечены и экспериментальные данные других исследователей. Результаты этих исследований приведены в таблице.

Таблица

Вид бетона	Коэффициенты	
	f	$n = a/b$
Тяжелый	1	1
Мелкозернистый	1,05	-3
Шлакопемзобетон	1,25	0,8
Термолитобетон	1,1	0,9
На зольном гравии	1,1	1
Керамзитобетон	1,1	1,2

Заметим еще, что графики на рис. 2.3 и 2.4 дают наглядное представление о влиянии бокового обжатия на прочность элемента при неодносном сжатии типа $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Эффективность бокового обжатия характеризуется параметром β_n . В начале, при низких величинах обжатия, чему соответствуют малые значения m , эффективность обжатия весьма высока ($\beta_n = 8...10$), затем она постепенно снижается и при очень высоких уровнях бокового обжатия становится равной единице ($\beta_n \rightarrow 1$). Можно также сделать вывод, что для растворов и мелкозернистых бетонов эффективность бокового обжатия снижается (по мере его увеличения) более интенсивно, чем для обычных бетонов. Для пористых бетонов с самого начала боковое обжатие оказывается менее эффективным, хотя определенное влияние его сохраняется.

Функции k_c и δ_p^* — прочности бетона при двухосном сжатии и двухосном растяжении. Значения k_c и δ_p^* будем связывать с коэффициентом Лоде — Надаи

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.27)$$

В случае двухосного сжатия ($\sigma_1 = 0$) и двухосного растяжения ($\sigma_3 = 0$) из этой формулы следует:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{1 - \mu_\sigma}{2}; \quad (2.28)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 + \mu_\sigma}{2}. \quad (2.29)$$

Функции k_c и δ_p^* устанавливаются на основе обработки экспериментальных данных о прочности бетона соответственно при двухосном сжатии — напряжениями σ_3, σ_2 и двухосном растяжении — напряжениями σ_1, σ_2 . В построениях, как уже указывалось, используются относительные значения напряжений $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$, определяемые выражениями (2.14). Укажем сначала на общие схемы обработки экспериментов и полученные выражения для k_c и δ_p^* , а затем уже представим результаты экспериментальных исследований.

Функция k_c выбрана так, что в условиях двухосного сжатия ее значения совпадают с предельными значениями $\bar{\sigma}_3$. В связи с этим при ее определении можно поступать обычным образом: в безразмерных координатах $\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2$ наносить опытные точки, соответствующие исчерпанию прочности опытных образцов в условиях двухосного сжатия, а затем устанавливать для них аппроксимации вида $\bar{\sigma}_3 = k_c = f(\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_3)$ (см. s на рис. 2.5, а). Они носят промежуточный характер. Вид промежуточной аппроксимации здесь оговаривается специально, так

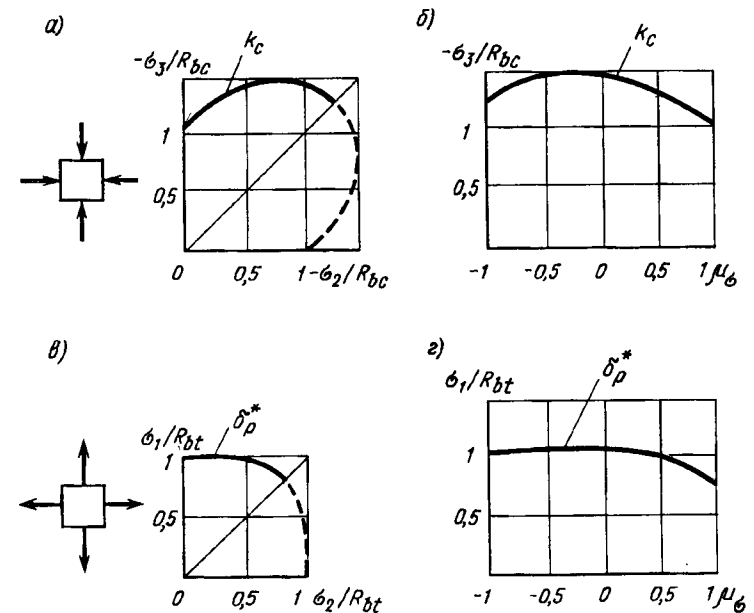


Рис. 2.5. К построению функций k_c и δ_p^*

как функции такого вида могут быть легко преобразованы затем в окончательные функции вида $k_c = f_1(\mu_\sigma)$, учитывая формулу (2.28). Промежutoчную стадию построения функций k_c можно опустить, если построения с самого начала выполнять в координатах $\tilde{\sigma}_3, \mu_\sigma$ (см. рис. 2.5, б).

Результаты известных экспериментов можно описать универсальной зависимостью

$$k_c = 1 + \varphi_R = 1 + \varphi_R(e) \left\{ 1 - \left[\frac{(1-c)(1-\mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1-\mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\}, \quad (2.30)$$

где φ_R — приращение относительной прочности бетона при двухосном сжатии по отношению к одноосному ($\varphi_{R(e)}$ — максимальное приращение); e, c — геометрические параметры; e — определяет положение максимума k_c в зависимости от отношения $\tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_3$ ($0 < e < 1$):

$$c = \frac{1 - e - de}{1 - e + d - de}; \quad d = \sqrt{1 - \frac{\varphi_{R(-1)}}{\varphi_{R(e)}}},$$

$\varphi_{R(-1)}$ — значение φ_R в точке двухосного равномерного сжатия.

Для тяжелых бетонов:

$$\varphi_{R(e)} \approx 3 \delta_{p(1)} (1 - \delta_{p(1)}); \quad e \approx 0,3 + \frac{R_{bc}}{R_{b(0)}}; \quad \frac{\varphi_{R(-1)}}{\varphi_{R(e)}} \approx 0,5;$$

$$R_{b(0)} \approx 200 \text{ МПа.}$$

Значения $\delta_{p(1)}$ определяются зависимостью (2.26). Обычно $\varphi_{R(-1)} > 0$, что соответствует увеличению прочности бетона при двухосном равномерном сжатии, однако представленные зависимости позволяют описать и случай $\varphi_{R(-1)} < 0$.

Перейдем к рассмотрению функции δ_p . При двухосном растяжении $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_p = 0$, поэтому $\delta_p = -\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_1/R_{bc}$. Это соотношение связано со способом задания m по формуле (2.22), выше оно уже рассматривалось в связи с формулой (2.23). Здесь также (по аналогии с двухосным сжатием) возможны два способа построения функций δ_p (см. рис. 2.5, в, г). В первом способе на основании экспериментальных данных ищутся сначала аппроксимации вида $\delta_p^* = \delta_p/\delta_{p1} = \tilde{\sigma}_1/R_{bc} = f(\tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1)$, которые затем преобразовываются в окончательные аппроксимации $\delta_p = f_1(\mu_\sigma)$, учитывая зависимости (2.29), а во втором — окончательные зависимости устанавливаются непосредственно (см. рис. 2.5, г). Отношение $\delta_p/\delta_{p1} = \delta_p^*$ более удобно в анализе, поскольку при одноосном растяжении оно равно единице и затем незначительно от нее отклоняется. Кривую δ_p можно описать следующей интерполяционной формулой

$$\delta_p = \delta_{p2} + (\delta_{p1} - \delta_{p2}) \times \left[1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)(\mu_\sigma^* + p)}{(1 - \mu_p^*)(1 + p)} \right], \quad (2.31)$$

где μ_σ^* — параметр, отличающийся от параметра Лоде — Надаи константой Δ ,

$$\mu_\sigma^* = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}, \quad (2.32)$$

здесь $\Delta \approx 0,25 R_{bc}$; μ_p получают, заменяя в (2.32) σ_2 на σ_3 (необходимость введения Δ поясняется ниже); p — эмпирический коэффициент [$p = (-1) - (2)$], в среднем $p = 0$; $\delta_{p(1)}, \delta_{p(2)}$ — относительные величины прочности бетона при растяжении, определяемые формулами (2.25), (2.26); в среднем

$$\delta_{p2} \approx \delta_{p1} (1 - \delta_{p1}). \quad (2.33)$$

Полагая в (2.31) $p = 2$, $\delta_{p2} \approx 0,81\delta_{p1}$, получим график δ_p , соответствующий некоторой нижней границе прочности бетона при двухосном растяжении; значения $p = -0,95$; $\delta_{p2} \approx 0,95\delta_{p1}$ приводят к некоторой верхней границе. Введение μ_σ^* вместо μ_σ позволяет замыкать поверхность прочности в области равномерного трехосного растяжения. Параметр μ_σ этом случае приводит к неопределенности.

Общее условие прочности. Внося (2.22) в (2.21), а затем подставляя полученное выражение $\tilde{\beta}_n$ в уравнение (2.20), получим окончательный вид условия прочности

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{\sigma}_1^2 + b \tilde{\sigma}_3^2 - \tilde{\sigma}_1 [k_c(f - b) + \delta_p] - \tilde{\sigma}_3 (k_c b - f \delta_p) \\ - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_3 (a + b + 1 - f) - k_f \delta_p = 0; \end{aligned} \quad (2.34)$$

($\tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_2 < \tilde{\sigma}_3$).

В этом условии: параметры k_c и δ_p вычисляются по формулам (2.30), (2.31), параметр f назначается по табл. 2.1; параметр b вычисляется по формуле (2.24), используя значение $n = a/b$ из табл. 2.1, параметр a находится по формуле $a = nb$. При определении k_c и δ_p параметр Лоде — Надаи μ_σ вычисляется по общей формуле (2.27). Частные выражения (2.28) и (2.29) служат лишь для установления этих параметров на основании экспериментов.

Остановимся на физическом смысле параметра f . Для трехосного равномерного растяжения ($\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}$) из условия (2.34) следует

$$\tilde{\sigma}^2 (f - 1) - \tilde{\sigma} [k_f - \delta_p (f - 1)] - k_c / \delta_p = 0. \quad (2.34)$$

При $f = 1$ уравнение (2.34) имеет единственное решение $\tilde{\sigma} = -\delta_p$ в области растягивающих напряжений (параметр $\mu_\sigma = 1$, δ_p по формуле (2.31) принимает одно значение). Однако всестороннее равномерное сжатие не приводит к разрушению — критерий является разомкнутым. Такими свойствами, как уже указывалось, обычно наделяются условия, соответствующие тяжелым (плотным) бетонам. При $f \neq 1$ уравнение (2.34) имеет два решения: $\tilde{\sigma} = \delta_p$ и $\tilde{\sigma} = k_c / (f - 1)$; первое относится к случаю равномерного растяжения, а второе — к случаю равномерного сжатия. Наличие двух решений согласуется с данными для бетонов на пористых заполнителях. Полагая в области трехосного равномерного сжатия $\tilde{\sigma} = R_{bc3}/R_b$, где R_{bc3} — предел

прочности пористого бетона при трехосном равномерном сжатии, из второго решения ($f \neq 1$) находим

$$f = R_{bc3} / (R_{bc3} - k_c R_{bc}). \quad (2.35)$$

Таким образом, определив экспериментальным или другим способом R_{bc3} , можно непосредственно по формуле (2.35) вычислить f . Однако данные таких экспериментов пока отсутствуют, поэтому параметр f устанавливался косвенным путем — на основании рис. 2.4, исходя из наилучшего приближения функции β_n к данным экспериментов.

Условие (2.34) записано в относительных напряжениях, что создает удобства при выполнении расчетов. Однако оно легко преобразовывается к обычному виду

$$\begin{aligned} a\sigma_1^2 + b\sigma_3^2 + \sigma_1 [R_{bc} k_c (f - b) + \delta_p^* R_{bt}] + \sigma_3 (k_c b R_{bc} - f \delta_p^* R_{bt}) \\ - \sigma_1 \sigma_3 (a + b + 1 - f) - k_c f \delta_p^* R_{bc} R_{bc} = 0; \quad (2.36) \\ (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3), \end{aligned}$$

учитывая соотношения (2.12) и зависимость

$$\delta_p^* = \delta_p / \delta_{p1} = \delta_p R_{bc} / R_{bt}. \quad (2.37)$$

Запись условия (2.34) в цилиндрических координатах ($\sigma_0, \tau_0, \mu_\sigma$). Условия прочности (2.34) можно представить в ином виде — в виде зависимости между октаэдрическим касательным напряжением (τ_0), средним напряжением (σ_0) и параметром Лоде—Надаи μ_σ . Введем относительные величины $\tilde{\sigma}_0 = -\sigma_0 / R_{bc}$, $\tilde{\tau}_0 = \tau_0 / R_{bc}$, тогда соотношения (1.48) можно записать так:

$$\tilde{\sigma}_{1,3} = \tilde{\sigma}_0 \mp \frac{3 \mp \mu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \tilde{\tau}_0 \quad (2.38)$$

(знак минус соответствует $\tilde{\sigma}_1$, плюс $\tilde{\sigma}_3$).

Внося (2.38) в (2.34), находим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\tau}_0^2}{2(3 + \mu_\sigma^2)} [6b(3 + \mu_\sigma) + 6a(3 - \mu_\sigma) - 9(f - 1) + \\ + \mu_\sigma^2(f - 1)] + \frac{\tilde{\tau}_0}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} [k_c(3f - 6b - f\mu_\sigma) + \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$+ 3\delta_p(f + 1) + \delta_p \mu_\sigma(f - 1)] + \frac{2\tilde{\tau}_0 \tilde{\sigma}_0}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} [3(b - a) +$$

$$+ \mu_\sigma(f - 1)] - \tilde{\sigma}_0 [k_c f - \delta_p(f - 1)] + \tilde{\sigma}_0^2(f - 1) - k_c f \delta_p = 0.$$

Зависимость μ_σ^* в этом случае также преобразуется, используя соотношения (1.47),

$$\mu_\sigma^* = \frac{\mu_\sigma + \Phi \tilde{\tau}_0^{-1}}{1 + \Phi \tilde{\tau}_0^{-1}} \quad (2.40)$$

$$\text{где } \Phi = \frac{\tilde{\Delta} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}{3\sqrt{2}}; \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{R_{bc}}.$$

Уравнение (2.39) соответствует $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \leq \tilde{\sigma}_3$ и $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$. Оно определяет одну шестую часть общей поверхности прочности (на рис. 2.2, а, в она заключена между линиями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$). Остальные пять частей являются повторением представленной части; они строятся для оставшихся [из (2.4)] пяти других возможных комбинаций между главными напряжениями (например, $\tilde{\sigma}_2 \geq \tilde{\sigma}_3 \leq \tilde{\sigma}_1$ и так далее).

Полагая неизвестным τ_0 , а заданными σ_0 и μ_σ , можно вычислить τ_0 из решения квадратного уравнения (2.39). Это решение удобно использовать для построения главных кривых поверхности прочности. Фиксируя в этом решении μ_σ и изменяя σ_0 , строят кривые ($\tau_0 - \sigma_0$) — меридиональные кривые (рис. 2.2, з); фиксируя σ_0 и изменяя μ_σ ($-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$), находят кривые ($\tau_0 - \mu_\sigma$) девиаторные кривые (следы поверхности прочности на сечении ее девиаторной плоскостью, рис. 2.2, в). В связи с тем, что параметры μ_σ и μ_σ^* различаются при указанных построениях, решения ищут последовательными приближениями, например, вначале заменяя μ_σ^* на μ_σ , а затем уточняя μ_σ^* по формуле (2.40).

Девиаторные фигуры не являются афиноподобными, а изменяются (по мере увеличения σ_0) от линейного или криволинейного треугольника до шестиугольника или окружности (рис. 2.6, а—в, где а — тяжелый бетон ($R_{bc} = 50$ МПа); б — то же при $R_{bc} = 10$ МПа; в — условный бетон: 1 — $\tilde{\sigma}_{bc} = -0,02$; 2 — $\tilde{\sigma}_0 = 0,25$; 3 — $\tilde{\sigma}_{bc} = 1,5$; 4 — $\tilde{\sigma}_0 = 10$; 5 — $\tilde{\sigma}_0 = 10^4$). Фигуры девиаторных кривых также зависят от вида бетона, например, для низкопрочных бетонов они могут трансформироваться в некоторые выпуклые лепестковые фигуры, отличающиеся, однако, от известной двенадцатилепестковой фигуры Хилла. Таким образом, общие условия прочности не должны строиться на одном виде девиаторных кривых и по принципу афиноподобия девиаторных кривых, как это фактически принимается некоторыми авторами.

Условие выпуклости меридиональных кривых накладывает дополнительное ограничение на значение параметра a ,

$$a \leq \frac{[k_c f(3 + \mu_\sigma) + 3\delta_p(f + 1) + \delta_p \mu_\sigma(f - 1)](f - 1) + 6\delta_p}{6(k_c f - \delta_p)}, \quad (2.41)$$

которое, однако, при рекомендуемых параметрах $a < b$ удовлетворяется автоматически.

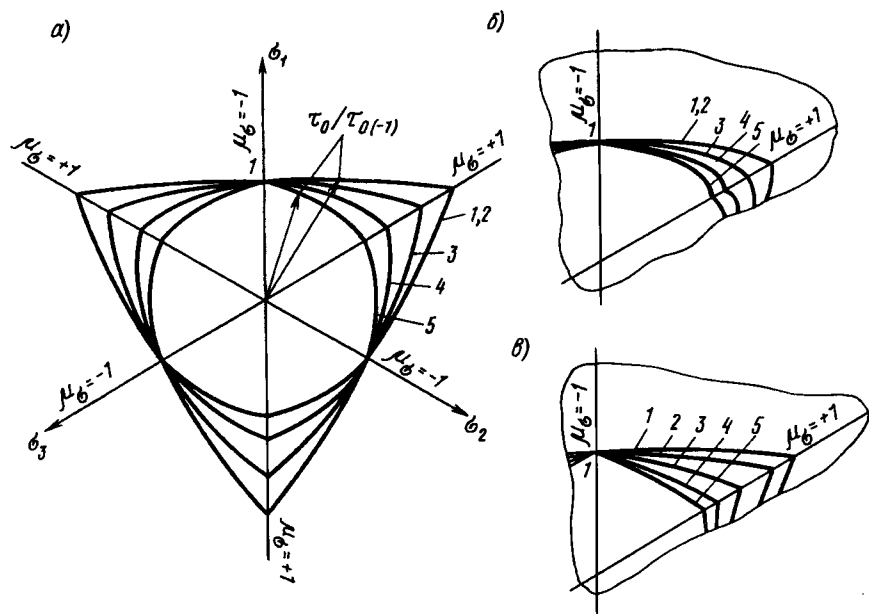


Рис. 2.6. Девиаторные кривые для различных бетонов в относительных координатах $\tau_0/\tau_{0(-)}$ соответствующие различным уровням $\sigma_{0i}/\tau_{0(-)}$ — значение τ_0 при $\mu_{\sigma_i} = -1$

Результаты экспериментальной проверки. Представленный критерий прочности хорошо согласуется с данными экспериментов при различных напряженных состояниях (рис. 2.7–2.8). На рис. 2.7, а–е показаны: а — двухосное однородное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2$) со сжатием по третьему направлению; б — трехосное растяжение при $\sigma_1 = \sigma_2$; в — растяжение со сжатием при $\sigma_3 = 0$; г — двухосное растяжение ($\sigma_3 = 0$); д — двухосное сжатие ($\sigma_1 = 0$); е — двухосное однородное сжатие ($\sigma_3 = \sigma_2$) с растяжением по третьему направлению ($\sigma_1 > 0$); 1 — теоретические линии при $R_{bc} = 10$ МПа; $\delta_{p1} = 0,12$; 2 — то же при $R_{bc} = 50$ МПа, $\delta_{p1} = 0,06$; 3 — нижняя граница линий прочности при задании нижних значений k_c и δ_p ; 4, 5 — верхняя и нижняя границы достоверных опытных значений по работе А.И. Ноткуса и А.П. Кудзиса [137]; о — опытные данные (А.В. Яшина и Д.Я. Хананта [175; 188]).

Результаты анализа прочности бетона при трехосном сжатии представлены на рис. 2.8, а, б, в, г, где: а, б — при $\tilde{\sigma}_3 > \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$ (или $\tilde{\sigma}_3 < \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$); в — при $\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_2 > \tilde{\sigma}_1$ (или $\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_2 < \tilde{\sigma}_1$); 1 — теоретические данные ($R_{bc} = 10$ МПа, $n = 1$); 2 — то же при $R_{bc} = 50$ МПа, $n = 3$; 3 — то же при $R_{bc} = 50$ МПа, $n = 1$; условные значки — данные опытов [110, 115, 116, 172, 174, 175] с тяжелым бетоном $R_{bc} = 7–68$ МПа различных исследователей. Исследовалось

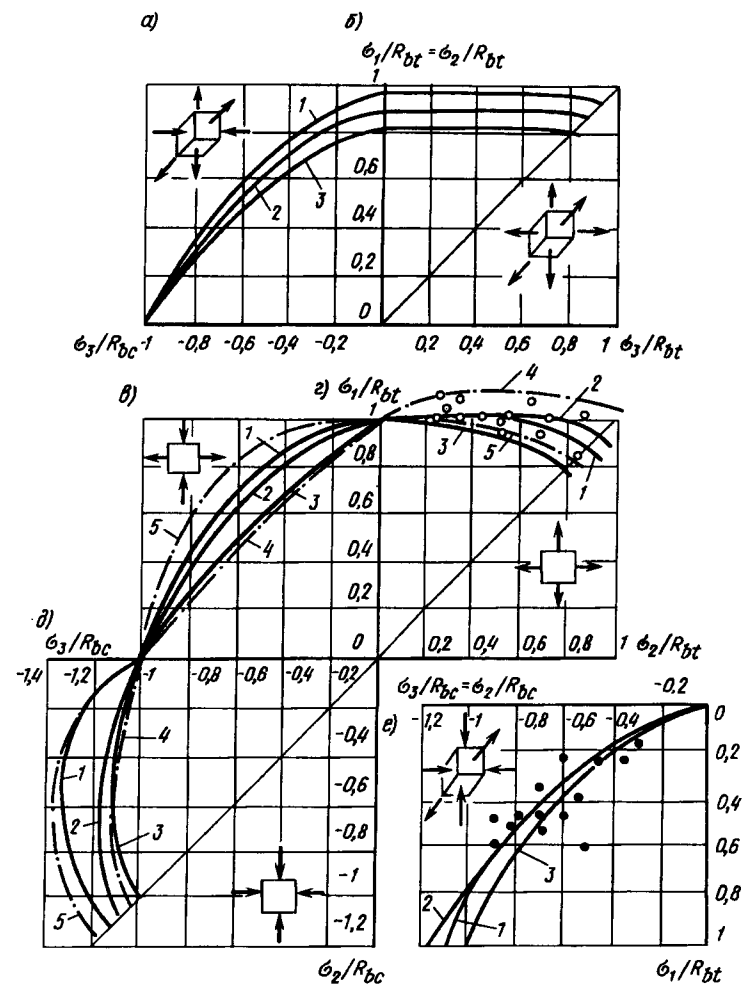


Рис. 2.7. Графики и опытные данные (по прочности) бетонов при различных напряжениях

шесть разновидностей бетона, которые указаны в таблице. Используются данные обширных опытов зарубежных исследователей (одни из них указаны при рассмотрении рис. 2.3, а другие заимствованы из обобщающего анализа D.J. Hannant [188] — Хананта), а также известные опыты наших исследователей — Л.К. Лукши, А.В. Яшина, Ю.Н. Малашкина и др. Получено хорошее согласование теории с данными опытов над бетонами различных видов. Границы теоретических линий при изменении параметров критерия могут существенно

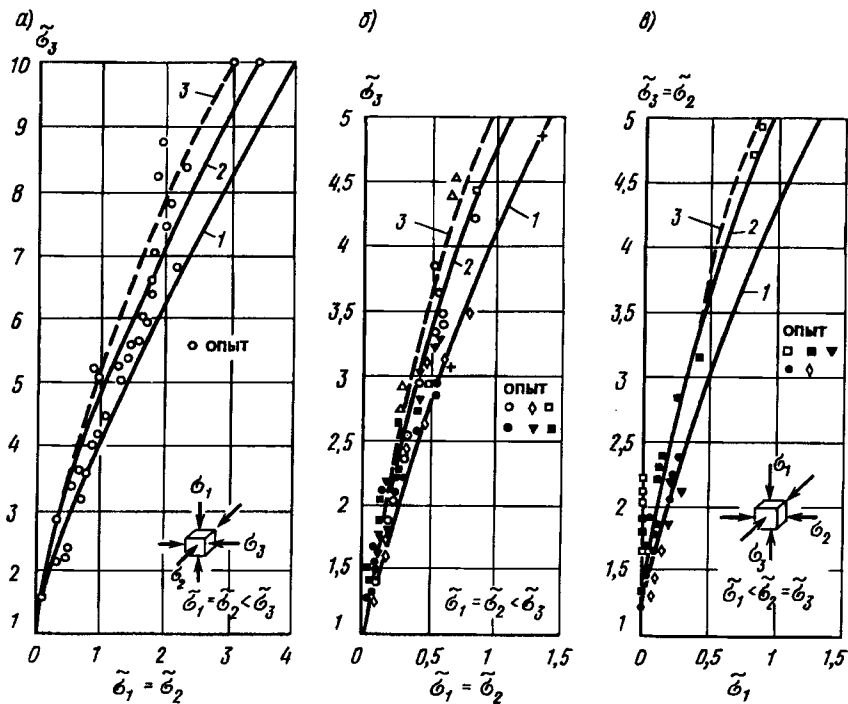


Рис. 2.8. Прочность бетонов при трехосном сжатии $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2$ (а, б) и $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$ (в) и данные опытов с тяжелым бетоном $R_{ac} = 7-68$ МПа

различаться и охватывать практически всю область опытных точек. Следует отметить, что факторы, влияющие на эти параметры, исследованы пока еще недостаточно полно.

2.4. ВОПРОСЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ

Коэффициенты запаса прочности и уровни напряжений.

Условие (2.34) или (2.36) в виде равенства нулю в правой части удовлетворяется не для всех текущих напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$, а только для тех, которые располагаются на поверхности прочности (для предельных напряжений). Естественно, может встать вопрос, в какой степени текущие напряжения отличаются от предельных.

Коэффициентом запаса прочности элемента конструкции называют величину θ , на которую следует умножить текущие напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или некоторые из них — в зависимости от режима нагружения, чтобы таким образом увеличенные напряжения (пред-

ельные напряжения) удовлетворяли условию (2.36) в виде равенства. Предельные напряжения обозначим $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ или $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$, если используется условие (2.34).

Величина, обратная θ , называется уровнем

$$\eta = 1/\theta.$$

Прочность элемента считается обеспеченной, если

$$\theta \geq 1 \text{ или } 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.42)$$

в других случаях элемент считается разрушенным.

Практические способы определения уровня напряжений и предельных напряжений. Как уже указывалось, условие (2.34) выполняется в виде равенства лишь в случае его записи относительно предельных напряжений, т.е. при

$$a\hat{\sigma}_1^2 + b\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_1[k_c(f-b) + \delta_p] - \hat{\sigma}_3(k_c b - f\delta_p) - \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3(a+b+1-f) - k_c f\delta_p = 0, \quad (\hat{\sigma}_1 \leq \hat{\sigma}_2 \leq \hat{\sigma}_3). \quad (2.44)$$

Аналогично условие (2.36) записывается

$$a\hat{\sigma}_1^2 + b\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_1[k_c R_{bc}(f-b) + \delta_p^* R_{bt}] + \hat{\sigma}_3(k_c b R_{bc} - f\delta_p^* R_{bt}) - \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3(a+b+1-f) - k_c f\delta_p^* R_{bt} R_{bc} = 0 \quad (\hat{\sigma}_1 \geq \hat{\sigma}_2 \geq \hat{\sigma}_3). \quad (2.45)$$

Заметим: параметры μ_σ и μ_σ^* должны соответствовать напряжениям $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$.

Способ определения уровня η зависит от режима (программы) нагружения. Пусть известны текущие напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В случае простого нагружения

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1/\eta; \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2/\eta; \quad \hat{\sigma}_3 = \sigma_3/\eta. \quad (2.46)$$

Внося значение $\hat{\sigma}_i$ ($i = 1, 2, 3$) из (2.46) в (2.45), приходим к определению η из решения квадратного уравнения. К таким же значениям η приводит подстановка в (2.44) относительных значений предельных напряжений:

$$\hat{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_1/\eta; \quad \hat{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_2/\eta; \quad \hat{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_3/\eta. \quad (2.47)$$

Для примера рассмотрим уравнение (2.45). В случае одностороннего догружения главными напряжениями $\hat{\sigma}_1$ (обычно напряжениями растяжения) будут:

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1/\eta; \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2; \quad \hat{\sigma}_3 = \sigma_3. \quad (2.48)$$

Внося (2.48) в (2.45), приходим к новому квадратному уравнению относительно η . Параметры μ_σ и μ_σ^* уточняются в процессе последовательных решений этого уравнения до тех пор, пока они не будут соответствовать $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$. Процесс последовательных приближений сходится довольно быстро.

В случае одностороннего догружения напряжениями, обычно напряжениями сжатия,

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1; \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2; \quad \hat{\sigma}_3 = \sigma_3/\eta. \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.45), получим иное квадратное уравнение для определения η . Здесь также параметры μ_{σ} и μ_{σ}^* уточняются в процессе последовательных приближений.

Вычислив уровень η , можно по соответствующим формулам (2.47, 2.48) или (2.49) найти предельные напряжения $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$. В случаях (2.48) и (2.49) предельные напряжения можно вычислять непосредственно из уравнений (2.45) или (2.44), фиксируя $\hat{\sigma}_3$ или $\hat{\sigma}_1$ ($\hat{\sigma}_3$ или $\hat{\sigma}_1$). Принимают больший корень уравнения.

Выделим случай трехосного неравномерного сжатия ($\hat{\sigma}_1 < 0$) и случай трехосного растяжения совместно со случаями смешанных напряжений ($\hat{\sigma}_1 > 0$). Если режим возможного догружения конструкции неизвестен, то в случае $\hat{\sigma}_1 > 0$ уровень η можно вычислять дважды, исходя из условий (2.46) и (2.48) и из двух значений η выбирать большее. В случае $\hat{\sigma}_1 < 0$ условие (2.49) всегда будет приводить к более высокому уровню, поэтому оно предпочтительнее.

Один из возможных простых способов определения предельных напряжений может быть связан еще с решением квадратного уравнения (2.39) относительно $\tilde{\tau}_0$ при фиксированных значениях $\tilde{\sigma}_0$ и μ_{σ} . Определив предельные значения $\tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\sigma}_0$, затем по формулам (2.38) можно вычислить соответствующие им предельные главные напряжения.

Описанные способы определения предельных напряжений по сути являются способами выхода на предельную поверхность из заданной точки $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Графически они показаны на рис. 2.9. Условия (2.46) описывают выход на предельную поверхность по лучу MM_1 , который строится на продолжении луча OM . Условия (2.47) приводят к выходу на поверхность прочности по лучу MM_2 , который проводится параллельно оси σ_1 — при выполнении условий (2.49) луч MM_3 проводится параллельно оси σ_3 . Способ, рассмотренный выше последним, связан с проведением через точку M девиаторной плоскости и построением на ней девиаторной кривой (D на рис. 2.9, б) критерия прочности. Выход на поверхность прочности (девиаторную кривую) осуществляется по лучу MM_4 , который строится на продолжении луча $O'M$ (O' — центр девиаторной фигуры).

Способ выхода на предельную поверхность тесно связан с той или иной деформационной моделью бетона.

Трещинообразование и разрушение. Нарушение условия (2.45) может означать или полное разрушение элемента или разделение его трещинами на отдельные части, которые еще могут воспринимать определенным образом ориентированные напряжения, направленные вдоль трещин. В связи с этим можно выделить четыре схемы истощения прочности бетонных элементов (рис. 2.10, где показаны напряжения, вызывающие истощение прочности на той или иной

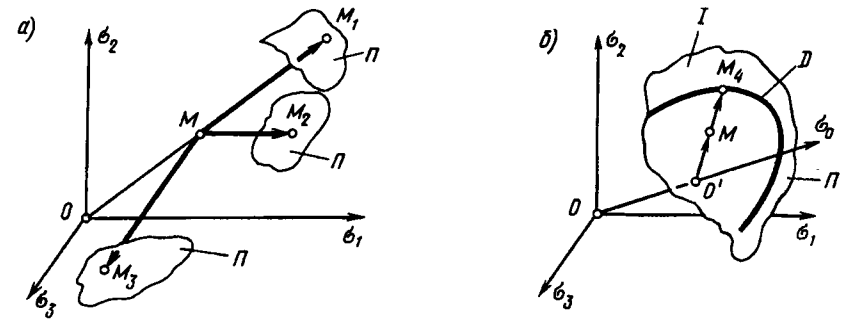


Рис. 2.9. Схемы выхода на поверхность прочности: а — по лучам MM_1, MM_2, MM_3 ; б — по лучу MM_4 ; Π — фрагменты поверхности прочности; D — фрагмент девиаторной кривой поверхности прочности на девиаторной плоскости; I — проведенная через точку M

схеме). Схема 0. (см. рис. 2.10, а) соответствует разрушению элемента по всему объему вследствие трехосного, двухосного и одноосного сжатия. В некоторых работах к этому виду разрушения относят и разрушения при смешанных напряжениях сжатия — растяжения, когда напряжения сжатия являются высокими, а напряжения растяжения незначительными [примерно при $\hat{\sigma}_3 \approx (0,8 - 0,9) R_c$].

Схема 1 (см. рис. 2.10, б) соответствует образованию трещины, площадка которой ортогональна к направлению главного растягивающего напряжения σ_1 (остальные напряжения (σ_1, σ_3) могут быть как сжимающими, так и растягивающими; в последнем случае, однако, меньшими, чем напряжение σ_1).

Схема 2 (см. рис. 2.10, в) соответствует образованию двух взаимно ортогональных трещин, площадки которых ортогональны к направлениям главных напряжений σ_1 и σ_2 (обычно при $\sigma_1 \approx \sigma_2$, напряжение σ_3 может быть как сжимающим, так и растягивающим, но меньшим, чем σ_1).

Схема 3 (см. рис. 2.10, г) соответствует образованию трех взаимно ортогональных трещин, обычно при $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3$; элемент с такой схемой не может воспринимать растягивающие напряжения.

Для схемы 0 возможны две ситуации: происходит быстрое разрушение бетона и элемент полностью выключается из работы; начинается плавное разрушение образца, которое сопровождается падением напряжений при одновременном росте деформаций (по типу ниспадающей ветви на диаграмме $\sigma - \epsilon$). Такое разрушение характеризуется образованием множества внутренних трещин до тех пор, пока среди них не выделится некоторая магистральная трещина, приводящая к разрушению. Возможности учета второй ситуации в практических расчетах остаются пока ограниченными; в основном имеются попытки учесть эту ситуацию в некоторых исследовательских программах расчета конструкций на ЭВМ.

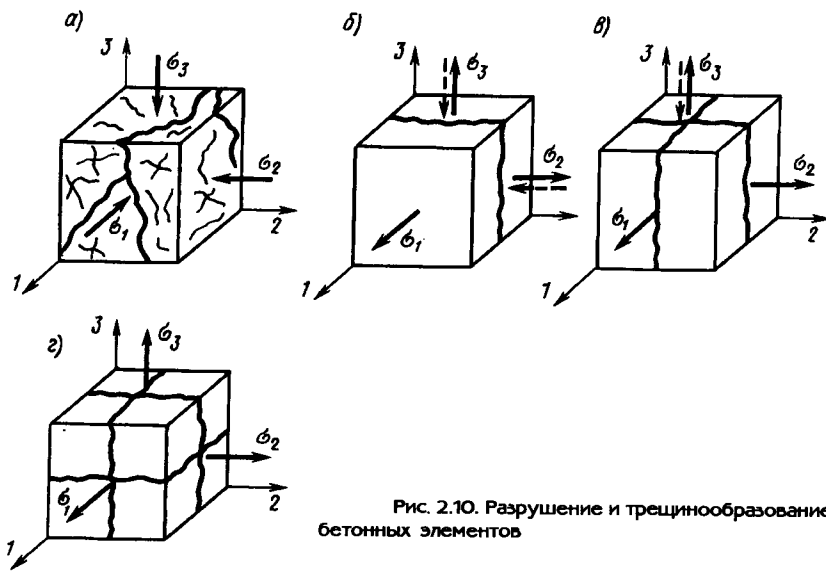


Рис. 2.10. Разрушение и трещинообразование бетонных элементов

Образование трещин по схемам 1–3 моделируется как скачкообразный процесс, в результате которого напряжения, нормальные к площадке трещин, становятся равными нулю (в сквозных трещинах) или уменьшаются до некоторых небольших значений в оставшихся связях зацепления берегов трещин (в прерывистых трещинах), которые затем уменьшаются по типу нисходящей ветви. Факторы зацепления учитываются в модели деформирования железобетона с трещинами (см. гл. 6). Таким образом теория прочности бетона приближается к моделированию реальных процессов разрушения этого материала.

2.5. СОСТАВНЫЕ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

Выше рассматривалось построение единого критерия прочности, охватывающего все виды напряженных состояний. Однако в ряде случаев могут представлять интерес поверхности прочности, состоящие из отдельных состыкованных частей (составные поверхности). Например, они, имея достаточное количество варьируемых параметров, могут выступать в качестве инструмента для обобщения и своего рода хранения (через значения параметров) данных экспериментальных исследований. Примером составной поверхности может служить поверхность, представленная на рис. 2.1, в, однако она для указанных целей еще не пригодна. К более общим можно отнести предложения Л.К. Лукши [111, 112] по построению состыкованных меридиональных кривых критерия прочности. Рассмотрим иные возможные способы.

Рис. 2.2, а показывает, что наиболее удобными для стыков являются линия c — двухосного сжатия и линия r — двухосного растяжения, между точкой t_3 и линией r располагается область трехосного растяжения, между линиями r и c область смешанных напряжений; за линией c — область трехосного сжатия.

Ранее были рассмотрены различные схемы выхода на предельную поверхность (см. рис. 2.9). Примем в качестве исходных: вторую схему, связанную с увеличением напряжений σ_3 — в случае трехосного сжатия, и третью схему, связанную с увеличением напряжений σ_1 в случае, если хотя бы одно из главных напряжений является растягивающим. На рис. 2.9 эти способы выхода на предельную поверхность показаны лучами MM_2 и MM_3 . Применительно к этим двум схемам критерий прочности можно представить в виде двух частей. Первая часть относится к области трехосного сжатия ($\sigma_1 > 0$ или $\sigma_1 < 0$). Примем, что условия (2.20)–(2.22) относятся только к этой области. Тогда в (2.22) следует принять формально $\sigma_p^* = 0$. Внося с учетом этого (2.21) в (2.20) и решая полученное квадратное уравнение относительно $\tilde{\sigma}_3$, находим

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{\tilde{\sigma}_1 [(b + a + 1 - f) + k_c b] / 2b + \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2 [(b + a + 1 - f) + k_c b]^2 / 4b^2 + [(f - b)k_c \tilde{\sigma}_1 - a \tilde{\sigma}_1^4] / b}}{1} \quad (2.50)$$

Зависимость (2.50) можно также непосредственно получить из (2.34), приняв формально $\sigma_p^* = 0$. В принципе можно использовать и уравнение (2.36), приняв в нем формально $\sigma_p^* = 0$.

В области смешанных напряжений и в области всестороннего растяжения, следуя [68], условие прочности записывается

$$\sigma_1 \leq R_{bt} k_{t2} k_{t3} / k_{o2} k_{o3}, \quad (2.51)$$

где

$$k_{ti} = 1 - \left[\frac{(1 - 2c) s_i}{1 - 2cs_i} \right]^2; \quad (2.52)$$

$$s_i = \left| \frac{\sigma_i + pR_{bt}}{pR_{bt} - R_{bc} k_c} \right|, \quad (i = 2, 3) \quad (2.53)$$

здесь s_i — некоторые уровни напряжений σ_2 и σ_3 ; k_i — вычисляется по формуле (2.30); p, c — эмпирические коэффициенты ($0 < p < 2$; c — зависит от вида и прочности бетона и определяется по указаниям [61], см. стр. 12; $-0,35 < c < 0,35$); k_{oi} ($i = 2, 3$) — коэффициенты, вычисляемые по формулам (2.52), (2.53) при $\sigma_i = 0$.

Недостаток составных критериев прочности заключается в том, что ими трудно пользоваться при моделировании сложных режимов нагружения (при переходе из одной области напряжений в другую).

Бетону свойственна ползучесть, которая, однако, в некоторые небольшие промежутки времени после приложения напряжений проявляется в малой степени. В связи с этим и главное для упрощения расчетов строят модели кратковременного и длительного нагружения.

В кратковременных моделях деформации ползучести, так называемые быстроснатекающие деформации ползучести, относят к неупругим деформациям и время действия напряжений в явном виде не вводят. Бетон в этом случае характеризуется нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями (нелинейными физическими соотношениями). Основная задача заключается в установлении этих соотношений применительно к общему случаю трехосного напряжения. Однако их нельзя установить без детального изучения исходных зависимостей между напряжениями и деформациями при одноосном напряжении. Поэтому вначале остановимся на этом частном случае, а затем рассмотрим трехосное напряжение.

3.1. ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ БЕТОНА. ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Диаграммы деформирования бетона, связывающие относительные деформации с напряжениями ($\epsilon_b - \sigma_b$) при одноосном сжатии и растяжении, привлекают к себе, особенно в последнее время, внимание исследователей. Они важны как с точки зрения непосредственного применения в расчетах бетонных и железобетонных конструкций (в основном стержневых), так и построения более общих моделей деформирования бетона, относящихся к неодноосным напряженным состояниям. В связи с этим остановимся на проблеме диаграмм более подробно.

Некоторые физические и другие аспекты, связанные с конструированием диаграмм. Как указывалось, базой для построения общих моделей служат результаты исследования диаграмм $\epsilon_b - \sigma_b$ при кратковременных испытаниях бетонных элементов (в пределах 20–60 мин: 20 мин при одноосном растяжении и 60 мин при сжатии). Такие диаграммы являются некоторыми исходными. Однако даже в пределах указанного времени на характер диаграмм влияет режим изменения скорости роста напряжений и деформаций в процессе испытания опытных образцов. Обычно выделяют два режима испытания — с постоянными скоростями роста деформаций и постоянными скоростями напряжений. За эталон принимается режим испытания

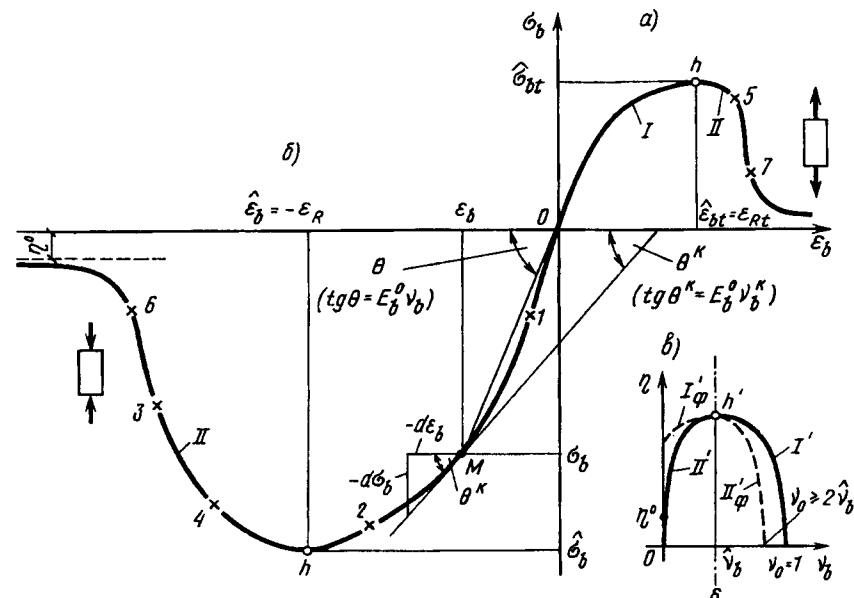


Рис. 3.1. Диаграммы деформирования бетона при растяжении (а) и сжатии (б); в — к построению диаграммы

с постоянными скоростями роста деформаций, который приводит к выявлению двухветвевых диаграмм деформирования бетона при растяжении (рис. 3.1, а) и сжатии (рис. 3.1, б). Считается, что такие диаграммы больше подходят к описанию реального деформирования «волокон» бетона в конструкциях. Двухветвевые диаграммы состоят из двух участков (ветвей): I — восходящих (до вершин h с напряжениями $\sigma_b = \hat{\sigma}_b$ — при сжатии и $\sigma_b = \hat{\sigma}_{bt}$ — при растяжении) и II — ниспадающих. В расчетах значения $\hat{\sigma}_b$ и $\hat{\sigma}_{bt}$ принимают равными нормативным $R_{b,ser}$, $R_{bt,ser}$, а иногда и расчетным R_b , R_{bt} характеристикам прочности бетона при сжатии и растяжении. Диаграммы сжатия и растяжения бетона существенно различаются по своим параметрам и кривизне ветвей. Обе эти диаграммы составляют полную диаграмму деформирования бетона (см. рис. 3.1, а, б).

В испытаниях образцов с постоянными скоростями роста напряжений реализуются только восходящие участки диаграмм. Для реализации нисходящих участков необходимо обеспечить определенную скорость снижения напряжений за вершиной диаграммы. При нагружении деформациями такое регулирование напряжений может осуществляться автоматически.

Характер искривления диаграмм определяется образованием внутренних трещин (развитием псевдопластических деформаций). Вкратце устоявшееся представление о механизме деформирования бетона при сжатии сводится к следующему [31, 15]. Еще в ненагру-

женном состоянии бетону, как материалу с неоднородной структурой, свойственны внутренние напряжения, микротрещины и другие дефекты. В начале сжатия может происходить частичное закрытие трещин и некоторое уплотнение структуры бетона. Затем вступает в силу процесс образования новых микротрещин, в основном трещин отрыва вдоль действия напряжений, который сменяется процессом их неустойчивого развития, ветвления и объединения в некоторые неустойчивые макротрещины (вблизи вершины диаграммы и особенно на нисходящей ветви), приводящие в итоге к разрушению образца.

Указанные процессы трещинообразования тормозятся при снижении скорости приложения напряжений вблизи вершины диаграммы и при уменьшении напряжений (с определенной скоростью) в пределах ниспадающей ветви. В опытах скорости уменьшения напряжений могут задаваться любыми, поэтому и ниспадающие ветви могут быть различными, в том числе проявляться частично или вовсе отсутствовать. Естественно, для сопоставления данных экспериментов, особенно на нестандартном оборудовании, необходимо авторам оговаривать режим изменения скоростей напряжений вблизи вершины и на ниспадающей ветви.

В принципе указанная неустойчивость ниспадающих ветвей делает проблематичным их использование в расчетах. Однако это использование оправдывает два обстоятельства: небольшие различия результатов расчета при изменениях нисходящих ветвей в определенных пределах; улучшение сходимости расчетов с данными экспериментов над конструкциями при введении в расчет нисходящих ветвей (они увеличивают перераспределительную способность напряжений в конструкциях).

Чтобы каким-то образом зафиксировать основные элементы этого процесса развития внутренних трещин при описании диаграммы сжатия бетона, на кривых $\epsilon_b - \sigma_b$ иногда выделяют (по предложению О.Я. Берга [15]) две характерные параметрические точки — нижнюю и верхнюю (1, 2 на рис. 3.1, б). Нижняя параметрическая точка соответствует началу образования новых трещин, практически началу отклонения диаграммы от начальной прямой линии, а верхняя, расположенная вблизи вершины диаграммы на восходящей ветви, — началу неустойчивого развития внутренних трещин. Практически к этой точке относят точку на диаграмме, в которой объемные деформации становятся равными нулю; как указывалось в гл. 1, объемные деформации при сжатии по абсолютной величине сначала уменьшаются, а затем, вследствие «разбухания» образца от трещинообразования начинают снижаться и после верхней параметрической точки, наоборот, увеличиваются.

В работах украинской школы (А.Б. Гольшев, В.Д. Бачинский, А.Н. Бамбура) выделяется еще одна дополнительная точка на нисходящем участке диаграммы (3 на рис. 3.1, б), соответствующая, по мнению авторов, образованию магистральной трещины разрушения

бетона. Считается, что после этой точки, примерно после уровней напряжений, равных 0,5—0,7, нисходящая ветвь представляет уже не ветвь деформирования цельного бетонного образца, а ветвь деформирования отдельных частей раздробленного бетона. Ниже этой точки ниспадающую ветвь использовать в расчетах не рекомендуется.

Заметим, что в некоторых нормативных документах применимость ниспадающей ветви ограничивается точкой 4 (на рис. 3.1, б) с более высокими уровнями напряжений, равными 0,8, чем те, которые следуют из предпосылки об образовании магистральной трещины разрушения. Однако этот вопрос еще требует исследования, поскольку указанные ограничения не всегда приводят к уточнению расчетов, а нередко и мало на них влияют, в то время как расчетные алгоритмы усложняются. Да и в целом специальное выделение параметрических точек в аналитических выражениях диаграмм вряд ли целесообразно; они могут выделяться, если только приобретают статус четких расчетных оценок, например оценок долговечности (как у О.Я. Берга).

В отличие от сжатия при растяжении начальные дефекты структуры, особенно усадочные трещины в поверхностном слое, не закрываются в начале приложения напряжений, а становятся опасными очагами раскрытия, а затем и развития отдельных из них (основных), вплоть до разделения элемента на отдельные части. Криволинейная диаграмма и нисходящая ветвь реализуется при растяжении в том случае (предположительно), если замедление скорости роста напряжений вблизи вершины диаграммы и скорость падения за вершиной таковы, что обеспечивают устойчивое развитие трещин или переводят развитие отдельных из них из квазиустойчивого в устойчивое. Естественно, что при этом важны всякие преграды на пути развития трещин, например крупный заполнитель, армирование.

Этот процесс прерывается в некоторой точке (5 на рис. 3.1, а) на ниспадающей ветви диаграммы образованием магистральной трещины (примерно при ширине раскрытия 0,025—0,035 мм). Однако ниспадающая ветвь после точки 5 может не заканчиваться, хотя уже описывает иную картину деформирования. После точки трещинообразования происходит практически скачкообразное падение напряжений до низкого уровня (линия 5—7). Напряжения после точки образования трещины выступают уже как некоторые условно распределенные по площади трещины напряжения в остаточных связях зацепления берегов трещины в виде бетонных мостиков [61].

Точка образования трещины приобретает значение расчетной точки, характеризующей с определенной долей условности переход элемента из стадии деформирования бетона без трещин в качественно новую (особенно для железобетонных элементов) стадию работы с трещинами. За этой точкой, ее обычно называют точкой трещинообразования, моментом трещинообразования, арматура железобетонных элементов переходит в иную стадию деформирования, что в итоге приводит к изменению физических соотношений. В расчетах железобетонных элементов

бетонных элементов ниспадающая ветвь после точки трещинообразования учитывается иным путем — в виде задания некоторых функций зацепления берегов трещин. В принципе связями зацепления можно пренебрегать, за исключением слабоармированных элементов, где роль зацепления становится заметной.

В экспериментальном плане диаграммы при растяжении исследованы в меньшей степени, чем при сжатии. Двухветвевую диаграмму $\epsilon_{bt} - \sigma_{bt}$ растяжения бетона исследователи получают, тщательно обеспечивая специальными приспособлениями определенные скорости роста продольных деформаций, хотя такие попытки не всегда приводят к успеху из-за неустойчивости механизма трещинообразования. Отсюда — противоречивость опытных данных.

Можно указать на большое количество предложений по описанию диаграмм. Среди них следует выделить некоторые теоретические подходы: А.А. Гвоздева — с позиции накопления повреждений, М.М. Холмянского — с позиции статистической теории прочности неоднородных композиций, разрушающихся хрупко или по отрывному механизму, В.М. Бондаренко — с некоторых энергетических позиций. Однако в работах большинства авторов предлагались или совершенствовались ранее предложенные феноменологические зависимости в виде полиномов, степенных, дробных и других функций. Их обзор дан в [78] и многих других работах, поэтому на этом вопросе не будем останавливаться, заметим только, что не многие из предложенных функций отвечают ряду важных условий.

Таковыми условиями являются: возможность наиболее полного отражения через форму деструктивных процессов, происходящих в структуре бетона при приложении напряжений; сравнительная простота аналитической зависимости и ее приведения к секущим и касательным модулям (при $d\sigma_b/d\epsilon_b = 0$ в вершине); увязка с современными численными методами решения нелинейных задач. При этом подразумевается, что секущие и касательные модули, определяемые на основании диаграммы, должны сравнительно просто выражаться как через уровни напряжений, так и уровни относительных деформаций и, кроме того, удобным образом входить в коэффициенты общих матриц жесткости элементов; возможность простой перестройки (трансформирования) аналитической зависимости при переходе к описаниям одноосных напряженных состояний, а также при учете различных факторов, влияющих на диаграмму. Ниже представлена одна из зависимостей, которая удовлетворяет указанным условиям. Зависимость была предложена в работе автора монографии [69], а затем всесторонне исследована в работах Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиева и А.Н. Петрова [74, 78] и др.

С точки зрения использования диаграмм в расчетных зависимостях их удобно использовать секущими и касательными модулями (см. рис. 3.1, а — равны по модулю соответственно тангенсам углов θ — секущих типа OM и θ^k — касательных линий диаграммы

к оси деформаций ϵ_b). В начале диаграммы эти модули совпадают и равны E_b^0 начальному модулю — модулю упругости. Ниже секущий модуль представляется в виде $E_b^0 \psi_b$, а касательный $E_b^0 \psi_b^k$, где ψ_b и ψ_b^k — некоторые безразмерные функции. При растяжении параметры ψ_b , ψ_b^k принимают значения ψ_{bt} , ψ_{bt}^k . Следуя В.И. Мурашеву [127], параметр ψ_b еще называют коэффициентом упругости, поскольку он равен отношению линейной части деформаций, вычисленной при $\psi_b = 1$, к общим деформациям.

Диаграмма сжатия. Сжимающие напряжения и деформации укорочения являются отрицательными. При центральном сжатии диаграмма деформирования бетона представляется в виде

$$\epsilon_b = \sigma_b / (E_b^0 \nu_b), \quad (3.1)$$

где ϵ_b , σ_b , E_b^0 — соответственно относительные деформации, напряжения, начальный модуль упругости бетона; ν_b — коэффициент изменения секущего модуля ($E_b^0 \nu_b$ — секущий модуль);

$$\nu_b = \hat{\nu}_b + (\nu_0 - \hat{\nu}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}, \quad (3.2)$$

здесь $1 \geq \nu_b > 0$; $\hat{\nu}_b$ — значение коэффициента изменения секущего модуля ν_b в вершине диаграммы, η — уровень напряжений ($0 \leq \eta \leq 1$); ω_1, ω_2 — параметры кривизны диаграммы:

$$\hat{\nu}_b = \hat{\sigma}_b / (E_b^0 \psi_b^0); \quad \hat{\sigma}_b = -R_{b, ser} \quad (3.3)$$

$$\eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b; \quad \omega_2 = 1 - \omega_1, \quad (3.4)$$

$\hat{\sigma}_b^0$ — значение напряжений в вершине диаграммы при проектировании $\hat{\sigma}_b = -R_{b, ser}$; ψ_b^0 — значение коэффициента ψ в начале диаграммы;

для восходящей ветви ($|\epsilon_b| \leq |\hat{\epsilon}_b|$)

$$\nu_b = 1; \quad \omega_1 = 2 - 2,5 \hat{\nu}_b; \quad (3.5)$$

для нисходящей ветви ($|\epsilon_b| > |\hat{\epsilon}_b|$)

$$\nu_b = 2,05 \hat{\nu}_b; \quad \omega_1 = 1,95 \hat{\nu}_b - 0,138; \quad (3.6)$$

$\hat{\epsilon}_b^0$ — деформации в вершине диаграммы;

для тяжелого и мелкозернистого бетона (по предложению Т.А. Мухамедиева)

$$\epsilon_b = -\epsilon_R = - \frac{(18 + R_{b, ser}) (62 R_{b, ser} + 0,675 R_{b, ser}^2 + 22)}{(53000 - 62 R_{b, ser}) (7 R_{b, ser} + R_{b, ser}^2 + 22)}, \quad (3.7)$$

где константы: 18, 22, 53000 принимаются в МПа;

для легкого и ячеистого бетона (по предложению Р.Л. Серых)

$$\hat{\epsilon}_b^{\wedge} = -\hat{\epsilon}_R = -\frac{B}{E_b^0} \lambda \frac{1 + 0,75 \lambda B/60 + 0,2 \lambda/B}{0,12 + B/60 + 0,2/B}, \quad (3.8)$$

где B — класс бетона по прочности на сжатие; — безразмерный коэффициент, зависящий от вида бетона, и принимаемый равным: для тяжелого и мелкозернистого бетонов $\lambda = 1$; для легкого бетона плотностью D , кг/м³, $\lambda = D/2400$; для ячеистого бетона $\lambda = 0,25 + 0,035 B$.

Остановимся на механизме конструирования зависимости (3.2). Схема изменения коэффициентов ν_b в функции от уровня η для восходящей (линия I) и нисходящей (линия II) ветвей диаграммы показана на рис. 3.1, в. Линии I' и II' могут быть сравнительно просто представлены отрезками эллипсов или парабол, состыкованных в общей вершине h' ; I_ф, II_ф — не используемые (фиктивные) продолжения линий I и II за точкой h (линии I' и I_ф, II' и II_ф симметричны относительно оси $s-s$, т.е. в вершине h' для состыкованных линий выполняется условие $d\eta/d\nu_b = 0$, которое приводит к выполнению условия $d\hat{\epsilon}_b/d\epsilon_b = 0$ в вершинах h диаграмм, представленных на рис. 3.1, а, б). Таким образом, приходим к тому, что оба отрезка (I' и II') описываются формально одним уравнением

$$\nu_b^2 - 2\nu_b\hat{\nu}_b + \hat{\nu}_b^2 - (\nu_0 - \hat{\nu}_b)^2(1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2) = 0, \quad (3.9)$$

$$(\omega_1 + \omega_2 = 1),$$

в котором для каждого отрезка вводятся только свои значения константы ν_0 . Зависимость (3.2) является решением квадратного уравнения (3.9) относительно ν_b .

Константы ν_0 назначаются, исходя из некоторых граничных условий. В начале восходящего участка диаграммы касательный и секущий модули должны быть равны начальному модулю E_b^0 — модулю упругости, откуда следует $\nu_0 = 1$.

В конце нисходящего участка (после точек 6, 7, см. рис. 3.1, а, б) происходит изменение кривизны диаграммы так, что кривая затем начинает асимптотически приближаться к линии, параллельной оси ϵ_b и отстоящей от нее на расстоянии $\eta = \eta^0$. Проявляется так называемый эффект «клюшки» — ниспадающая ветвь копирует конфигурацию клюшки. Этот эффект моделируется при $\nu_0 > 2\hat{\nu}_b$, кроме того он накладывает ограничения на значения уровней η ($\eta > \eta^0$).

Параметры $\hat{\nu}_b$ и ω_1 существенно влияют на искривление диаграммы, особенно вблизи ее вершины. Их значения устанавливаются экспериментально. Обработку экспериментов при этом достаточно выполнять по упрощенной методике, определяя $\hat{\nu}_b$ из условия совпадения вершин опытных и расчетных диаграмм, а ω_1 — из условия совпадения опытных $\nu_{оп}$ и вычисленных по формуле (3.2) значений ν_b при уровнях напряжений $\eta \approx 0,85$ отдельно для восходящего и нисходящего участков диаграммы. Полагая в (3.2) $\eta = 0,85$ и решая это уравнение относительно ω_1 , получим их опытные значения

$$\omega_1 = 0,2775 - \left(\frac{\nu_{оп} - \hat{\nu}_b}{\nu_0 - \hat{\nu}_b} \right)^2 \frac{1}{0,1275},$$

где $\nu_{оп} = 0,85\hat{\sigma}_b/E_b^0\epsilon_{b,оп}$; $\epsilon_{b,оп}$ — опытное значение деформаций.

Заметим еще, что при некоторых значениях η^0 или $\nu_0 > 2\hat{\nu}_b$ диаграмма начинает приближаться к диаграмме Прандтля, таким образом представленные зависимости обладают большими возможностями.

Нетрудно заметить, что формула (3.2) определена на отрезке $\eta = 0 \dots 1$, если под квадратным корнем $1 - (\omega_1\eta - \omega_2\eta^2) \geq 0$. Это условие выполняется, если $\omega_1 > 2$ (при $\omega_2 = 1 - \omega_1$). Выражение $1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2$ в принципе может быть заменено на более общее $1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2 - \omega_3\eta^3 + \dots$, где $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots) = 1$, однако для бетона достаточно ограничиться тремя первыми членами.

Остановимся еще на одном важном вопросе. Выше параметры ν_b , ν_b^* определялись через уровни напряжений η , однако в некоторых случаях, особенно при переходе на ниспадающую ветвь, их удобнее вычислять через уровни деформаций $\eta_d = \epsilon_b/\hat{\epsilon}_b$. При этом на уровне η_d не накладывается ограничение типа $\eta \geq \eta^0$. Разделив правую и левую части зависимости (3.12) на $\hat{\sigma}_b\hat{\epsilon}_b$, можно установить следующую простую связь между уровнями:

$$\eta = \eta_d \nu_b / \hat{\nu}_b. \quad (3.10)$$

Внося это значение в (3.18), приходим к новому квадратному уравнению, решая которое, находим

$$\nu_b = p + \sqrt{p^2 + s}, \quad (3.11)$$

где:

$$p = \frac{\hat{\nu}_b [2\hat{\nu}_b^2 - \omega_1\eta_d(\nu_0 - \hat{\nu}_b)^2]}{2[\hat{\nu}_b^2 + \omega_2\eta_d^2(\nu_0 - \hat{\nu}_b)^2]};$$

$$s = \frac{\hat{\nu}_b^2(\nu_0^2 - 2\nu_0\hat{\nu}_b)}{\hat{\nu}_b^2 + \omega_2\eta_d^2(\nu_0 - \hat{\nu}_b)^2}.$$

Здесь также для каждой ветви принимается свое значение ν_0 .

Сопоставление опытных и расчетных диаграмм деформирования бетона при осевом сжатии показано на рис. 3.2 (линии 1, 2, 3, где 1 — опыты И.Д. Узуна, 2 — расчет по формулам (3.1), (3.2) с определением параметров ν_0 , ω_1 и ϵ_R — по формулам (3.5), (3.7), 3 — расчет по формулам (3.1), (3.2) с введением опытных параметров ν_0 , ω_1 и ϵ_R). Более полное представление о характере теоретических диаграмм сжатия бетона, построенных по формулам (3.1), (3.2) дают графики рис. 3.3. Там же для сопоставления пунктирными линиями

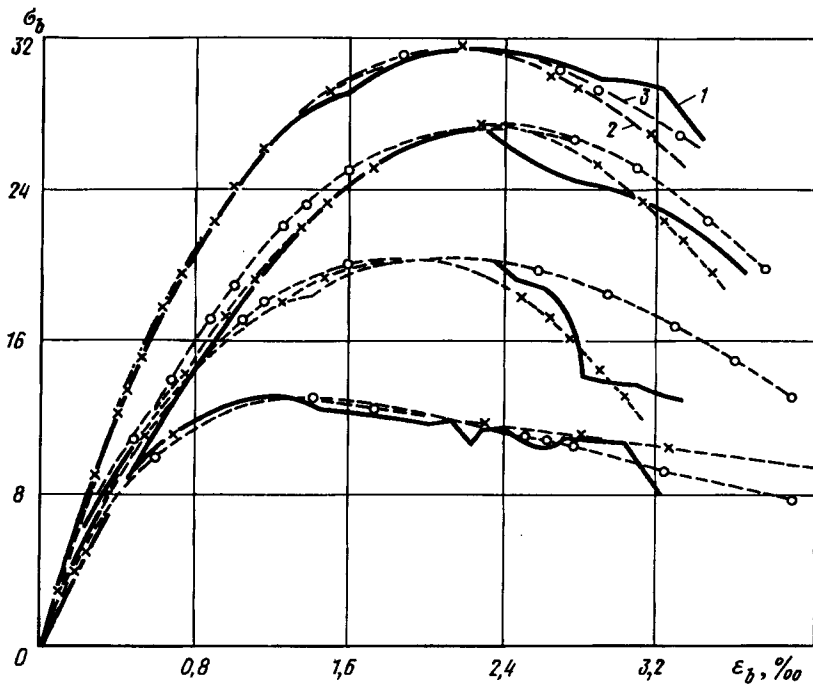


Рис. 3.2. Сравнение опытных и расчетных диаграмм деформирования бетона различных классов при осевом сжатии

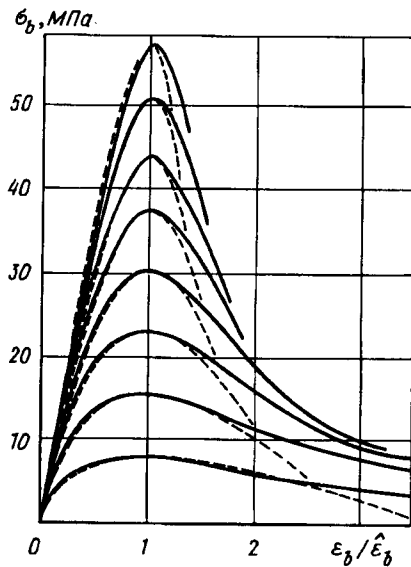


Рис. 3.3. Диаграммы сжатия бетонов различных классов

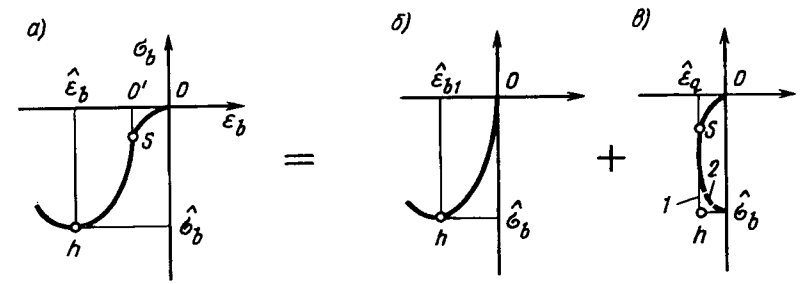


Рис. 3.4. К учету начальных деформаций зажатия

нанесены кривые, рекомендуемые ЕКБ (Европейским комитетом по бетону). Таким образом, теоретические зависимости удовлетворительно согласуются с опытными данными, полученными как в нашей стране, так и в других странах.

Уточнение начального участка диаграммы сжатия. Выше при описании диаграммы не учитывался так называемый начальный «зуб» диаграммы — отрезок $0S$ (рис. 3.4, а), связанный с уплотнением структуры бетона в начале сжатия. Фактически диаграмму начинают с точки O' . Отрезок зажатия можно сравнительно просто учесть, представив общие деформации, обозначив их ϵ_b , в виде суммы: $\epsilon_b = \epsilon_{b1} + \epsilon_q$, где ϵ_{b1} — основные деформации, в которых зажатие не учитывается (рис. 3.4, б); они определяются по представленным ранее формулам, где формально индекс « b » заменяется на « $b1$ », ϵ_q — деформации зажатия (рис. 3.4, в); ϵ_q — максимальные деформации зажатия в вершине h . Полагая $\epsilon_{b1} = \sigma_b / E_b^0 \nu_{b1}$; $\epsilon_q = \sigma_b / E_b^0 \nu_q$, получим

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0} \left(\frac{1}{\nu_{b1}} + \frac{1}{\nu_q} \right), \quad (3.12)$$

где ν_q — коэффициент секущего модуля деформаций зажатия; он может аппроксимироваться некоторой линейной функцией относительно η или устанавливаться на основе конструирования диаграммы зажатия в виде линии 1, возможно с продолжением 2, см. рис. 3.4, в.

Диаграмма растяжения. Хотя выше говорилось о диаграмме сжатия бетона, однако зависимости (3.1) — (3.6), (3.9) — (3.11), как и выражения параметров ν_0, ω_1 , относятся и к диаграммам растяжения. В них только следует индекс « b » заменить на индекс « bt », обозначающий растяжение, и ввести новые значения параметров:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{bt} &= R_{bt,ser} \tilde{\gamma}_{btq}; \quad \eta = \sigma_{bt} / \hat{\sigma}_{bt}, \\ \hat{\epsilon}_{bt} &= \sigma_{bt} / (E_b^0 \hat{\nu}_{bt}); \quad \eta_d = \epsilon_{bt} / \hat{\epsilon}_{bt}; \\ \hat{\nu}_{bt} &= (0,6 + 0,15 R_{bt} / 25) / \tilde{\gamma}_{btq}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\tilde{\gamma}_{btq}$ — коэффициент, учитывающий влияние градиентов деформаций; вводится, если диаграмма используется в расчетах изгибаемых элементов (значение его

указано ниже; естественно, при центральном растяжении $\tilde{\gamma}_{btq} = 1$); R_{btq} — нормативное сопротивление бетона растяжению (принимается по СНиП 02.03.01–84); $n = 1-2$.

Учет влияния градиентов. О физической природе влияния градиентов напряжений и деформаций на деформации и прочность элементов уже говорилось в гл. 1. Здесь остановимся на некоторых количественных характеристиках, начав с диаграммы растяжения.

Проводя довольно обширные эксперименты, некоторые исследователи уже давно пришли к выводу, что диаграммы растяжения бетона в условиях неоднородного растяжения — в растянутых зонах изгибаемых, внецентренно сжатых и внецентренно растянутых элементов отличаются от диаграммы при центральном растяжении (можно отметить исследования В.Е. Ящука, П.Г. Кургана, А.В. Караваева и других, более полный обзор дан в [78]). Как правило, влияние градиентов учитывалось косвенным путем. Корректировались параметры вершины диаграммы растяжения ($\hat{\sigma}_{bt}$, $\hat{\epsilon}_{bt}$) в зависимости от высоты балки, что приводило к увеличению трещиностойкости. Например, для изгибаемых балок согласно [79]

$$0,9 \leq \tilde{\gamma}_{btq} = 2,07 - \sqrt[5]{h/h_s}, \quad (3.14)$$

где $h_s = 30$ см — некоторая эталонная высота сечения; h — высота сечения; при этом в формулах (3.13) $n = 1$ для тяжелого бетона; $n = 2$ — для мелкозернистого бетона и керамзитобетона.

Представленная выше методика косвенного учета влияния градиентов через высоту не дает ответа на вопрос об изменении $\tilde{\gamma}_{btq}$ в процессе нагружения и в зависимости от вида напряжений (внецентренное сжатие или растяжение). Детальные исследования прямого влияния градиентов на диаграммы растяжения и сжатия бетона были выполнены Н.И. Карпенко, М.А. Сапожниковым-Рейтманом и Т.А. Мухамедиевым [79] численным моделированием изгиба бетонных балок из экспериментов различных исследователей. При этом устанавливались коррективы диаграммы, которые приводили к совпадению опытных и вычисленных деформаций от начала нагружения и вплоть до разрушения образцов, а также к совпадению нагрузок трещинообразования и разрушения.

Это моделирование изгиба балок позволило сделать следующие выводы. Изменение диаграммы растяжения начинается только после того, как кривизна балки k превысит некоторое характерное значение k_{ot} ; при $k < k_{ot}$ диаграмма растяжения бетона пренебрежимо мало отличается от исходной ($\tilde{\gamma}_{btq} \approx 1$). Заметим, что кривизна k представляет при гипотезе прямых нормалей градиент деформаций по всей высоте балки. Было выявлено, что зависимость изменения $\tilde{\gamma}_{btq}$ от отношения текущей кривизны к характерному значению k_{ot} практически совпадает для балок разной высоты из бетона разных классов и может быть описана в виде:

$$\tilde{\gamma}_{btq} = 0,73 + 0,27 \sqrt[4]{k/k_{ot}} \geq 1, \quad (3.15)$$

где

$$k_{ot} = (11 + 13 \frac{R_{btq}}{R_0}) \frac{1}{L}, \quad R_0 = 2 \text{ МПа}, \quad L = 10^5 \text{ м.}$$

При использовании зависимостей (3.15) в формулах (3.13) следует принимать $n = 1$.

Полагаем, что зависимости (3.15) можно использовать как в расчетах изгибаемых, так и внецентренно сжатых или растянутых элементов, хотя значение k_{ot} еще потребует уточнения. Анализ балок из различных бетонов показывает, что значение k_{ot} как и аналогичные величины в случае сжатия, зависит от вида и структуры бетона, а также от скорости изменения градиента деформаций (кривизны) во времени, однако пока отсутствуют достаточные экспериментальные данные для учета указанных факторов.

Интерес представляют выявленные в процессе этого анализа данные по предельной растяжимости бетона $\bar{\epsilon}_{bz}$ на крайнем растянутом волокне, соответствующие моменту начала разрушения бетонного сечения (предположительно в точке 5 на рис. 3.1). В принципе точка, соответствующая разрушению, располагается немного ниже точки 5, поскольку момент разрушения может несколько превышать момент образования трещины в крайних фибрах бетона. Выявлено единообразие связи отношений $\bar{\epsilon}_{bt}/\hat{\epsilon}_{bt}$ и \bar{k}/k_{ot} (\bar{k} — кривизна в момент образования трещины разрушения), в виде

$$\frac{\bar{\epsilon}_{bt}}{\hat{\epsilon}_{bt}} \approx 1 + 0,5 \sqrt{\frac{\bar{k}}{k_{ot}}} \leq 4,4 \quad (3.16)$$

или при $k \geq k_{ot}$

$$\bar{\epsilon}_{bt} \approx \hat{\epsilon}_{bt} [1 + 0,5 (\frac{\tilde{\gamma}_{btq} - 0,73}{0,27})^2] \leq 4,4 \hat{\epsilon}_{bt} \quad (3.17)$$

Вопросу о влиянии градиента деформаций по сечению на диаграмму сжатия бетона посвящено гораздо больше исследований, чем на диаграмму растяжения, однако мнения исследователей здесь довольно противоречивы. В одних исследованиях это влияние выявляется, в других отрицается. С целью исследования трансформации диаграммы сжатия по сравнению с исходной указанная выше методика численного моделирования была распространена на изгиб и внецентренное сжатие железобетонных элементов, а также внецентренное сжатие бетонных образцов из опытов различных авторов. Выявлено, что к хорошему согласованию опытных и расчетных данных приводит такой способ трансформации диаграммы сжатия, при котором напряжения в вершине увеличиваются в $\tilde{\gamma}_{btq}$, а деформации в $\tilde{\gamma}_{btq}^2$ раз,

$$\hat{\sigma}_b = -R_b \tilde{\gamma}_{bq}; \hat{\varepsilon}_b = -\varepsilon_R \tilde{\gamma}_{bq}^2, \quad (3.18)$$

где $\tilde{\gamma}_{bq}$ — коэффициент влияния градиента; ε_R — абсолютная величина деформации в вершине исходной диаграммы сжатия, определяемая по формулам (3.7) или (3.8).

Принципы определения $\tilde{\gamma}_{bq}$ схожи с указанными выше принципами вычисления $\tilde{\gamma}_{btq}$.

Коэффициент влияния градиента может определяться по формуле [79]

$$\tilde{\gamma}_{bq} = 0,6 + 0,4 \sqrt[4]{k/k_{0c}} \geq 1, \quad (3.19)$$

где k_{0c} — характерное значение градиента деформаций укорочения (при $k < k_{0c}$ влиянием градиента деформаций на диаграмму можно пренебречь).

Анализ результатов экспериментов, выполненный в [79] с большой тщательностью, позволил высказать предположение, что важным фактором, влияющим на характерное значение k_{0c} , является скорость изменения кривизны во времени (dk/dt) в процессе нагружения. С увеличением этой скорости параметр k_{0c} уменьшается, при этом согласно зависимости (3.19) одним и тем же значениям кривизны элемента будут соответствовать значительные изменения $\tilde{\gamma}_{bc}$ (большая трансформация диаграммы сжатия). Введение этого предположения позволяет объяснить с единых позиций внешне противоречивые результаты разных экспериментальных исследований.

Зависимость характерного значения кривизны k_{0c} от скорости ее изменения для тяжелого бетона разных классов можно вычислять по эмпирической формуле М.А. Сапожникова

$$k_{0c} = \frac{1,06 + 0,02(R_b/R_0)}{L_0} \sqrt{\frac{0,04 + \bar{\chi}^2}{0,01 \bar{\chi} + \bar{\chi}^3}}, \quad (3.20)$$

где $\bar{\chi} = \chi/\chi_0$; $\chi = dk/dt$,

$$\chi_0 = 10^{-3}(\text{м·мин})^{-1}; R_0 = 10 \text{ МПа}; L_0 = 10^3 \text{ м.}$$

Формулу (3.20) удобно использовать в шагово-итерационном процессе, если, конечно, известна зависимость изменения внешней нагрузки во времени, который сводится к следующему. Определив, например, кривизну k и, обозначив ее k_1 в момент времени t , прикладываем новую нагрузку в момент $(t + \Delta t)$ и вычисляем новую кривизну k_2 ; тогда $\chi \approx (k_2 - k_1)/\Delta t$; эта величина будет тем ближе к истинному значению χ , чем меньше шаг во времени Δt . Такая процедура выполняется для каждого сечения. В случае нагружения с выдержкой на каждой ступени в формулу (3.20) должно подставляться значение χ , определенное по времени с учетом выдержки.

В случае, когда закон приложения нагрузки на конструкцию во времени не известен, можно использовать упрощенный способ учета влияния градиентов, заключающийся в выполаживании ниспадающей

ветви диаграммы сжатия (восходящая ветвь при этом не меняется). Суть выполаживания сводится к изменению параметра ω_1 , который вычисляется по формуле $\omega_1 = c_1 \hat{\nu}_b = 0,138$, где

$$c_1 = 1,95 - 0,25 \sqrt[4]{k/k_0}.$$

Здесь $k_0 = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$; для изгибающих элементов приблизительно $c_1 \approx 1,4$.

Заметим, что при использовании формул (3.14) — (3.20) ниспадающая ветвь тоже автоматически выполаживается вследствие влияния $\hat{\varepsilon}_b, \hat{\varepsilon}_{bt}$ на параметры ω_1 и ν_0 .

При переходе к одноосным напряженным состояниям, например при рассмотрении плит, работающих в двух направлениях, параметры типа k_{0c}, k_{0t} должны сопоставляться с главными кривизнами. Однако этот вопрос еще требует исследования.

Поперечные деформации бетона. Деформированное состояние элементов при центральном сжатии или растяжении определяется не только продольными (вдоль действия напряжений), но и поперечными деформациями (ε_{pt} — при растяжении, рис. 3.5 и ε_p — при сжатии).

Поперечные деформации имеют знак, обратный знаку продольных деформаций, и выражаются в зависимости от них традиционным

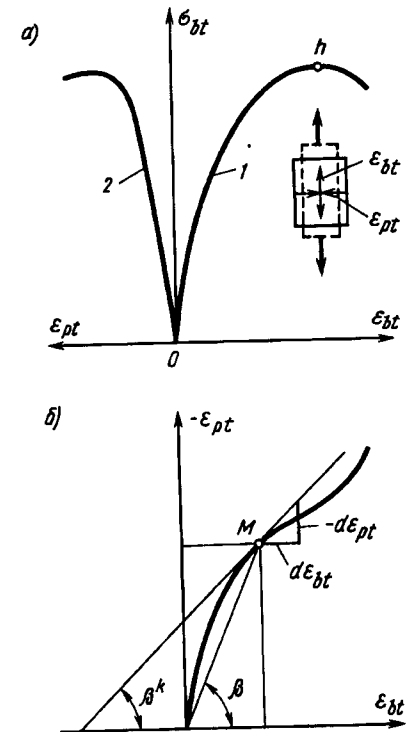


Рис. 3.5. К определению поперечных деформаций 1 — продольная деформация; 2 — поперечная деформация

путем через коэффициенты поперечной деформации (μ_b — при сжатии, μ_{bt} — при растяжении),

$$\varepsilon_p = -\varepsilon_b \mu_b; \quad \varepsilon_{pt} = -\varepsilon_{bt} \mu_{bt}. \quad (3.21)$$

График связи, например поперечных ε_{pt} и продольных ε_{bt} деформаций, представлен на рис. 3.5, б. Отношение $\varepsilon_{pt}/\varepsilon_{bt} = \operatorname{tg} \beta$ — угол наклона секущей типа OM к оси деформаций ε_{bt} , поэтому коэффициент поперечной деформации, равный указанному соотношению, называют секущим.

Экспериментальные исследования показывают, что с увеличением уровня напряжений сжатия коэффициент поперечной деформации μ_b возрастает от некоторого начального значения $\mu_b^0 \approx 0,15 - 0,2$ до значений, приближающихся, а иногда и превышающих, 0,5 в вершине диаграммы. Этот фактор удовлетворительно отражает зависимость, предложенная в [69]

$$\mu_b = \hat{\mu}_b + (\mu_b^0 - \hat{\mu}_b) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (3.22)$$

где $\hat{\mu}_b$ — значение коэффициента μ_b в вершине диаграммы сжатия

$$\hat{\mu}_b \approx \mu_b^0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{\nu}_b}. \quad (3.23)$$

Формула (3.22) описывает восходящую ветвь поперечных деформаций. При описании нисходящей ветви μ_b^0 следует заменять на $\hat{\mu}_b > 2\mu_b^0$, однако этот вопрос еще требует исследования (кроме этого после μ_b знак + заменяется на -).

Увеличение уровня напряжений растяжения приводит по данным, например [15], к уменьшению коэффициента поперечной деформации. Этот эффект можно приближенно учесть, приняв

$$\mu_{bt} \approx \mu_b^0 \nu_{bt}, \quad (3.24)$$

или, если использовать формулу (3.22), положив в ней

$$\hat{\mu}_b = \hat{\mu}_{bt} = \mu_b^0 \hat{\nu}_{bt}. \quad (3.25)$$

Внося значения ε_b из (3.1) в (3.21), можно записать

$$\varepsilon_p = -\frac{\sigma_b \mu_b}{E_b^0 \nu_b}; \quad \varepsilon_{pt} = -\frac{\sigma_{bt} \mu_{bt}}{E_b^0 \nu_{bt}}. \quad (3.26)$$

Исходные физические соотношения. Указанные выше обозначения продольных и поперечных деформаций и физических коэффициентов (модулей), характеризующих их, удобны для анализа одноосных напряжений. При переходе к трехосным напряженным состояниям, необходимо в индексы вводить традиционные обозначения деформаций, связанные с направлениями той или иной оси декартовых координат 1, 2, 3, вдоль которой действуют напряжения и происходят деформации. В случае одноосного сжатия: $\varepsilon_b = \varepsilon_3; \sigma_b = \sigma_3; \varepsilon_p = \varepsilon_1 = \varepsilon_2; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (при этом $\nu_b = \nu_{b3}$, а $\mu_b = \mu_{b13} = \mu_{b23}$), а

в случае одноосного растяжения: $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_1; \sigma_{bt} = \sigma_1; \varepsilon_{pt} = \varepsilon_2 = \varepsilon_3; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (при этом $\nu_{bt} = \nu_{b1}; \mu_{bt} = \mu_{b21} = \mu_{b31}$).

Таким образом для одноосного сжатия и растяжения получают различные деформационные зависимости:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{Bmatrix} \dots - (\mu_{b13}/\nu_{b3}) \\ \dots - (\mu_{b23}/\nu_{b3}) \\ \dots (1/\nu_{b3}) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}; \quad (3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{Bmatrix} (1/\nu_{b1}) & \dots \\ -(\mu_{b21}/\nu_{b1}) & \dots \\ -(\mu_{b31}/\nu_{b1}) & \dots \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

где точками обозначены коэффициенты податливости, которые еще не определены.

Зависимости (3.27), (3.28) являются исходными при переходе к моделям трехосного напряженного состояния

3.2. ЗАПИСЬ ДИАГРАММ В ВИДЕ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРИРАЩЕНИЯМИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ. ОПИСАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ПРОГРАММ НАГРУЖЕНИЯ

Дифференциальная (инкрементальная) форма записи диаграмм деформирования бетона. Касательные коэффициенты продольной и поперечной деформации. Диаграммы деформирования бетона (здесь индексы «b» и «bt» обозначим «b») можно также представить в виде связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений ($d\varepsilon_b - d\sigma_b$). Из рис. 3.1, б видно, что

$$\frac{d\varepsilon_b}{d\sigma_b} = \frac{1}{E_b^0 \nu_b^k} \quad (\text{или } d\varepsilon_b = \frac{d\sigma_b}{E_b^0 \nu_b^k}), \quad (3.29)$$

где ν_b^k — коэффициент изменения касательного модуля деформации бетона ($E_b^0 \nu_b^k$ — касательный модуль).

Дифференцируя (3.1) по σ_b

$$\frac{d\varepsilon_b}{d\sigma_b} = \frac{1}{E_b^0} \frac{d}{d\sigma_b} \left(-\frac{\sigma_b}{\nu_b} \right) \quad (3.30)$$

и приравнявая первые части (3.29) и (3.30), находим

$$\frac{1}{\nu_b^k} = \frac{d}{d\sigma_b} \left(-\frac{\sigma_b}{\nu_b} \right)$$

или, учитывая, что $d\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_b d\eta$, поскольку у ровень $\eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b$,

$$\frac{1}{\nu_b^k} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta}{\nu_b} \right). \quad (3.32)$$

Внося в (3.22) значения ν_b из (3.2) и произведя дифференцирование, приходим к довольно простой зависимости между ν_b^k и ν_b (касательным и секущим модулями),

$$\frac{1}{\nu_b^k} = \frac{1}{\nu_b} \pm \frac{\eta (\nu_0 - \hat{\nu}_b) (\omega_1 + 2\omega_2\eta)}{2\nu_b^2 \sqrt{1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2}}, \quad (3.33)$$

где знак «+» соответствует восходящей ветви диаграммы; «-» нисходящей.

Перейдем к рассмотрению поперечных деформаций в приращениях (на рис. 3.5, б $d\epsilon_{pt}$, $d\epsilon_{bt}$ — бесконечно малые приращения поперечных и продольных деформаций при растяжении). Согласно рис. 3.5, б $d\epsilon_{pt}/d\epsilon_{bt} = \text{tg}\beta^k$, где β^k — угол наклона касательной к кривой $\epsilon_{pt} - \epsilon_{bt}$; $\text{tg}\beta^k$ — представляет собой касательный коэффициент поперечной деформации (μ_{bt}^k — при растяжении, μ_b^k — при сжатии), т.е.

$$\frac{d\epsilon_{pt}}{d\epsilon_{bt}} = -\mu_{bt}^k; \quad \frac{d\epsilon_p}{d\epsilon_b} = -\mu_b^k, \quad (3.34)$$

Как и выше в представленных далее зависимостях оставим только индексы «p» и «b»; переход к растяжению осуществляется путем формальной замены этих индексов на индексы «pt» и «bt». Заменяя в (3.34) $d\epsilon_b$ на $d\hat{\sigma}_b / \nu_b^k E_b^0$ согласно (3.29), преобразуем (3.34) к виду

$$\frac{d\epsilon_p}{d\sigma_b} = \frac{\mu_b^k}{\nu_b^k E_b^0}. \quad (3.35)$$

В то же время из дифференцирования (3.26) по $\hat{\sigma}_b$ следует

$$\frac{d\epsilon_p}{d\sigma_b} = \frac{1}{E_b^0} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mu_b \sigma_b}{\nu_b} \right) = \frac{1}{E_b^0} \left[\frac{\sigma_b}{\nu_b} \frac{d\mu_b}{d\sigma} + \mu_b \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sigma_b}{\nu_b} \right) \right] \quad (3.36)$$

или, учитывая (3.31)

$$\frac{d\epsilon_p}{d\sigma_b} = \frac{1}{E_b^0} \left[\frac{\sigma_b}{\nu_b} \frac{d\mu_b}{d\sigma} + \mu_b \frac{1}{\nu_b^k} \right]. \quad (3.37)$$

Приравняв правые части (3.35) и (3.37), получим

$$\frac{\mu_b^k}{\nu_b^k} = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mu_b \sigma_b}{\nu_b} \right) = \frac{\mu_b}{\nu_b^k} + \frac{\sigma_b}{\nu_b} \frac{d\mu_b}{d\sigma} \quad (3.38)$$

или, учитывая, что $\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_b \eta$,

$$\frac{\mu_b^k}{\nu_b^k} = \frac{\mu_b}{\nu_b^k} + \frac{\eta}{\nu_b} \frac{d\mu_b}{d\eta} \quad (3.39)$$

Формула (3.39) после подстановки выражения (3.22) для μ_b и дифференцирования дает следующий результат:

$$\mu_b^k = \mu_b \pm (\pm) \frac{\eta^2 \nu_b^k (\mu_b^0 - \hat{\mu}_b)}{2\nu_b \sqrt{1 - \eta^2}} \quad (3.40)$$

(«+» — восходящая ветвь, «-» — нисходящая).

Из (3.40) следует, что в вершине диаграммы касательный и секущий модули совпадают ($\mu_b^k = \mu_b$ при $\eta = 1$). В других случаях необходимо учитывать их различие.

Если соблюдается условие (3.24), то в случае растяжения из (3.36) следует

$$\frac{d\epsilon_{pt}}{d\sigma_{bt}} = \frac{\mu_b^0}{E_b^0}.$$

Приравняв правую часть этого выражения к правой части (3.35), находим

$$\mu_{bt}^k = \mu_b^0 \nu_{bt}^k. \quad (3.41)$$

Исходное соотношение (3.38) можно записать в функции от деформаций. Внося в это соотношение значения σ_b и $d\hat{\sigma}_b$ из (3.1) и (3.29), находим

$$\mu_b^k = \mu_b + \frac{d\mu_b}{d\epsilon_b} \epsilon_b. \quad (3.42)$$

Эту зависимость удобно использовать для определения μ_b^k в функции от деформаций или уровня деформаций.

Соотношения (3.29) и (3.35) являются основными физическими соотношениями одноосно напряженного бетона в приращениях. Они могут быть [по аналогии с (3.27), (3.23)] представлены в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{Bmatrix} \dots (-\mu_{b13}^k / \nu_{b3}^k) \\ \dots (-\mu_{b23}^k / \nu_{b3}^k) \\ \dots (1/\nu_{b3}^k) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{Bmatrix} (1/\nu_{b1}^k) \dots \\ (-\mu_{b21}^k / \nu_{b1}^k) \dots \\ (-\mu_{b31}^k / \nu_{b1}^k) \dots \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где точками обозначены коэффициенты податливости в приращениях, которые еще не определены.

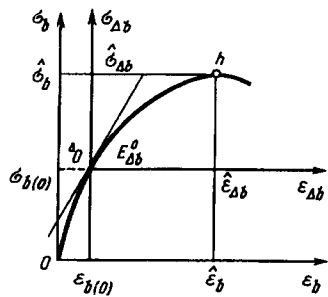


Рис. 3.6. К описанию отрезка $\Delta O h$ диаграммы

Прием описания диаграммы от некоторой новой начальной точки O (рис. 3.6). Пусть требуется описать часть восходящего участка диаграммы $\Delta O h$ в координатах напряжений $\sigma_{\Delta b}$ и деформаций $\varepsilon_{\Delta b}$, отсчитываемых от некоторой точки ΔO , расположенной на исходной диаграмме ($\hat{\sigma}_{\Delta b}$, $\hat{\varepsilon}_{\Delta b}$ — значения напряжений и относительных деформаций вершины диаграммы h в новых координатах; $\eta_d = \sigma_{\Delta b} / \sigma_{\Delta b}$ — новый уровень напряжений; $\eta_{\Delta d} = \hat{\varepsilon}_{\Delta b} / \hat{\varepsilon}_{\Delta b}$ — новый уровень деформаций). Новая система координат связана с исходной очевидными равенствами (см. рис. 3.5)

$$\sigma_{\Delta b} = \sigma_b - \sigma_{b(0)}, \quad \varepsilon_{\Delta b} = \varepsilon_b - \varepsilon_{b(0)},$$

где $\sigma_{b(0)}$, $\varepsilon_{b(0)}$ — координаты точки ΔO в исходной системе σ_b , ε_b .

Используя их, можно точно осуществить указанный переход, однако он приводит к громоздким выражениям. Численные исследования показали, что результат мало изменяется, если использовать приближенный прием, заключающийся в следующем. Вычисляется касательный модуль ($E_{\Delta b}^0 \nu_{\Delta b}^k$) в точке ΔO по представленным выше формулам. Он приравнивается к начальному модулю $E_b^0 = E_{\Delta b}$ новой диаграммы. Аналогично начальный коэффициент поперечной деформации μ_b^0 заменяется на касательный коэффициент μ_b^k , соответствующий состоянию ΔO . Кроме того изменяются параметры вершин новой диаграммы:

$$\hat{\sigma}_{\Delta b} = \hat{\sigma}_b - \sigma_{b(0)}; \quad \hat{\varepsilon}_{\Delta b} = \hat{\varepsilon}_b - \varepsilon_{b(0)}.$$

После такой замены все формулы исходной диаграммы продольных и поперечных деформаций можно применять и к описанию новой диаграммы; следует лишь формально присвоить всем величинам индекс Δ (E_b заменяется на $E_{\Delta b}^0$, η на η_{Δ} и т.д.). Заметим, что описанный способ трансформации исходного состояния удобно переносится на описание сложных режимов нагружения неодноосным напряжением. Его можно отнести к одной из разновидностей более общего способа записи физических соотношений в конечных приращениях, который рассмотрен ниже.

Описание нагрузки и разгрузки (режимные диаграммы). Методика конечных приращений. Перейдем, следуя [70, 81], к

рассмотрению более сложных диаграмм деформирования бетонных элементов в условиях, когда ветви возрастающих напряжений сменяются различными разгрузками и наоборот. Такие условно «режимные» диаграммы больше соответствуют реальному деформированию бетона в конструкциях. Режимные диаграммы можно описать сравнительно просто, если разделить их на ряд характерных отрезков и записать на каждом отрезке связи между конечными приращениями напряжений $\sigma_{\Delta m}$ и деформаций $\varepsilon_{\Delta m}$, отсчитываемых от начала отрезка.

Обозначим $\hat{\sigma}_{\Delta m}$, $\hat{\varepsilon}_{\Delta m}$ — приращения напряжений и деформаций для конца выделяемого отрезка, если отрезок характеризует ветвь нагрузки, и $\check{\sigma}_{\Delta m}$, $\check{\varepsilon}_{\Delta m}$ — аналогичные приращения для отрезка, характеризующего ветвь разгрузки. Приращения $\sigma_{\Delta m}$, $\varepsilon_{\Delta m}$ будем обозначать $\sigma_{\Delta m(j-i)}$, $\varepsilon_{\Delta m(j-i)}$, где j — номер точки, для которой отсчитываются приращения, i — номер точки, от которой приращения отсчитываются ($i, j = 1, 2, 3$); σ_{mj} и ε_{mj} — общие напряжения и относительные деформации в точке j .

Решение задачи упрощается, если исходная диаграмма и указанные кусочные диаграммы (отрезки) режимной диаграммы можно описать единообразно, модифицируя лишь отдельные параметры исходной диаграммы. Диаграммы на отрезках нагружения записываем в виде:

$$\varepsilon_{\Delta m} = \frac{\sigma_{\Delta m}}{E_{\Delta m}^0 \nu_{\Delta m}}; \quad \nu_{\Delta m} = \hat{\nu}_{\Delta m} + (\nu_{\Delta 0} - \hat{\nu}_{\Delta m}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta_{\Delta} - \omega_2 \eta_{\Delta}^2}, \quad (3.44)$$

где m — индекс материала ($m = b$ — при сжатии, $m = bt$ — при растяжении); знак «+» — для восходящей ветви отрезка, знак «-» — для нисходящей; η_{Δ} — уровень приращения напряжений ($\eta_{\Delta} = \sigma_{\Delta m} / \hat{\sigma}_{\Delta m}$); $E_{\Delta m}^0$ — модуль деформаций в начале отрезка диаграммы; коэффициент изменения модуля $E_{\Delta m}^0$; $\hat{\nu}_{\Delta m}$ значение $\nu_{\Delta m}$ в конце отрезка диаграммы ($\hat{\nu}_{\Delta m} = \hat{\sigma}_{\Delta m} / E_{\Delta m}^0 \hat{\varepsilon}_{\Delta m}$); ω_1 и ω_2 — коэффициенты, характеризующие искривление отрезка диаграммы ($\omega_1 = 2 - 2,5 \hat{\nu}_{\Delta m}$ — на восходящей ветви; $\omega_1 = 1,95 \hat{\nu}_{\Delta m} - 0,138$ — на нисходящей; $\omega_2 = 1 - \omega_1$).

Диаграмма на отрезках разгрузки записывается в виде (3.44), где формально приращения напряжений $\hat{\sigma}_{\Delta m}$ и деформаций $\hat{\varepsilon}_{\Delta m}$ обозначаются $\check{\sigma}_{\Delta m}$, $\check{\varepsilon}_{\Delta m}$, а коэффициент $\hat{\nu}_{\Delta m}$ заменяется на $\check{\nu}_{\Delta m}$, при этом

$$\eta_{\Delta} = \sigma_{\Delta m} / \check{\sigma}_{\Delta m}. \quad (3.45)$$

Кроме того во втором выражении (3.44) используется только знак «+», поскольку разгрузка имеет одну ветвь. Исключая в выражениях (3.44) нижний индекс Δ , приходим к записи исходной диаграммы.

Конкретизируем параметры диаграммы-формулы (3.44) в зависимости от отрезка режимной диаграммы (рис. 3.7). Пусть напряжения и деформации увеличиваются по исходной диаграмме до точки 1, затем следует полная разгрузка по линии 1-2-3, а после полной

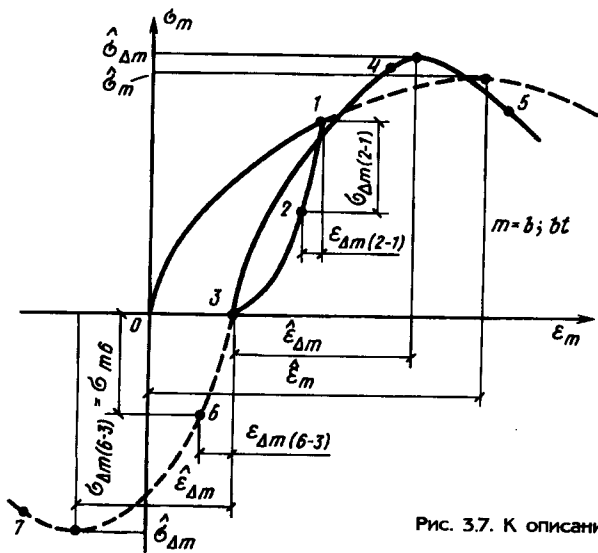


Рис. 3.7. К описанию режимных диаграмм

разгрузки в точке 3 следует или повторное нагружение напряжениями того же знака по линии 3-4-5 или нагружение напряжениями обратного знака по линии 3-6-7 (приложение напряжений обратного знака после разгрузки относится к нагружению). Представленная режимная диаграмма разделяется на следующие характерные отрезки: 0-1 — отрезок исходной диаграммы; 1-2-3 — отрезок разгрузки; 3-4-5 и 3-6-7 — отрезки нагружения.

Отрезок 1-2-3. В точке 1 (до начала разгрузки) фиксируется напряжение $\sigma_m = \sigma_{m1}$ и вычисляется по исходной диаграмме коэффициент изменения секущего модуля $\nu_m = \nu_{m1}$. Обозначим: σ_{m2} — напряжения в точке 2 после частичной разгрузки; $\sigma_{\Delta m} = \sigma_{\Delta m(2-1)} = \sigma_{m2} - \sigma_{m1}$ — приращения напряжений в точке 2 относительно точки 1, аналогично $\varepsilon_{\Delta m} = \varepsilon_{\Delta m(2-1)} = \varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1}$ — приращения относительных деформаций. Связи между приращениями напряжений $\sigma_{\Delta m}$ и деформаций $\varepsilon_{\Delta m}$ на ветви разгрузки, учитывая формулу (3.45), можно записать в виде (3.44), принимая

$$\check{\sigma}_{\Delta m} = -\sigma_{m1}; \quad \eta_{\Delta} = \left| \frac{\sigma_{\Delta m}}{\sigma_{m1}} \right|; \quad E_{\Delta m}^0 = E_{m1}^0; \quad (3.46)$$

$$\check{\nu}_{\Delta m} \approx 0,7 + 0,3 \nu_{m1}; \quad \nu_{\Delta 0} = 1/\nu_{m1}$$

(фактически $E_{\Delta m}^0 = E_{m1}^0 / \nu_{m1}$, при этом изменяются $\nu_{\Delta 0}$ и $\check{\nu}_{\Delta m}$).

В точке 3 (при полной разгрузке) получим $\eta_{\Delta} = 1$;
 $\sigma_{\Delta m} = \check{\sigma}_{\Delta m}$; $\nu_{\Delta m} = \check{\nu}_{\Delta m}$; $\varepsilon_{\Delta m} = \check{\varepsilon}_{\Delta m} = -\sigma_{m1} / E_{m1}^0 \check{\nu}_{\Delta m}$.

Отрезки 3-4-5 и 3-6-7 диаграммы описываем зависимостями (3.57), полагая

$$\omega_i = 2 - 2,5 \hat{\nu}_m + (36 \nu_{m1} - 28) \sqrt{\hat{\nu}_{\Delta m} - \hat{\nu}_m}; \quad (3.47)$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta m} = \check{\gamma}_{\Delta 1} \hat{\sigma}_m; \quad \hat{\varepsilon}_{\Delta m} = \hat{\gamma}_{\Delta 2} \hat{\varepsilon}_m; \quad E_{\Delta m}^0 = \check{\gamma}_{\Delta 3} E_b^0,$$

где $\check{\gamma}_{\Delta i}$ — корректирующие функции ($i = 1, 2, 3$)

$$\check{\gamma}_{\Delta i} = 1 + \beta_{1i} \varphi_{\nu} + \beta_{2i} \varphi_{\nu}^2 + \beta_{3i} \varphi_{\nu}^3, \quad (3.48)$$

здесь

$$\varphi_{\nu} = \frac{1 - \nu_{m1}}{1 - \hat{\nu}_m}, \quad (3.49)$$

β_{ij} ($j, i = 1, 2, 3$) — коэффициенты, принимаемые по табл. 3.1; они зависят от вида напряжения — растяжение или сжатие, которое следует за полной разгрузкой в точке 3 на рис. 3.7.

Таким образом зависимостями (3.44), (3.47), (3.48) описываются новые диаграммы растяжения или сжатия с началом в новой точке 3; $\hat{\sigma}_{\Delta m}$, $\hat{\varepsilon}_{\Delta m}$ — напряжения и деформации, соответствующие вершинам новых диаграмм, аналогично $E_{\Delta m}^0$ — начальные модули новых диаграмм; все эти величины вычисляются с учетом влияния предшествовавшего сжатия или растяжения на изменение их значений согласно табл. 3.1. Формулы (3.47) — (3.48), как и данные табл. 3.1, являются эмпирическими. Они установлены на основе обработки экспериментов. Заметим, что представленные в табл. 3.1 данные относятся к режимам нагружения примерно с постоянной скоростью роста деформаций и по мере накопления экспериментальных данных могут уточняться.

Таблица 3.1

Вид нагружения	$\check{\gamma}_{\Delta i}$	β_{1i}	β_{2i}	β_{3i}
Повторное сжатие	$\check{\gamma}_{\Delta 1}$	0,86	1,78	0,77
	$\check{\gamma}_{\Delta 2}$	-0,2	0	0
	$\check{\gamma}_{\Delta 3}$	0,43	-0,88	0,37
Растяжение после сжатия	$\check{\gamma}_{\Delta 1}$	-0,55	0,1	0
	$\check{\gamma}_{\Delta 2}$	0,2	0	0
	$\check{\gamma}_{\Delta 3}$	-0,27	-0,02	0
Сжатие после растяжения	$\check{\gamma}_{\Delta 1}$	-0,17	0,02	0
	$\check{\gamma}_{\Delta 2}$	0,13	-0,12	0
	$\check{\gamma}_{\Delta 3}$	-0,06	-0,02	0

Следует отметить, что, видимо, первое систематизированное изучение значений $E_{\Delta m}^0$, $\hat{\sigma}_{\Delta m}$ и $\hat{\epsilon}_{\Delta m}$ при режимах нагружения было начато в нашей стране авторами работ [50, 81, 114, 143, 147], которые предложили выражения для функций типа $\hat{\gamma}_{\Delta i}$ в зависимости от уровня напряжений в момент разгрузки (уровня в точке 1) и вида последующего нагружения. Кроме того ими отмечалось также некоторое влияние на функцию $\hat{\gamma}_{\Delta i}$; класса бетона, времени выдержки напряжений в точке 1 и возраста бетона. Предлагаемое конструирование формулы (3.48) в зависимости от ν_{m1} и $\hat{\nu}_{\Delta m}$ позволяет учесть определенное влияние различных факторов более простым и компактным способом.

Перейдем теперь к рассмотрению повторного нагружения после неполной разгрузки, которое, например, начинается в некоторой точке 2 (рис. 3.8). Через точку 2 проводится кусочная диаграмма 9—2—10. Эта диаграмма описывается зависимостями (3.44), (3.47) так же, как диаграмма 3—4—5 на рис. 3.7. Изменяется лишь формула по вычислению параметра φ_{ν} , входящего в формулу (3.48),

$$\varphi_{\nu} = \frac{\nu_{m8} - \nu_{m1}}{1 - \nu_m}, \quad (3.50)$$

где ν_{m8} — коэффициент секущего модуля для точки 8 на исходной диаграмме.

Точка 8 находится по напряжениям на уровне точки 2, т.е. $\sigma_{m2} = \hat{\sigma}_{m8}$.

Диаграмма 9—2—10 имеет некоторый начальный фиктивный отрезок 9—2; $\sigma_{\Delta m(2-9)} = \sigma_{m2}$ и $\epsilon_{\Delta m(2-9)}$ — приращения напряжений и деформаций на фиктивном отрезке. Эти приращения необходимо вычислять из общих приращений, отсчитываемых от точки 9, чтобы получить действительные значения приращений, которые отсчитываются от точки 2. Представленный путь вычисления не всегда удобен, поэтому остановимся на более простом подходе.

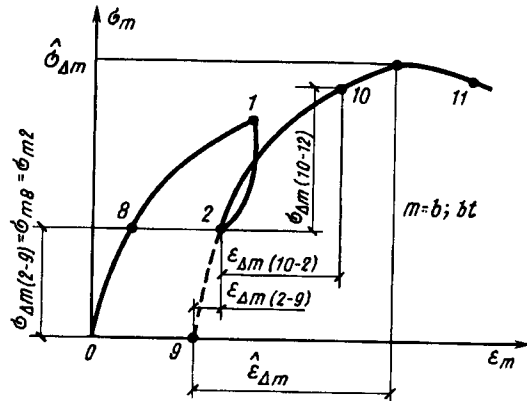


Рис. 3.8. Схема диаграммы после неполной разгрузки

Пусть, например, известно описание отрезка 9—2—10 сложной диаграммы с началом отсчета напряжений и деформаций в точке 9; $E_{\Delta m(9)}^0$ — начальный модуль этой диаграммы, точнее отрезка 9—2—10, тогда приращения деформаций в точках 2, 10 относительно точки 9 можно представить в виде (рис. 3.9, а):

$$\epsilon_{\Delta m(2-9)} = \frac{\sigma_{\Delta m(2-9)}}{E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(2-9)}}; \quad (3.51)$$

$$\epsilon_{\Delta m(10-9)} = \frac{\sigma_{\Delta m(10-9)}}{E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(10-9)}}. \quad (3.52)$$

Пусть теперь точка отсчета деформаций и напряжений переместилась в точку 2, тогда приращения деформаций в точке 10 относительно точки 2 составят

$$\epsilon_{\Delta m(10-2)} = \frac{\sigma_{\Delta m(10-2)}}{E_{\Delta m(2)}^0 \nu_{\Delta m(10-2)}}, \quad (3.53)$$

где $E_{\Delta m(2)}^0$ — начальный модуль для отрезка диаграммы 2—10 (здесь возможны два варианта: 1 — если отрезок 9—2—10 описывается одной зависимостью с началом в точке 9 как, например, на рис. 3.9, а, тогда удобно принимать $E_{\Delta m(2)}^0 = E_{\Delta m(9)}^0$, относя все различия к коэффициенту $\nu_{\Delta m(10-2)}$; 2 — если в точке 2 стыкуются две разные диаграммы, как, например, на рис. 3.9, б, в, то величины $E_{\Delta m(2)}^0$ и $E_{\Delta m(9)}^0$ могут приниматься разными).

Стоящие в знаменателях выражений (3.51)–(3.53) величины типа $(E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(10-9)})$ и другие являются секущими модулями диаграммы на приращениях; они равны тангенсам углов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (см. рис. 3.9). Из рис. 3.9, а следует два очевидных равенства:

$$\epsilon_{\Delta m(10-9)} = \epsilon_{\Delta m(2-9)} + \epsilon_{\Delta m(10-2)};$$

$$\sigma_{\Delta m(10-9)} = \sigma_{\Delta m(2-9)} + \sigma_{\Delta m(10-2)}.$$

Внося в первое равенство значения деформаций из (3.51)–(3.53), а во второе — значения напряжений, выраженные на основании (3.51)–(3.53) через деформации, можно преобразовать эти равенства к виду:

$$\frac{\sigma_{\Delta m(10-9)}}{E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(10-9)}} = \frac{\sigma_{\Delta m(2-9)}}{E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(2-9)}} + \frac{\sigma_{\Delta m(10-2)}}{E_{\Delta m(2)}^0 \nu_{\Delta m(10-2)}}; \quad (3.54)$$

$$E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(10-9)} \epsilon_{\Delta m(10-9)} =$$

$$= E_{\Delta m(9)}^0 \nu_{\Delta m(2-9)} \epsilon_{\Delta m(2-9)} + \epsilon_{\Delta m(10-2)} E_{\Delta m(2)}^0 \nu_{\Delta m(10-2)}.$$

Приведем два примера использования равенств (3.54). Пример 1: пусть известно описание отрезка диаграммы 9—2—10

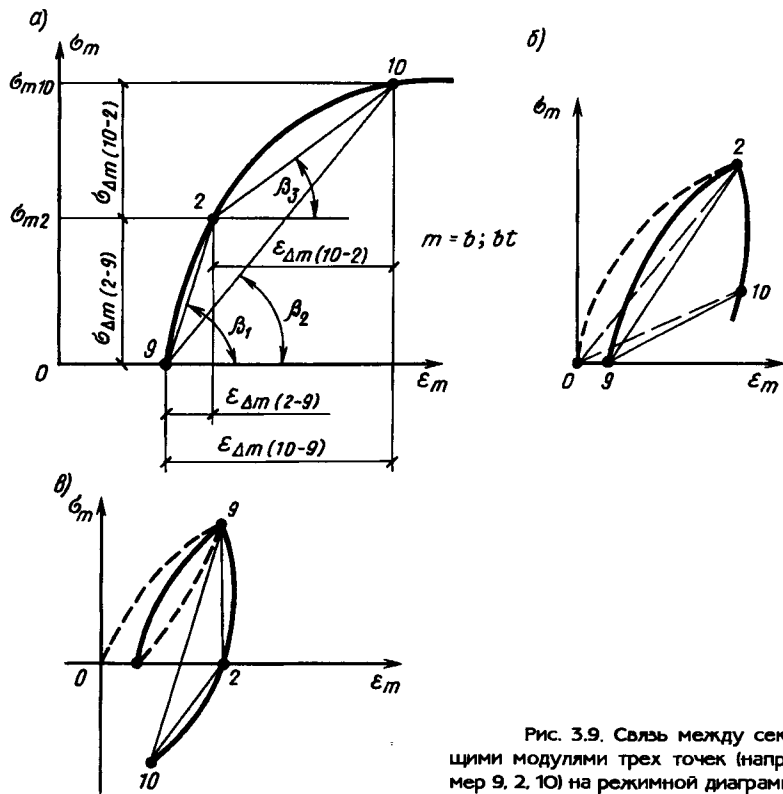


Рис. 3.9. Связь между секущими модулями трех точек (например 9, 2, 10) на режимной диаграмме

(см. рис. 3.9, а) с началом в точке 9 и необходимо перейти к ее описанию — определению секущих модулей с началом в новой точке 2. Эта задача сводится к определению секущих коэффициентов $\psi_{\Delta m(10-2)}$ из первой или второй зависимости (3.54). *Пример 2:* пусть известно описание двух состыкованных диаграмм (9–2) и (2–10), рис. 3.9, б, в которые начинаются с разных центров 9 и 2. Требуется выполнить описание состыкованных диаграмм с началом в точке 9. Тогда задача сводится к вычислению условного секущего модуля $(E_{\Delta m(9)}^b \psi_{\Delta m(10-9)})$ из первого или второго равенства (3.54).

Диаграммы малоциклового нагружения. Следуя [81], рассмотрим более общую, чем выше, схему построения диаграмм. Выделим сначала кратковременные циклы одноосного сжатия, состоящие из ветви нагрузки, до постоянного или меняющегося от цикла к циклу уровня напряжений — уровня цикла, и ветви полной разгрузки. Диаграмму непрерывного малоциклового нагружения назовем веревочной (непрерывной). Будем учитывать следующие, наблюдаемые в экспериментах свойства веревочной диаграммы: затухающий рост

необратимых деформаций в процессе малоциклового нагружения; влияние уровня и количества предшествующих циклов на характер диаграммы и накопление остаточных деформаций при последующих циклах более высокого уровня (влияние предистории нагружения); влияние циклического нагружения на прочность бетона как в сторону увеличения при некоторых циклах среднего уровня, так и снижения при очень высоких уровнях; изменение кривизны диаграммы на отрезках (ветвях) повторных нагружений (с выпуклости к оси деформаций вблизи начала нагружения на выпуклость в сторону оси напряжения); сохранение односторонней выпуклости на ветвях разгрузки в сторону оси деформаций.

Построение веревочной диаграммы поясним вначале на примере четырехциклового диаграммы (рис. 3.10, а). Первый цикл: 0–1–

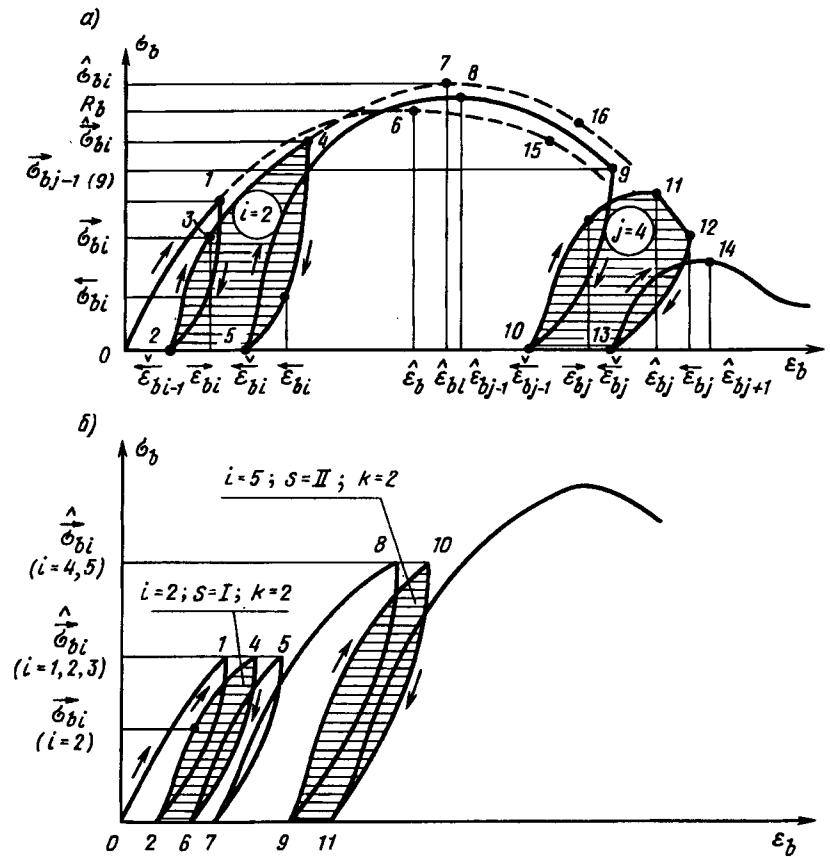


Рис. 3.10. Диаграммы деформирования бетона при малоцикловоом нагружении (i — номер цикла; s — номер группы циклов; k — номер цикла в группе s)

ветвь нагрузки, 1-2 — ветвь разгрузки; второй цикл; 2-4 — ветвь нагрузки; 4-5 — ветвь разгрузки; третий цикл; 5-8 — ветвь нагрузки; 8-9 — смешанная ветвь с нагрузкой по деформациям и разгрузкой по напряжениям, которая условно отнесена к общей ветви нагрузки 5-8-9; 9-10 — ветвь разгрузки; четвертый или j -й цикл; 10-11-12 — ветвь нагрузки; 12-13 — ветвь разгрузки. Циклы описываются однотипным образом, поэтому достаточно рассмотреть некоторый цикл ($i = 2$ на рис. 3.10, а) до вершины диаграммы и цикл j ($j = 4$) — после прохождения вершины (на нисходящей ветви).

Ветвь нагрузки любого цикла — это отрезок полной диаграммы, которая получается путем некоторой модификации параметров исходной диаграммы 0-1-6-15-... (см. рис. 3.10, а). Такие диаграммы назовем следящими. В данном случае ветвь нагрузки 2-4 i -го цикла является частью следящей диаграммы 2-4-7-16.

Напряжения и относительные деформации отсчитываются от начала координат 0 и обозначаются: $\hat{\sigma}_{bi}$, $\hat{\epsilon}_{bi}$ — на ветви нагрузки (\rightarrow) и $\bar{\sigma}_{bi}$, $\bar{\epsilon}_{bi}$ — ветви разгрузки (\leftarrow); кроме этого: $\hat{\epsilon}_{bi-1}$ — остаточные деформации от предшествовавшего ($i-1$)-го цикла (в данном случае деформации в точке 2); $\hat{\sigma}_{bi}$, $\hat{\epsilon}_{bi}$ — напряжения и деформации в вершине цикла (точка 4); $\bar{\epsilon}_{bi}$ — деформации в конце цикла (точка 5). Для дальнейших построений понадобятся еще напряжения и деформации ($\hat{\sigma}_{bi}$, $\hat{\epsilon}_{bi}$) в вершине следящей диаграммы, например в точке 7 при $i = 2$. Исходной диаграмме или диаграмме первого цикла соответствует: $\hat{\sigma}_{b1} = \hat{\sigma}_b = R_{b,ser}$, $\hat{\epsilon}_{b1} = \epsilon_R$. Последовательность совпадает с последовательностью циклов, начиная с $i = 1$.

Связь между напряжениями и деформациями для i -го цикла представляется так (см. рис. 3.10, а):

на ветви нагрузки (отрезок 2-4)

$$\bar{\epsilon}_{bi} = \frac{\hat{\sigma}_{bi}}{E_b^0 \hat{\nu}_{bi}} + \epsilon_{bi-1}^v \quad (3.55)$$

на ветви разгрузки (отрезок 4-5)

$$\bar{\epsilon}_{bi} = \hat{\epsilon}_{bi} - \frac{\hat{\sigma}_{bi} - \bar{\sigma}_{bi}}{E_b^0} \bar{\nu}_{bi} \quad (3.56)$$

где $\hat{\nu}_{bi}$, $\bar{\nu}_{bi}$ — коэффициенты изменения секущего модуля деформации бетона на ветвях нагрузки (\rightarrow) и разгрузки (\leftarrow) рассматриваемого цикла; деформации $\hat{\epsilon}_{bi}$ вычисляются по формуле (3.55) при $\bar{\sigma}_{bi} = \hat{\sigma}_{bi}$, а величины $\hat{\epsilon}_{bi-1}$ известны из расчета предшествующего цикла ($i - 1$).

Функция $\hat{\nu}_{bi}$ или ν_b исходной диаграммы представлена выше. С учетом влияния многократно повторяющейся нагрузки эту функцию можно записать в виде [по аналогии с формулой (3.2)]

$$\hat{\nu}_{bi} = \hat{\nu}_{bi} + (\bar{\nu}_{oi} - \hat{\nu}_{bi}) \sqrt{1 - \omega_{i1} \bar{\eta}_i - \omega_{i2} \bar{\eta}_i^2} \quad (3.57)$$

Представим значения параметров формулы (3.57) сначала для циклов,

вершины которых расположены в пределах восходящих участков следящих диаграмм (до точек 6, 7, 8): из двух знаков «+» принимается «++» (плюс); $\hat{\nu}_{bi}$ — значение $\hat{\nu}_{bi}$ в вершине диаграммы (при $i = 2$ в точке 7, см. рис. 3.10, а):

$$\hat{\nu}_{bi} = \frac{\hat{\sigma}_{bi}}{E_b^0 (\hat{\epsilon}_{bi} - \bar{\epsilon}_{bi-1})} \approx \frac{\hat{\sigma}_{bi}}{E_b^0 (\epsilon_R - S \bar{\epsilon}_{bi-1})} \quad (3.58)$$

где $s \approx \hat{\sigma}_{bi} / \hat{\sigma}_b$; $\hat{\sigma}_b = R_{b,ser}$,

$\bar{\eta}_i = \bar{\sigma}_{bi} / \hat{\sigma}_{bi}$ — уровень напряжений на ветви нагрузки ($\hat{\sigma}_{bi}$ — напряжения в вершине диаграммы в точке 7 при $i = 2$);

на восходящем участке диаграммы

$$\omega_{i1} = 2 - 2,5 \hat{\nu}_{bi}; \quad \omega_{i2} = 1 - \omega_{i1} \quad (3.59)$$

$\bar{\nu}_{oi}$ — функция изменения кривизны диаграммы на начальном ее участке (учитывает указанное выше четвертое свойство), в первом приближении на восходящем участке диаграммы

$$\bar{\nu}_{oi} \approx 1 + \frac{(1,5 \bar{\eta}_i - \hat{\eta}_{i-1}) I_{i-1}}{5 (1 + I_{i-1})} \quad (3.60)$$

здесь $\hat{\eta}_{i-1}$ — уровень напряжений в вершине предшествовавшего ($i - 1$) цикла (при $i = 2$ в точке 7); I_{i-1} — функция влияния предшествовавших циклов

$$I_{i-1} = \sum_i (|\hat{\eta}_{i-1}^2 - \bar{\eta}_{i-2}|)^{0,5} \quad (3.61)$$

(при $i = 1, I_i = 0$ и $\bar{\nu}_{oi} = 1$);

константы 1,5 и 5 в формуле (3.60) еще требуют уточнения на основании экспериментов.

Функция разгрузки $\bar{\nu}_{bi}$ представляется в виде (3.57), с той лишь разницей, что $\bar{\nu}_{oi}$ заменяется на $\bar{\nu}_{oi}$ и $\bar{\eta}_i$ на $\bar{\eta}_i$ (уровень разгрузки), причем

$$\bar{\nu}_{oi} \approx 1 + \frac{(1 - \bar{\eta}_i) I_i}{5 (1 + 0,1 I_i)}; \quad \bar{\eta}_i = \frac{\bar{\sigma}_{bi}}{\hat{\sigma}_{bi}} \quad (3.62)$$

здесь функция I_i определяется по формуле (3.61) с заменой циклов ($i - 1$) на i и ($i - 2$) на ($i - 1$), константы 5 и 0,1 заданы примерными.

Остановимся на физической картине, учитываемой функциями $\bar{\nu}_{oi}$ и $\bar{\nu}_{bi}$. Циклическое приложение напряжений разрыхляет структуру бетона микротрещинами и создает дополнительное поле внутренних напряжений. Эти явления в начале новых диаграмм снижают секущий модуль деформации, а затем, вследствие зажатия части дефектов (уплотнения структуры ежатием), приводят к его увеличению. Функция $\bar{\nu}_{oi}$ при соответствующем подборе позволяет отобразить указанные явления. Увеличение модуля с некоторого уровня опять сменяется снижением, особенно существенным вблизи вершины диаграммы и на ее нисходящем участке; причина — развитие псевдопластических деформаций, обусловленных устойчивым, а затем и неустойчивым

развитием внутренних микро- и макротрещин). Этот фактор отображает член формулы (3.57), стоящий под квадратным корнем.

На характер ветви разгрузки большое влияние оказывает обратная ползучесть — упругое последствие, в результате которого деформации в начале кратковременной разгрузки снижаются весьма медленно (и могут даже возрастать) и только вблизи полной разгрузки снижение деформаций становится заметным. Последний фактор отображается путем подбора функции $\bar{\nu}_{oi}$, а общий характер ветви разгрузки описывается функцией $\bar{\nu}_{bi}$.

Вершины следящих диаграмм (точки 7, 8 и другие) определяются координатами $\hat{\sigma}_{bi}$, $\hat{\epsilon}_{bi}$. Имеются данные о том, что многократно повторное циклическое нагружение при некоторых средних уровнях циклов ($\bar{\eta}_i \approx 0,4 - 0,7$) приводит к увеличению прочности $\hat{\sigma}_{bi}$ по сравнению с призмной прочностью $\hat{\sigma}_b$, а циклы с высоким уровнем ($\bar{\eta}_i > 0,9$), наоборот, снижают прочность. Эти тенденции можно учесть, приняв

$$\hat{\sigma}_{bi} \approx \hat{\sigma}_b (1 + 0,1 \sum_{i=1}^n \alpha_i), \quad (3.63)$$

$$\text{где} \quad \alpha_i \approx \sin [0,16k_i \pi (\bar{\eta}_i - 0,3)], \quad (3.64)$$

здесь: $k_i = (5 - i)/4i$, если $0,3 < \bar{\eta}_i < 0,9$;

$$k_i = 1/i, \text{ если } \bar{\eta}_i > 0,9.$$

При $\bar{\eta}_i < 0,3$ $\alpha_i = 0$, т.е. влияние циклов не учитывается.

Рассмотрим приближенно циклы в пределах нисходящего участка диаграммы, поскольку имеются лишь отдельные экспериментальные работы (они указаны в [81]), в которых приводятся те или иные количественные характеристики таких циклов. Вначале обратимся к переходному третьему ($j - 1$) циклу [$i = (j - 1) = 3$, см. рис. 3.10, а], который начинается в пределах восходящего участка диаграммы, а заканчивается на стороне нисходящего участка.

Восходящая ветвь 5—8 этого цикла записывается формулами (3.55), (3.57)—(3.61), а смешанный участок 8—9 — формулами (3.55), (3.57), (3.59) при $\nu_{oi} \approx 2,05 \hat{\nu}_{bi}$; кроме того в формуле (3.57) из двух знаков «±» принимается «-» (эти особенности следует учитывать и для других отрезков нисходящей диаграммы, например отрезка 11—12 цикла $j = 4$). Запомним: $\bar{\nu}_{bj-1(9)}$, $\bar{\sigma}_{bj-1(9)}$, $\bar{\epsilon}_{bj-1(9)}$ — коэффициенты изменения секущего модуля, напряжения и относительные деформации в точке 9. Дополнительно на продолжении отрезка 8—9 (условно в точке 9, А) вычисляются деформации $\bar{\epsilon}_{bj-1(9A)}$, которые отвечают напряжениями $\bar{\sigma}_{bj-1(9A)} \approx 0,95 \bar{\sigma}_{bj-1(9)}$. Разгрузка на отрезке 9—10 осуществляется по формулам (3.55), (3.57), (3.62) при $\bar{\eta}_{j-1} = \bar{\sigma}_{bj-1} / \bar{\sigma}_{bj-1(9)}$ (здесь точка 9, А в дальнейшем точка 12 принимается за вершины разгрузки).

В конце ($j - 1$) цикла полагаем:

$$\hat{\sigma}_{bj} = \bar{\sigma}_{bj-1(9A)}; \quad \nu_{bj} = \frac{\hat{\sigma}_{bj}}{(\bar{\epsilon}_{bj-1(9A)} - 0,8 \bar{\epsilon}_{bj-1}) E_b^0}; \quad (3.65)$$

$$\bar{\eta}_j = \bar{\sigma}_{bj} / \hat{\sigma}_{bj}.$$

С учетом формулы (3.65) по формулам (3.55), (3.57), (3.59)—(3.61) выполняется рассмотрение восходящей ветви 10—11 цикла $j = 4$ и его смешанного отрезка 11—12, так же как и отрезка 8—9. Отрезок разгрузки 12—13 описывается по аналогии с отрезком 9—10 при:

$$\bar{\eta}_j = \frac{\bar{\sigma}_{bj}}{\bar{\sigma}_{bj(12)}}; \quad \hat{\nu}_{bj} = \frac{\bar{\sigma}_{bj(12)}}{\bar{\epsilon}_{bj(12)} E_b^0}, \quad (3.66)$$

здесь $\bar{\sigma}_{bj(12)}$ и $\bar{\epsilon}_{bj(12)}$ — напряжения и деформации, соответствующие точке 12 диаграммы.

В дальнейшем производятся вычисления типа (3.65) для ($j + 1$) цикла и расчет продолжается.

Ранее рассматривалась диаграмма деформирования бетона при отдельных или чередующихся циклах нагружения разного уровня — при так называемом жестком режиме нагружения. Пусть теперь нагружение осуществляется по схеме рис. 3.10, б, где в пределах одного уровня напряжений может быть несколько ($k = 1, 2, 3, \dots$) циклов. Однотипные (одного уровня) циклы образуют группу. Одна группа циклов может сменяться другой группой более высокого уровня (на восходящей ветви) или более низкого уровня (на нисходящей ветви диаграммы).

Например, на рис. 3.10, б представлены две группы циклов $s = I, II$; первая ($s = I$) включает циклы: 0—1—2 ($k = i = 1$); 2—4—5 ($k = i = 2$); 5—6—7 ($k = i = 3$), а вторая ($s = II$): 7—8—9 ($k = 1, i = 4$); 9—10—11 ($k = 2, i = 5$), где i — как и раньше общий порядковый номер цикла. Диаграмма деформирования бетона при циклическом нагружении по схеме рис. 3.10, б описывается также зависимостями (3.55)—(3.60), (3.62)—(3.63), в которых меняется лишь способ вычисления значений I_{i-1} и I_i . Вместо (3.61) рекомендуется формула

$$I_{i-1} = \sum_{j=i-1}^{i-1} (S_{i-1} \bar{\eta}_{i-1}^k - \bar{\eta}_{i-2}^k)^{0,5}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

где $S_{i-1} = 1$, если циклы ($i - 1$) и i принадлежат разным группам; $S_i = \frac{k(i-1)+3}{k(i-1)+2}$, —, если ($i - 1$) и i принадлежат одной группе; причем $k(i - 1)$ — номер k , соответствующий ($i - 1$), например для цикла 9—10—11 ($i - 1 = 4$); $k(i - 1) = 1$.

При вычислении I_i заменяются ($i - 1$) на i , ($i - 2$) на ($i - 1$); для цикла 9—10—11 $i = 5$; $k(i) = 2$.

Таким образом рассмотрены зависимости по описанию диаграммы деформирования бетона при различных часто встречающихся в практике проектирования режимах нагружения. Предложенные зависимости позволят по-новому подойти к расчету железобетонных конструкций с учетом рассмотренных режимов нагружения.

Запись циклических диаграмм в малых приращениях. Дифференцируя (3.60), (3.61) соответственно по $\hat{\sigma}_{bi}$, $\hat{\sigma}_{bi}$, находим:

$$\frac{d\hat{\epsilon}_{bi}}{d\hat{\sigma}_{bi}} = \frac{\hat{\nu}_{bi}}{E_b^0} + \frac{(\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i)}{E_b^0} \left[\frac{2\hat{T}_i\hat{S}_i + (\hat{\nu}_{oi} - \hat{\nu}_{bi})\hat{S}_i}{2\sqrt{\hat{S}_i}} \right];$$

$$\frac{d\hat{\epsilon}'_{bi}}{d\hat{\sigma}'_{bi}} = \frac{1}{E_b^0 \hat{\nu}_{bi}} + \frac{1}{E_b^0 \hat{\nu}_{bi}^2} \left[\frac{(\hat{\nu}_{oi} - \hat{\nu}_{bi})\hat{S}_i - 2\hat{T}_{i-1}\hat{S}_i}{2\sqrt{\hat{S}_i}} \right], \quad (3.67)$$

где

$$\hat{T}_i = \frac{I_i}{5(1+0,1I_i)}; \quad \hat{T}_{i-1} = \frac{1,5I_{i-1}}{5(1+I_{i-1})};$$

$$\hat{S}_i = 1 - \omega_{1i}\hat{\eta}_i - \omega_{2i}\hat{\eta}_i^2; \quad \hat{S}'_i = 1 - \omega_{1i}\hat{\eta}_i - \omega_{2i}\hat{\eta}_i^2;$$

$$\hat{S}'_i = \omega_{1i} = 2\omega_{2i}\hat{\eta}_i; \quad \hat{S}'_i = \omega_{1i} + 2\omega_{2i}\hat{\eta}_i.$$

3.3. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУР НА ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ БЕТОНА

К нормальной стандартной температуре относят $t^0 = 20^\circ\text{C}$, а к повышенной $20^\circ < t^0 < 200^\circ\text{C}$; этими границами очерчивается применимость обычного бетона в условиях воздействия температур; при более высоких температурах рекомендуется применять специальные жаростойкие бетоны, которые здесь не рассматриваются, хотя представленные зависимости могут быть распространены и на эти бетоны.

В условиях повышенных температур физико-механические характеристики бетона существенно изменяются. Изучением этих вопросов занимались многие исследователи. Обзоры их работ можно встретить в монографиях А.Ф. Милованова [122], А.П. Кричевского [97] и др. Систематизация исследований по влиянию повышенных температур на диаграммы $\hat{\epsilon}_b - \hat{\sigma}_b$ была выполнена А.П. Кричевским; им также были предложены эмпирические зависимости по трансформации параметров диаграммы (3.1) — (3.2), которые приводятся ниже (рис. 3.11).

Выделяется несколько программ осуществления кратковременного нагружения в условиях повышенных температур: 1 — кратковременное приложение нагрузки сопровождается нагревом (синхронизированное «нагружение» нагрузкой и температурой); 1а — кратковременное приложение нагрузки происходит после кратковременного нагрева; 2 — кратковременное приложение нагрузки происходит после длительного нагрева. В основном использовались программы 1 и 2, с некоторым приближением программой 1а можно отождествлять с программой 1, хотя, как показывают указанные в [97] исследования, здесь могут встретиться различия; этот вопрос еще требует уточнения.

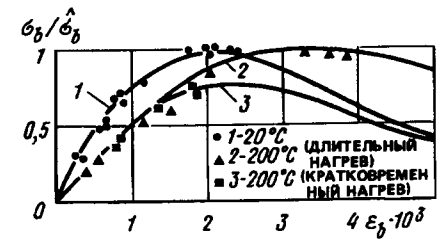


Рис. 3.11. Диаграммы деформирования бетона при осевом сжатии и повышенной температуре

Примем за начало отсчета деформаций состояние образца до приложения нагрузки и температуры, тогда продольные $\hat{\epsilon}_b$ и поперечные $\hat{\epsilon}_p$ деформации бетона для указанных программ нагружения можно вычислять по формулам:

$$\hat{\epsilon}_b = \frac{\sigma_b}{E_b \nu_b} + \alpha_b^0 t_\Delta^0 - \epsilon_{cs}^0; \quad (3.68)$$

$$\hat{\epsilon}_p = \frac{\sigma_b \mu_b}{E_b \nu_b} + \alpha_b^0 t_\Delta^0 - \epsilon_{cs}^0,$$

где α_b^0 — коэффициенты температурной деформации бетона; ϵ_{cs}^0 — температурная усадка; t_Δ^0 — приращение температуры сверх некоторой исходной ($t_\Delta^0 = t^0 - t_n^0$, где t_n^0 — расчетная исходная температура, определяемая согласно СНиП по климатологии и геофизике; t^0 — полная температура). Заметим, что ниже t_n^0 обозначаем t^0 , однако подразумеваем t_Δ^0 .

Рассмотрим в отдельности компоненты зависимостей (3.68). Первые слагаемые (3.68) представляют диаграммы бетона (3.1) и (3.29). Однако параметры этих диаграмм изменяются с учетом влияния повышенных температур. Отдельно корректируются параметры сжатия и растяжения.

Диаграмма сжатия. Температура влияет на величины E_b^0 , $\hat{\sigma}_b^0$ (или $R_{b,ser}$), $\hat{\epsilon}_R$, которые после учета этого влияния обозначаются 0E_b , ${}^0\hat{\sigma}_b$ (или ${}^0R_{b,ser}$), ${}^0\hat{\epsilon}_R$. В остальном зависимости (3.02) — (3.10) остаются без изменения. Следуя [97], можно записать:

$${}^0R_{b,ser} = R_{b,ser} \alpha_{b,i} ({}^0\hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_b \alpha_{b,i}); \quad (3.69)$$

$${}^0E_b = E_b^0 \beta_b;$$

$${}^0\hat{\epsilon}_R = \hat{\epsilon}_{R,1} + (\hat{\epsilon}_{R,2} - \hat{\epsilon}_{R,1})(1 - e^{-0,042t^*}),$$

где ${}^0\hat{\epsilon}_{R,1}$, ${}^0\hat{\epsilon}_{R,2}$ определяются по формуле

$${}^0\hat{\epsilon}_{Ri} = (\hat{\epsilon}_R + \frac{2AR_{b,ser} \ln \hat{\sigma}_b^0}{E_b^0}) (B_i + C_i \ln t^0) - \epsilon_c \quad (i = 1, 2)$$

где $i = 1$ обозначает кратковременный нагрев ($A_1 = 0$; $B_1 = 0,67$; $C_1 = 0,11$); $i = 2$ — длительный нагрев ($A_2 = 0,11$; $B_2 = 0,46$; $C_2 = 0,18$)

$${}^0\epsilon_c = [15,2\hat{t}^0 - 1,04(\hat{t}^0)^2 - 14] 10^5;$$

$\alpha_{b,i}$, β_b — коэффициенты, принимаемые по табл. 3.2; t^0 — полная температура нагрева, ${}^\circ\text{C}$ ($t^0 > 20^\circ$; $\hat{t}^0 = t^0/20^\circ$); $\hat{\epsilon}_R$ — деформация в вершине диаграммы сжатия [вычисляется по формуле (3.06)]; t^* — приведенное время температурного воздействия.

В табл. 3.2 кратковременным нагревом считают первый разогрев конструкции, который происходит со скоростью 10°C/ч и более; ему условно соответствует время $t^* = 0$. При длительном нагреве $t^* = \infty$. Если необходимо вычислить параметры (3.69) при ограниченном времени t_{*} воздействия температуры, то следует заменить ${}^{\circ}\gamma_{b,i}$ на

$${}^{\circ}\gamma_b = {}^{\circ}\gamma_{b,1} + ({}^{\circ}\gamma_{b,2} - {}^{\circ}\gamma_{b,1})(1 - e^{-0,042t^*}). \quad (3.70)$$

При этом

$$t^* = t_{*}F(\tilde{t}^{\circ}), \quad (3.71)$$

где \tilde{t}° — фактическое время действия повышенной температуры на бетон; $F(\tilde{t}^{\circ})$ — функция приведения,

$$F(\tilde{t}^{\circ}) = 0,7 + 0,3\tilde{t}^{\circ} + 0,004(\tilde{t}^{\circ})^2. \quad (3.73)$$

Если после достижения некоторой максимальной температуры \hat{t}° происходит остановка, то используются параметры, соответствующие \hat{t}° . В промежутках температур 20–50°C, а также в промежутках температур, указанных в табл. 3.2, значения коэффициентов вычисляются по линейной интерполяции.

Таблица 3.2

Коэффициент	Вид нагрева	Температура бетона, °C				
		50	70	100	150	200
${}^{\circ}\gamma_{b,1}$	Кратковременный	0,84	0,76	0,72	0,7	0,76
${}^{\circ}\gamma_{b,2}$	Длительный	0,94	0,81	0,89	0,9	1
${}^{\circ}\gamma_{bt,1}$	Кратковременный	0,82	0,76	0,7	0,7	0,79
${}^{\circ}\gamma_{bt,2}$	Длительный	0,97	0,94	0,9	0,85	0,85
${}^{\circ}\beta_b$	Кратковременный и длительный	0,83	0,76	0,68	0,61	0,58

Диаграмма растяжения. Величины E_b° , $\hat{\sigma}_{bt}(R_{bt,ser})$, $\hat{\epsilon}_{bt}$ заменяются на ${}^{\circ}E_b$, ${}^{\circ}\hat{\sigma}_{bt}({}^{\circ}R_{bt,ser})$, ${}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt}$. В остальном зависимости (3.1), (3.2), (3.12) остаются без изменения. Следуя [97], можно записать:

$${}^{\circ}R_{bt,ser} = R_{bt,ser} {}^{\circ}\gamma_{bt,i} \quad (\text{или } {}^{\circ}\hat{\sigma}_{bt} = \hat{\sigma}_{bt} {}^{\circ}\gamma_{bt,i}); \quad (3.73)$$

$${}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt} = {}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,1} + ({}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,2} - {}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,1})(1 - e^{-0,042t^*}),$$

где значения ${}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,1}$, ${}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,2}$ определяются по формуле

$${}^{\circ}\hat{\epsilon}_{bt,i} = (\hat{\epsilon}_{bt} + 12{}^{\circ}R_i / (7E_b^{\circ})) (B_i + C_i \ln \tilde{t}^{\circ}) - {}^{\circ}\epsilon_{t,i}$$

где

$${}^{\circ}R_i = p_i R_{bt,ser} [90\tilde{t}^{\circ} - 8,52(\tilde{t}^{\circ})^2 - 10] 10^{-3},$$

$${}^{\circ}\epsilon_{t,i} = [1,8\tilde{t}^{\circ} - 0,1344(\tilde{t}^{\circ})^2 - 1,65] 10^{-5};$$

здесь $p_i = 0$ — при кратковременном нагреве ($i = 1$); $p_i = 1$ — при длительном нагреве ($i = 2$).

Коэффициент поперечной деформации. Начальное значение коэффициента поперечной деформации зависит от температуры. Согласно [97] этот коэффициент можно принимать

$${}^{\circ}\mu_b = \mu_b^{\circ} - 6(\tilde{t}^{\circ} - 1) 10^{-3}. \quad (3.74)$$

В формулах (3.36), (3.37) следует заменить μ_b° на ${}^{\circ}\mu_b$; $\hat{\mu}_b$ на ${}^{\circ}\hat{\mu}_b$.

Температурные и усадочные деформации при повышенных температурах [97]. Воздействие температуры на ненагруженный бетон приводит к возникновению в нем температурных деформаций и дополнительному развитию усадки; эти два фактора учитываются двумя последними слагаемыми в формулах (3.68). Температурная деформация при нагреве содержит необратимую (сохраняющуюся после остывания) и обратимую (исчезающую после остывания) деформации. Это выражается в том, что коэффициенты температурной деформации состоят из двух коэффициентов

$$\alpha_b^{\circ} = \alpha_{b1}^{\circ} + \alpha_{b2}^{\circ}, \quad (3.75)$$

где α_{b1}° — коэффициент необратимых температурных деформаций, который определяется по табл. 3.3; α_{b2}° — коэффициент обратимых температурных деформаций,

$$\alpha_{b2}^{\circ} = a + be^{-0,032(\tilde{t}^{\circ} - 1)\tilde{t}_{*}^{\circ}}, \quad (3.76)$$

здесь a , b — коэффициенты, назначаемые по табл. 3.3; \tilde{t}_{*}° — по-прежнему время действия температуры (при остывании \tilde{t}_{*}° принимается соответственно началу остывания).

Таблица 3.3

Коэффициенты	Температура, °C				
	50	70	100	150	200
$\alpha_{b1}^{\circ} \cdot 10^6$	6	3	1,56	0,4	0,105
$a \cdot 10^6$	7,46	7,7	8,12	9,09	10,5
$b \cdot 10^6$	4,3	3,9	3,3	2,3	1,3
${}^{\circ}\epsilon_{CS}(t^{\circ}, t_{*}^{\circ} = \infty) 10^5$	55	55	58,8	75	103,8
$M_0 = 5$	0,63	0,59	0,53	0,39	0,22
$\xi_t M_0 = 10$	0,86	0,85	0,83	0,78	0,71
$M_0 = 20$	0,98	0,98	0,98	0,98	0,88
$M_0 = 30$ и более	1	1	1	1	1

Изменение температурных деформаций при остывании и последующем увеличении температуры до величин, соответствующих началу остывания, определяется лишь с учетом коэффициента α_{b2}^0 .

Как известно [97], деформации усадки бетона при нормальной температуре связаны с влаготерями. При подъеме температуры происходит быстрое удаление влаги из бетона, что концентрирует процесс усадки в довольно сжатые временные сроки. Эта концентрированная усадка учитывается совместно с температурными деформациями. Ее определяют по формуле

$${}^0\varepsilon_{cs} = {}^0\varepsilon_{cs}(t^0, t_{i0} = \infty) \xi_{i0} [1 - e^{-\alpha_m(t^0-1)t_{i0}}] \quad (3.77)$$

где

$$\alpha_m = 0,2 \left(0,3 - \frac{6}{25 + M_0^2} \right),$$

M_0 — модуль открытой поверхности, m^{-1} ; ${}^0\varepsilon_{cs}(t^0, t_{i0} = \infty)$, ξ_{i0} — назначается по табл. 3.3.

Общая деформация усадки при действии повышенных температур суммируется из дополнительной температурной усадки ${}^0\varepsilon_{cs}$ и усадки, которая произошла к моменту начала разогрева (последняя величина вычисляется по формулам, представленным в гл. 4). В диапазоне изменения температур $20^\circ < t^0 < 50^\circ$ дополнительную температурную усадку допускается не учитывать.

3.4. ТРИ НАПРАВЛЕНИЯ В ПОСТРОЕНИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ДЛЯ БЕТОНА ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Вопросам обоснования и выбора основных физических соотношений для бетона посвящены многочисленные экспериментальные и теоретические работы как в нашей стране, так и за рубежом. Частичный обзор их дан в [87, 102] и других, полный же объем научных исследований по деформированию бетона весьма значителен и трудно обзорим. Как свидетельствуют результаты экспериментов, проведенных на установках различного типа при трехосном и плоском напряженном состояниях, для бетона характерны нелинейные зависимости между компонентами напряжений и компонентами деформаций. На зависимости значительно влияет вид напряженного состояния — трехосное сжатие, сжатие с растяжением или всестороннее растяжение и соотношения между главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Притом это влияние также существенно при рассмотрении связей между инвариантами напряженно-деформированного состояния: октаэдрическим нормальным напряжением σ_0 и средней деформацией ε_0 ; октаэдрическим касательным напряжением τ_0 и сдвигом на октаэдрических площадках γ_0 . Современные концепции на математическое

описание основных физических соотношений для бетона можно с определенной условностью разбить на три направления (здесь мы следуем обзору [87]).

К первому направлению относятся исследования, которые базируются на предположении, что бетон работает по направлениям главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или по направлениям главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ как ортотропный материал. Оси ортотропии совпадают с направлениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Здесь речь идет об ортотропии, которая приобретает в процессе роста напряжений в силу неодинакового (неоднородного) деформирования при сжатии и растяжении и вследствие направленного, в зависимости от ориентации площадок главных напряжений и главных деформаций, развития внутренних микротрещин и трещин большей протяженности (макротрещин). Последние, однако, еще могут быть отнесены к структурным неоднородностям бетона и учтены при составлении физических соотношений. Данный подход получил наиболее полное развитие в работах Н.И. Карпенко [61, 77], В.С. Здоренко [49], Т.А. Балана [10]) и других авторов. Среди зарубежных исследователей этого направления отметим работы Х. Тенера, П. Фазио, С. Целинского [203], П. Робинса, Ф. Конга [200], Л. Сидолина [179]; их обзор дан в [87].

В рамках математической модели ортотропного материала основные физические соотношения для бетона, находящегося в трехосном напряженном состоянии, представляются в виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{b11} & C_{b12} & C_{b13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{b21} & C_{b22} & C_{b23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{b31} & C_{b32} & C_{b33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{b44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{b55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{b66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

или в более компактном виде

$$\{\varepsilon\}_n = [c_b]_n \{\sigma\}_n, \quad (3.79)$$

где $\{\varepsilon\}_n$, $\{\sigma\}_n$ — вектор-столбцы относительных деформаций и напряжений, стоящих соответственно в левой и правой частях уравнений (3.78); $[c_b]_n$ — матрица податливости бетона.

Оси 1, 2, 3 (или n, m, l) в данном случае являются осями ортотропии материала. Если исходить из классической ортотропной модели [106 и др.], то коэффициенты, входящие в матрицу податливости $[c_b]_n$, будут равны

$$\begin{aligned}
c_{b11} &= 1/E_{b1}; \quad c_{b22} = 1/E_{b2}; \quad c_{b33} = 1/E_{b3}; \\
c_{b12} &= -\frac{\mu_{b12}}{E_{b2}}; & c_{b13} &= -\frac{\mu_{b13}}{E_{b3}}; \\
c_{b21} &= -\frac{\mu_{b21}}{E_{b1}}; & c_{b23} &= -\frac{\mu_{b23}}{E_{b3}}; \\
c_{b31} &= -\frac{\mu_{b31}}{E_{b1}}; & c_{b32} &= -\frac{\mu_{b32}}{E_{b2}};
\end{aligned} \quad (3.80)$$

$$c_{b44} = 1/G_{b12}; \quad c_{b55} = 1/G_{b23}; \quad c_{b66} = 1/G_{b31},$$

где E_{bi} — модули деформации бетона по трем главным направлениям ($i = 1, 2, 3$); μ_{bij} — коэффициенты поперечной деформации (Пуассона, характеризующие поперечное расширение при сжатии или сокращение вследствие растяжения, причем первый индекс показывает направление сокращения или расширения, а второй — номер напряжения, вызывающего указанное сокращение или расширение); G_{bj} — модули сдвига в трех плоскостях $k_j = 12, 23, 31$, характеризующие изменение прямых углов между главными направлениями k, j .

Ввиду симметрии коэффициентов податливости (3.80) выполняются равенства типа $c_{bij} = c_{bji}$ при $i = j$, т.е.

$$\begin{aligned}
\mu_{b12}/E_{b2} &= \mu_{b21}/E_{b1}; \quad \mu_{b13}/E_{b3} = \mu_{b31}/E_{b1}; \\
\mu_{b23}/E_{b3} &= \mu_{b32}/E_{b2}.
\end{aligned} \quad (3.81)$$

Таким образом, в шесть уравнений (3.78) входят девять независимых коэффициентов податливости, а в первые три — шесть коэффициентов.

Ортотропная модель позволяет имитировать развитие дилатационного эффекта в бетоне, а также ниспадающую ветвь деформирования материала (дилатация здесь — увеличение объема образца, начиная с некоторых уровней неравномерного трехосного сжатия). Ортотропная модель также позволяет сравнительно просто учесть особенность деформирования различных бетонов; тяжелых, легких, мелкозернистых и др.

Ортотропные модели различаются по способам определения модулей продольной и поперечной деформации, модулей сдвига. Определение модулей представляет собой довольно сложную задачу. Заметим, что уравнений (3.78) недостаточно для определения коэффициентов податливости в нелинейной стадии деформирования чисто экспериментальным способом — по замерам напряжений и относительных деформаций.

Математические модели бетона, предложенные в работах [61, 77, 49, 10], реализованы в конечно-элементных и конечно-разностных программах по расчету плоских железобетонных конструкций.

Другое направление исследований связано с развитием различных вариантов изотропной модели применительно к бетонам. В этих вариантах указанная неоднородность деформирования бетона при растяжении и сжатии и явление направленного развития внутренних трещин сглаживаются равномерно по разным направлениям (учитываются в среднем).

Это направление сформировалось из исследований, в которых сделана попытка использовать или модифицировать гипотезы теории малых упругопластических деформаций, предложенной и развитой А.А. Ильюшиным [51]. Как известно, эта теория для простого нагружения учитывает подобие и коаксиальность девиаторов напряжений и деформаций, т.е.

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 = (\psi/2G_0) (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (3.82)$$

где ε_{ij} ; σ_{ij} — соответственно компоненты тензора деформаций и тензора напряжений ($i, j = 1, 2, 3$, причем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$; $\sigma_{11} = \sigma_1$, ...); δ_{ij} — символ Кронекера; ψ — параметр пластичности; G_0 — начальный модуль сдвига.

Классическая формулировка [51] предполагает в уравнениях (3.82) линейную связь между σ_0 и ε_0 (средними напряжениями и деформациями), а также единую кривую деформирования в соотношении $\tau_0 - \gamma_0$ (октаэдрическое напряжение — октаэдрический сдвиг). Приведенные в [40, 95, 102 и др.] исследования показали, что в представленном виде (3.82) для бетона теория малых упругопластических деформаций имеет весьма ограниченное применение и поэтому должна использоваться с большой осторожностью.

Применительно к бетону теория малых упругопластических деформаций для бетона была усовершенствована Г.А. Гениевым и его учениками [40, 41]. При этом вместо линейной связи $\sigma_0 - \varepsilon_0$ была предложена нелинейная зависимость, учитывающая дилатационный эффект посредством введения в уравнения $\sigma_0 - \varepsilon_0$ модуля дилатации q_0 и интенсивности касательных напряжений T , связанной со вторым инвариантом девиатора напряжений $T = [I_2(D_\sigma)]^{1/2}$. В физических соотношениях между девиаторными частями тензора напряжений и тензора деформаций предполагалось, что в момент исчерпания прочности материала предельный секущий модуль сдвига G_s принимает значение, равное $0,5 G_0$. В целом теория пластичности бетона [40] позволила качественно описать основные характерные процессы деформирования материала под воздействием различных напряженных состояний и явилась значительным шагом в деле совершенствования упругопластических расчетов железобетонных конструкций.

Теория пластичности бетона, разработанная Г.А. Гениевым, получила дальнейшее уточнение в исследованиях Е.С. Лейтеса [105], А.П. Кричевского [98], А.В. Яшина [172]. Е.С. Лейтес [105] предложил учитывать в основных физических соотношениях ниспадающую ветвь деформирования бетона. А.П. Кричевский [98] и А.В. Яшин [175] в своих разработках определяли предельные секущие модули сдвига в зависимости от вида напряженного состояния, характеризуемого третьим инвариантом девиатора напряжений $I_3(D_\sigma)$ или коэффициентом Лоде — Надаи по напряжениям μ_σ .

Данные уточнения позволяли приблизить основные физические зависимости к результатам экспериментов. Однако при их реализации в современных вычислительных комплексах, например с использованием метода конечных элементов и шаговых алгоритмов расчета, возникают значительные трудности. Эти трудности обусловлены тем,

что при выборе определяющих соотношений в виде [40, 105] для шаговых алгоритмов расчета не удается получить симметричную касательную матрицу упругих коэффициентов в зависимостях $\Delta \sigma_{ij} \sim \Delta \epsilon_{ij}$. Кроме того, модуль дилатации носит в определенной степени условный физический смысл.

Чтобы снять эти трудности А.И. Казачевским [95] предложены основные физические соотношения в виде:

$$\theta = \frac{1}{K_0} K_{11}(\sigma_0) \sigma_0 + \frac{1}{g_0} K_{12}(\sigma_0, T) T,$$

$$\Gamma = \frac{1}{g_0} K_{21}(\sigma_0, T) \sigma_0 + \frac{1}{G_0} K_{22}(T) T, \quad (3.83)$$

где θ, Γ — характеристики объемной и сдвиговой деформаций; K_0 — начальный объемный модуль; K_{ij} — параметры нелинейности, которые показывают степень изменения модулей упругости $K_0 G_0$ и g_0 ; $K_{12} = K_{21}$.

Реализация предложения (3.6) в конечно-элементных расчетах плоских железобетонных конструкций при специальном выборе параметров нелинейности K_{ij} позволила получить симметричные матрицы упругих коэффициентов и для шаговых алгоритмов [102]:

Весьма сложным вопросом, требующим дальнейшего разрешения при использовании подхода [95], является выбор и нормирование функций для аппроксимации коэффициентов нелинейности на случай трехосного напряженного состояния.

Как показано В.М. Кругловым [102], получить симметричную касательную матрицу упругих коэффициентов для шаговых алгоритмов можно, используя подход, отличный от предложения [40]. Для этого определяющие соотношения (3.82) в [102] представляются в виде

$$\epsilon_{ij}^*(\varphi/3 K_0) \sigma_0 \delta_{ij} = \frac{\Psi}{2G_0} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (3.84)$$

где $\varphi = f_1(\sigma_0, \mu_\sigma)$, $\Psi = f_2(\sigma_0, \mu_\sigma)$ — параметры, учитывающие изменение пластических свойств бетона в соотношениях $\sigma_0 - \epsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$.

Зависимости между напряжениями и деформациями (3.82) могут быть записаны в форме закона Гука, например в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [D(\epsilon)] \{\epsilon\}, \quad (3.85)$$

где

$$[D(\epsilon)] = \frac{E^* (1 - \mu^*)}{(1 + \mu^*) (1 - 2\mu^*)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Здесь:

$$a = \mu^* / (1 - \mu^*), b = (1 - a) / 2.$$

В формуле (3.86) параметры E^* и μ^* являются переменными, соответствующими текущим модулям:

$$E^* = 3E_b^0 / [2(1 + \mu_b^0) \psi + (1 - 2\mu_b^0) \varphi];$$

$$\mu^* = [1 - (1 - 2\mu_b^0) \varphi / \psi (1 + \mu_b^0)] / [2 + (1 - 2\mu_b^0) \times \varphi / \psi (1 + \mu_b^0)],$$

где E_b^0 — начальный модуль упругости; μ_b^0 — начальный коэффициент Пуассона.

При шаговом расчете матрица $D(\epsilon, \Delta \epsilon)$ в [99, 102] записывается подобно формуле (3.86) с заменой E^* и μ^* на величины, которые отвечают каждому шагу нагружения по кривым $\sigma_0 - \epsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$.

Обоснование и выбор аппроксимирующих функций для параметров φ и ψ подробно изложены в статье [102]. Следует подчеркнуть, что определяющие соотношения [99, 102] используют в условиях простого нагружения переменные предельные текущие модули бетона G_s и K_s , что правильнее отражает сопротивление бетона в момент его разрушения. Однако функции нелинейности φ и ψ в соотношениях (3.84), (3.86) зависят лишь от среднего напряжения σ_0 и не зависят от τ_0 , что обуславливает их недостаток. Из рассмотренных деформационных теорий пластичности бетона предложения [102, 173] были реализованы в разработках конечных элементов вычислительных комплексов ППП АЛЖБК и РК 85.

Среди зарубежных исследований, относящихся к данному направлению, можно выделить работы М. Котсовоса [190], Р. Паланисвами и П. Шаха [198], К. Гертсле [184, 185] и др.

Третье направление в развитии теории деформирования бетона базируется на предположении теории течения. Привлечение теории течения связано со стремлениями получить математическим способом физические соотношения расчета железобетонных конструкций при сложных режимах нагружения, в основном с учетом эффектов разгрузки. Как уже указывалось, образование трещин в бетоне приводит к изменению в отдельных зонах конструкций пропорций между напряжениями и деформациями, установившихся при простом нагружении конструкции до образования трещин. Таким образом даже в условиях простого активного нагружения (с точки зрения изменения внешних сил) возможно появление зон деформирования материала по законам непропорционального нагружения. Основная сложность такой теории состоит в подборе соответствующих функций упрочнения на основе экспериментов — достаточно непростой процедуры.

В основе теории течения лежит так называемый принцип градиентности [51], согласно которому, если пренебречь деформационной анизотропией, можно записать

$$d \epsilon_{ij}^p = d \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij}, h)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.87)$$

где $d \epsilon_{ij}$ — компоненты приращений пластических деформаций; $d \lambda$ — скалярный множитель Лагранжа; $f = f(\sigma_{ij}, h)$ — поверхность нагружения, зависящая от тензора напряжений σ_{ij} и параметра упрочнения h .

В качестве поверхности нагружения в [100] используется критерий прочности (2.11).

Используя (3.87), в работе В.М. Круглова показано, что упругопластическая матрица D_{ijkl} , связывающая компоненты тензора приращений напряжений с компонентами тензора приращений деформаций, может быть представлена в форме

$$D_{ijmn}^{ep} = D_{ijmn} - \frac{D_{ijpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} D_{klmn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} D_{rs, tu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mu}} + h \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{vw}} \right]^{1/2}} \quad (3.88)$$

где D_{ijmn} — матрица упругости, соответствующая начальным упругим характеристикам материала.

Теоретические исследования в части применения к бетону теории течения находятся в стадии становления. Накопленный опыт говорит, что к бетону, видимо, применимы наиболее сложные варианты течения, основанные на использовании трехинвариантных поверхностей нагружения в сочетании с изотропным (а в более точной постановке анизотропным) и трансляционным упрочнениями.

Подводя итог анализу различных теорий деформирования бетона, можно констатировать следующее. К настоящему времени существенное развитие получили два типа моделей: модели, реализующие идею работы бетона как ортотропного тела [10, 49, 61, 77] и модели, базирующиеся на гипотезах теории малых упругопластических деформаций [40, 97, 102, 105, 172]. Модели материала, использующие гипотезы теории течения, находятся (применительно к бетонам) в стадии становления.

Как известно, деформирование и разрушение бетона сопровождается процессом нарушения сплошности материала из-за развития в нем микротрещин и трещин большей протяженности. Причем трещины ориентируются в зависимости от направления главных напряжений или деформаций. В этой связи говорят об их направленном развитии. Это приводит к тому, что физико-механические свойства материала становятся неодинаковыми по разным направлениям — проявляется приобретаемая анизотропия. Поэтому ортотропная модель [77], учитывающая эти свойства, представляется наиболее совершенной. Кроме того, как показали экспериментальные исследования, проведенные в НИИЖБ [137, 138, 148], при помощи этой

модели можно описать различные бетоны, в то время как в других построениях рассматривался в основном тяжелый бетон. Ортотропная модель принята за основную в дальнейшем рассмотрении.

Можно выделить два направления в разработке ортотропных моделей: феноменологическое, основанное на трансформировании диаграмм сжатия и растяжения в диаграммы трехосного напряжения, и физическое, связанное с непосредственным учетом внутренней трещиноватости бетона. Рассмотрим сначала первое направление, как более разработанное. Второе направление находится в начале своего становления, хотя и является наиболее перспективным, ему уделим внимание в конце данной главы.

3.5. О НЕКОТОРЫХ ДИАГРАММАХ ТРЕХОСНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Естественным является вопрос, нельзя ли хотя бы в существенно трансформированном виде найти аналогию между диаграммами одноосного сжатия и растяжения бетона и диаграммами в случае трехосного напряжения? Такую аналогию одноосных диаграмм можно усмотреть с диаграммами связи определенных частей главных деформаций (они здесь названы диагональными) с главными напряжениями. Хотя выделить диагональные деформации при значительной физической нелинейности и воспользоваться указанной аналогией не так просто, особенно при обработке экспериментов.

Рассмотрение начнем с определения диагональных деформаций.

Обозначим в соотношениях (3.78) — (3.79) части общих деформаций, которые получаются в результате перемножения главных напряжений бетона $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на коэффициенты податливости, стоящие на главной диагонали матрицы $[c_b]_n$, в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1d} &= \sigma_1 c_{b11} = \sigma_1 / E_b^0 \nu_{b1}; \\ \epsilon_{2d} &= \sigma_2 c_{b22} = \sigma_2 / E_b^0 \nu_{b2}; \\ \epsilon_{3d} &= \sigma_3 c_{b33} = \sigma_3 / E_b^0 \nu_{b3}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где ϵ_{ia} ($i = 1, 2, 3$) — диагональные деформации.

С учетом (3.89), например, первое уравнение (3.78) можно представить так:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{1d} + \sigma_2 c_{b12} + \sigma_3 c_{b13},$$

а полностью три первых уравнения записываются

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{1d} \\ \epsilon_{2d} \\ \epsilon_{3d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_{b12} & c_{b13} \\ c_{b12} & 0 & c_{b23} \\ c_{b13} & c_{b23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

или более компактно, вводя сокращенное обозначение столбцов и матрицы

$$\{\epsilon_b\}_n = \{\epsilon_d\} + [c_b^{\sigma}]_n \{\sigma_b\}_n. \quad (3.91)$$

В дальнейшем поступаем так. Разрешаем первые три уравнения (3.78) относительно напряжений и подставляем значения напря-

жений в (3.90). В результате получаем значения ε_{in} в функции от общих деформаций. Представим эту процедуру в матричном виде.

Учитывая, что согласно (3.78) при $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$)

$$\{\sigma_b\}_n = [c_b]_n^{-1} \{\varepsilon_b\}_n,$$

сводим (3.27) к виду

$$\{\varepsilon_b\}_n = \{\varepsilon_d\} + [c_b]_n^{-1} [c_b]_n^{-1} \{\varepsilon_b\}_n,$$

откуда следует

$$\{\varepsilon_d\} = ([I] - [c_b]_n^{-1} [c_b]_n^{-1}) \{\varepsilon_b\}_n, \quad (3.92)$$

где $[I]$ — единичная матрица,

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формула (3.92) показывает, каким образом можно вычислить деформации главной диагонали $\{\varepsilon_d\}$, зная общие деформации элемента.

Зависимости (3.92) можно преобразовать к иному виду, обозначив

$$[c_{bd}]_n = \begin{bmatrix} c_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{b3} \end{bmatrix},$$

тогда

$$[c_b]_n^{-1} = [c_b]_n - [c_{bd}]_n.$$

Внося это представление $[c_b]_n^{-1}$ в (3.92), находим

$$\{\varepsilon_d\}_n = [c_{bd}]_n [c_b]_n^{-1} \{\varepsilon_b\}_n. \quad (3.93)$$

Формулы (3.91) или (3.93) позволяют вычислять деформации главной диагонали $\{\varepsilon_d\}_n$ (условно диагональные деформации) через общие деформации $\{\varepsilon_b\}_n$. Заметим, что представленный способ выделения диагональных деформаций не является единственно возможным. Например, первое уравнение из системы (3.90), учитывая (3.89), можно представить так:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1d} + \varepsilon_{2d} c_{b12} c_{b22}^{-1} + \varepsilon_{3d} c_{b13} c_{b33}^{-1},$$

а всю систему (3.90) записать

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (c_{b12} c_{b22}^{-1}) & (c_{b13} c_{b33}^{-1}) \\ (c_{b12} c_{b11}^{-1}) & 1 & (c_{b23} c_{b33}^{-1}) \\ (c_{b13} c_{b11}^{-1}) & (c_{b23} c_{b22}^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1d} \\ \varepsilon_{2d} \\ \varepsilon_{3d} \end{bmatrix}$$

или обозначая $[M]_n$ — матрицу отношений коэффициентов c_{bij} ,

$$\{\varepsilon_b\} = [M]_n \{\varepsilon_d\}_n.$$

Таким образом, приходим к иной системе трех уравнений, позволяющей выразить диагональные деформации ε_{in} через общие деформации ε_i ($i = 1, 2, 3$),

$$\{\varepsilon_d\}_n = [M]_n^{-1} \{\varepsilon_b\}_n. \quad (3.94)$$

Естественно, если известны коэффициенты c_{bij} , то можно использовать любой из указанных способов — они эквивалентны. В действительности коэффициенты c_{bij} представляются функциями напряжений или деформаций ε_{in} . Задача решается методом итераций, в процессе которых тот или иной способ выделения ε_{in} может оказаться предпочтительным с точки зрения сходимости вычислительного процесса.

Нетрудно заметить, что деформации главной диагонали представляют главные деформации элемента, вычисленные без учета влияния коэффициентов поперечной деформации. В современных построениях ортотропных моделей (они указаны выше) фактически делаются попытки установить связь между диаграммами одноосного сжатия или растяжения бетона ($\varepsilon_b - \sigma_b$) с диаграммами, связывающими диагональные деформации с главными напряжениями, т.е. с диаграммами $\varepsilon_{1d} - \sigma_1, \varepsilon_{2d} - \sigma_2, \varepsilon_{3d} - \sigma_3$.

Стремление установить такую связь понятно — диаграммы $\varepsilon_{id} - \sigma_i$, как и диаграммы одноосного напряжения, являются в определенном смысле подобными, так как имеют восходящие и нисходящие участки, хотя различаются по своим параметрам и нередко достаточно существенно. Вначале делались попытки простого перенесения простых диаграмм одноосного напряженного состояния, которые оказались, однако, неприемлемыми. Далее мы следуем предложениям работ [61, 77], в которых были установлены определенные закономерности перехода от простых диаграмм к диаграммам $\varepsilon_{id} - \sigma_i$.

При таком переходе диаграммы одноосного напряжения весьма существенно корректируются. Фактически корректируются константы коэффициентов в зависимостях ν_{bi} . Эти коэффициенты, как и коэффициенты ν_b в одноосном случае, могут вычисляться двояким способом: через уровни η_{in} диагональных деформаций $\eta_{in} = \varepsilon_{in} / \hat{\varepsilon}_{in}$, где $\hat{\varepsilon}_{in}$ — деформации в вершине диаграммы $\varepsilon_{in} - \sigma_i$; через уровни η_i напряжений $\eta_i = \sigma_i / \hat{\sigma}_i$, где $\hat{\sigma}_i$ — напряжения, соответствующие выходу на поверхность прочности, т.е. напряжения в вершине диаграмм $\varepsilon_{id} - \sigma_i$.

Уровни η_i непосредственно находятся по данным экспериментов (в случае их анализа) или на основании критериев прочности (в расчетах), в то время как уровни η_{de} можно определить лишь после выделения диагональных деформаций по представленным выше методикам.

Фактически, задача конструирования физических соотношений на основании данных экспериментов сначала решается в уровнях η_i , а затем уже переходят к уровням η_{de} . Кроме того зависимости $\nu_{bi} - \eta_i$

более просты, поэтому первым отдается предпочтение как при конструировании диаграмм, так и в практических расчетах. Хотя в практических расчетах это предпочтение сохраняется тогда, когда расчеты выполняются в пределах восходящих ветвей диаграмм. В противном случае возникает необходимость в использовании зависимостей $\nu_{bi} - \eta_{di}$, как и в случае одноосного напряжения, поскольку одному значению уровня η_{di} соответствует одно значение ν_{bi} , в то время как одному значению уровня η_{di} соответствуют два значения ν_{bi} — одно на восходящей ветви диаграммы, другое на нисходящей, что затрудняет выбор правильного значения ν_{bi} . Построения диаграмм $\sigma_i - \epsilon_{di}$ тесно связаны с программами нагружения и имеют ограничения.

3.6. СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ТРЕХОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В СЛУЧАЕ АКТИВНОЙ НАГРУЗКИ

Предварительные сведения. Исходные физические соотношения для бетонных элементов записывают в виде: связей между главными напряжениями и главными относительными деформациями (первый вид записи, рассмотрен ниже); связей между приращениями главных напряжений и деформаций (второй вид записи, рассмотрен ниже). В этих соотношениях учитывается физическая нелинейность, когда коэффициенты жесткости или податливости зависят от напряжений или деформаций, и приобретаемая в процессе деформирования ортотропия. Последняя обусловлена возникновением и направленным развитием микротрещин, в основном вдоль площадок максимальных растягивающих и минимальных по модулю сжимающих главных напряжений, в процессе увеличения напряжений, а также различными диаграммами деформирования бетона при сжатии и растяжении.

При длительном приложении напряжений учитывается ползучесть на основе использования диаграмм изохрон. Соотношения, учитывающие ползучесть, приведены в гл. 4.

Вводимые в физические соотношения главные напряжения в бетоне $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, как и при рассмотрении условий прочности, полагаются расположенными в последовательности: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Если при этом направления главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в процессе нагружения не меняются, то такие напряжения называются главными с фиксированными направлениями. Положительными являются напряжения растяжения. Отдаленность или близость главных напряжений к их предельным значениям, характеризующим начало разрушения бетонного элемента, оценивается согласно указаниям гл. 2 по уровню напряжений η — параметру нагружения. Модули деформации физических соотношений будут зависеть от уровня и программы (режима) нагружения.

Под простой нагрузкой (простой разгрузкой) подразумеваем нагрузку (разгрузку), в результате которой все три главных напряжения с фиксированными направлениями увеличиваются (уменьшаются) пропорционально одному параметру. В случае, если главные напряжения остаются фиксированными, но при этом их значения изменяются не пропорционально одному параметру, а так, что уровень возрастает, то такое нагружение здесь назовем активным; при убывании уровня получим случай активной разгрузки. Остальные случаи нагрузки и разгрузки относятся к сложным.

Заметим, что понятием простого или сложного нагружения здесь характеризуется программа изменения напряжений в малом элементе. Одновременно это понятие может характеризовать программу изменения внешних сил. Видимо, правильнее было бы эти понятия терминологически разделить, поскольку, как известно, например, простое приложение внешних сил не всегда вызывает простое изменение внутренних напряжений. Программу простого или сложного нагружения внутренними напряжениями целесообразно называть простым или сложным напряжением, а понятие нагружения — относить к программе приложения внешних сил, хотя здесь мы используем оба понятия в смысле напряжения.

Главные относительные деформации в физических соотношениях обозначим: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$, а главные напряжения: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$. Они образуют два вектор-столбца:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_b \end{Bmatrix}_n = \left\{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -\frac{1}{2} \gamma_{12}, -\frac{1}{2} \gamma_{23}, -\frac{1}{2} \gamma_{31} \right\}^T;$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_b \end{Bmatrix}_n = \left\{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31} \right\}^T,$$

где t — знак транспонирования.

Касательные компоненты напряжений и деформаций симметричны, т.е. $\gamma_{12} = \gamma_{21}, \gamma_{23} = \gamma_{32}, \gamma_{31} = \gamma_{13}, \tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{23} = \tau_{32}, \tau_{31} = \tau_{13}$. Кроме того в осях главных напряжений и деформаций все касательные компоненты равны нулю. Однако они оставляются в приведенных ниже выражениях с целью использования стандартных матричных преобразований при переводе физических соотношений из локальной системы координат в глобальную (см. гл. 1).

Связи между полными напряжениями и деформациями представляются соотношениями (3.78)–(3.80). Запишем их с учетом влияния температуры

$$\{\epsilon_b\}_n = [c_b]_n \{\sigma_b\}_n + \{\alpha_b^0\} t^0, \quad (3.95)$$

где $\{c_b\}_n$ — матрица податливости бетона; $\{\alpha_b^0\}$ — вектор-столбец коэффициентов температурных деформаций; t^0 — приращение температуры сверх некоторой среднеклиматической t_n^0 .

Формирование матрицы податливости бетона в случае простой и активной нагрузки. Представим сначала результат трансформации соотношений (3.27), (3.28) на объемное напряженное состоя-

ние, а затем дадим пояснения. Согласно [77] матрица податливости бетона в случае простого и активного напряжений может быть несколько упрощена и записана в виде

$$[c_b]_n = \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} (1/\nu_{b1}) & (-\mu_{b12}/\nu_b^-) & (-\mu_{b13}/\nu_b^-) & 0 & 0 & 0 \\ (-\mu_{b12}/\nu_b^-) & (1/\nu_{b2}) & (-\mu_{b23}/\nu_b^-) & 0 & 0 & 0 \\ (-\mu_{b13}/\nu_b^-) & (-\mu_{b23}/\nu_b^-) & (1/\nu_{b3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_{G12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{G23}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{G13}^{-1} \end{bmatrix}$$

В матрице:

ν_{be} ($e = 1, 2, 3$) — коэффициенты изменения секущих модулей деформации бетона,

$$\nu_{be} = \hat{\nu}_{be} \pm (\nu_{0e} - \hat{\nu}_{be}) \sqrt{1 - \omega_{1e} \eta_e - \omega_{2e} \eta_e^2}, \quad (3.97)$$

здесь и ниже из двух знаков выбирается знак плюс, а знак минус вводится при учете деформирования элемента на нисходящей ветви, т.е. после выхода напряжений на поверхность прочности;

$$\omega_{1e} = 2 - 2,05 \hat{\nu}_{be}; \quad \omega_{2e} = 1 - \omega_{1e},$$

η_e — уровни главных напряжений (параметры нагружения)

$$\eta_e = \sigma_e / \hat{\sigma}_e \quad (e = 1, 2, 3),$$

$\hat{\sigma}_e$ — предельные значения напряжений (формулы по определению $\hat{\sigma}_e$ и η_e конкретизированы ниже, как правило $\eta_e = \eta$, т.е. вводится один параметр нагружения); ν_b^- — доля ν_{be} , зависящая от уровня максимальных по модулю напряжений сжатия — определяется по формуле (3.97) с указанными особенностями в зависимости от области напряженного состояния; μ_{bek} — коэффициенты поперечной деформации

$$\mu_{bek} = \mu_{bke} = \hat{\mu}_{bek} + (\mu_b^0 - \hat{\mu}_{bek}) \sqrt{1 - \eta_3^2} \quad (3.98)$$

$$(ek = 12, 23, 13),$$

ν_{Gek} — коэффициенты изменения секущих модулей сдвига,

$$\frac{1}{\nu_{Gek}} = \frac{1}{\nu_{be}} + \frac{1}{\nu_{bk}} + \frac{2\mu_{bek}}{\nu_b^-} \quad (3.99)$$

$$(ek = 12, 23, 13).$$

Остановимся на некоторых особенностях формирования элементов матрицы податливости (3.96)

Частные случаи этой матрицы, соответствующие одноосному растяжению и сжатию, представлены формулами (3.27), (3.28). В качестве элементов частных матриц выступают коэффициенты секущих модулей продольных деформаций (ν_b — при сжатии и ν_{bt} при растяжении) и секущие коэффициенты поперечных деформаций μ_b , μ_{bt} . Они входят в диаграммы связи напряжений с деформациями и определяются через уровни напряжений η или деформаций η_d по формулам (3.2), (3.11), (3.22).

Нетрудно заметить, что формулы (3.97), (3.98) представляют собой развитие формул (3.2), (3.22) на трехосное напряжение. При этом диаграммам одноосного напряжения $\sigma_b - \varepsilon_b$ ставятся в соответствие диаграммы связи главных напряжений с диагональными деформациями $\sigma_e - \varepsilon_{de}$, где $e = 1, 2, 3$ — номера главных напряжений. Эти диаграммы представляются секущими коэффициентами ν_{be} . Определение диагональных деформаций ε_{de} дано в п. 3.6.

Идея трансформации диаграмм $\sigma_b - \varepsilon_b$ в диаграммы $\sigma_e - \varepsilon_{de}$ наиболее просто реализуется в случаях простого нагружения. При этом уровни η_e становятся одинаковыми ($\eta_e = \eta$), хотя параметры ν_{be} будут различными, поскольку они зависят от η и констант $\hat{\nu}_{be}$. Значения η вычисляются по формулам (2.44), (2.46) или (2.45), (2.47). Параметр η в механике называется параметром нагружения (напряжения).

Диаграммы $\sigma_e - \varepsilon_{de}$ простого нагружения допускают более расширенное применение. Анализ экспериментальных исследований различных авторов, выполненный в [77], показал, что известные пути активного нагружения, реализованные в экспериментах, можно с некоторым приближением представить веером простых линейчатых нагружений (рис. 3.12, где реальный путь OAB заменяется веером тонких линий, крестиками показаны точки входа этих линий на поверхность прочности Π). Каждой точке на прямой AB соответствует своя точка m^* на поверхности прочности — свое простое нагружение по линии omm^* и свои значения $\hat{\sigma}_e$, соответствующие точке m^* . В такой замене условие $\eta_e = \eta$, как и указанные формулы по определению η , сохраняются.

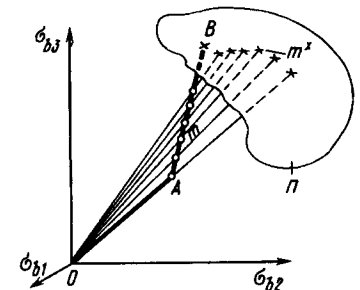


Рис. 3.12. Замена нагружения по OAB веером линейных нагружений типа omm^*

Представленные ниже коэффициенты матрицы $[c_b]_n$ следует формировать с использованием схемы рис. 3.12 при $\eta_e = \eta$, хотя обозначения η_e в них сохранены. Этим указывается на возможность использования представленных ранее зависимостей и в некоторых случаях, когда параметр η вычисляется не как параметр простого нагружения. Например, в случае трехосного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$) параметр η можно вычислять по формуле (2.49), которая приводит к $\eta = \eta_3$; этому случаю соответствует одна реальная диаграмма $\sigma_3 - \varepsilon_{33}$, остальные теряют смысл, поскольку $\eta_2 = \eta_1 = 1$.

Аналогично в случае трехосного растяжения ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) параметр η можно вычислять по формуле (2.48), которая приводит к $\eta = \eta_1$ и к одной диаграмме $\sigma_1 - \varepsilon_{11}$. В описаниях смешанных напряжений могут использоваться оба уровня η_1 и η_3 ; они фактически представляют собой две функции нагружения. Подходы $\eta_e \neq \eta$ более громоздки, хотя в некоторых случаях они могут лучше описать результаты экспериментов, поэтому заслуживают изучения.

В случае одноосного напряжения поперечные деформации зависят от отношения μ_b / ν_b , где μ_b — коэффициент поперечной деформации. Причем в случае сжатия это отношение довольно значительно увеличивается, а при растяжении практически не изменяется. В трехосной модели эти два противоречивых фактора учитываются вследствие конструирования параметра ν_b (он обозначен ν_b^-) и установленной закономерности изменения коэффициентов поперечной деформации μ_b (ниже они обозначаются μ_{bek}). Другие особенности удобно пояснить в процессе рассмотрения конкретных формул. Параметры (3.97), (3.98) различаются в двух областях напряженного состояния — области $\sigma_1 < 0$ и области $\sigma_1 > 0$.

Область напряжений $\sigma_1 < 0$ (случай трехосного сжатия). Принимаем

$$\nu_{b1} = \nu_{b2} = \nu_b^- = \nu_{b3}, \quad (3.100)$$

где коэффициент ν_{b3} вычисляется по формуле (3.97), полагая $\eta_e = \eta_3$ или

$$\nu_{0e} = \nu_{03} = \nu_{0e}^0 \left[1 - c \left(\left| -\frac{\sigma_3}{\hat{\sigma}_b} \right| \right)^{1/3} \right], \quad (3.101)$$

ν_{0e}^0 — начальные значения коэффициента ν_{be} ; $\nu_{0e} = 1$ — на восходящей ветви; $\nu_{0e} = 2,05 \hat{\nu}_{b3}$ — на нисходящей ветви, на восходящей ветви

$$c = (0,75 |\hat{\nu}_b - \hat{\nu}_{b3}|)^s; \quad 5 > s = R_1 / (R_2 - \hat{\sigma}_b);$$

R_1, R_2 — эмпирические величины ($R_1 = 60$ МПа; $R_2 = 75$ МПа); на нисходящей ветви $c = 0$ (точнее, здесь «с» не исследовано); $\hat{\nu}_b$ — значение ν_b в вершине диаграммы одноосного сжатия (вычисляется по формуле (3.3),

$$\hat{\nu}_{b1} = \hat{\nu}_{b2} = \hat{\nu}_{b3} = \hat{\nu}_{b3}^- = \hat{\nu}_b \varphi_R^{\mu_b}; \quad (3.102)$$

предполагается, что сжатие влияет примерно одинаково на изменение модулей

$$n \approx 1; \quad 1 \geq \varphi_R = \left| -\frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\sigma}_3} \right| \quad (3.103)$$

(φ_R учитывает тот факт, что предельные деформации бетона в условиях трехосного сжатия намного превышают деформации бетона в условиях одноосного сжатия); $\hat{\varepsilon}_b$ — здесь значение напряжений в вершине диаграммы одноосного сжатия (в расчетах $\hat{\sigma}_b = -R_{b,ser}$).

Поясним еще назначение параметра c . При трехосном равномерном сжатии реальный уровень $\eta_e = \eta = 0$ поскольку $\hat{\sigma}_e \rightarrow \infty$, и практически не влияет на изменение ν_{be} , хотя опыт указывает на изменение ν_{be} . Учет этого фактора достигается корректировкой начального параметра ν_{0e} , который начинает зависеть от отношения $\sigma_3 / \hat{\sigma}_b$ и таким образом влияет на изменение ν_{be} .

Коэффициент поперечной деформации

$$\hat{\mu}_{bek} = \mu_b^0 + (1 - \sqrt[3]{\hat{\nu}_{b3}}) \chi_{ek}, \quad (3.104)$$

где

$$\chi_{ek} = \frac{|\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_k| \varphi_R^s + |\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3| (1 - \varphi_R^s)}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3}, \quad (3.105)$$

$s = 1$ — для тяжелого бетона; $s = 2$ — для мелкозернистого; $\mu_b^0 = 0,15 - 0,2$ (начальный коэффициент поперечной деформации).

Поясним назначение параметра χ_{ek} . Этими параметрами учитывается то обстоятельство, что в состоянии неравномерного трехосного сжатия коэффициенты поперечных деформаций по трем главным направлениям могут существенно различаться. Наибольшее развитие поперечных деформаций происходит в направлении σ_1 — минимального напряжения сжатия. С физической точки зрения существенная неоднородность развития поперечных деформаций объясняется направленным развитием микротрещин в структуре бетона при сжатии (внутренние трещины ориентируются в основном нормально к направлению σ_1).

Сопоставление теоретических графиков деформаций с данными опытов Ю.Н. Малашкина [116] представлено на рис. 3.13 и рис. 3.14 (здесь и ниже опыт — сплошные линии, расчет — штриховые; характеристики образцов, даны на рис. 3.13: $\hat{\sigma}_b = R_b^{0n} = 41,8$ МПа; $\hat{\sigma}_{bt} = 2,6$ МПа. $E_b^0 = 30400$ МПа; $\varepsilon_R = 215 \cdot 10^{-5}$; $\mu_b^0 = 0,19$; на рис. 3.14: $\hat{\sigma}_b = 35,4$; $E_b^0 = 29500$ МПа, $\varepsilon_R = 220 \cdot 10^{-5}$; $\mu_b^0 = 0,183$). В первой серии опытов (см. рис. 3.13) осуществлялось простое нагружение с варьированием отношений $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$, а во второй (см. рис. 3.14) — нагружение по ломаной линии с варьированием значений $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2$ (в расчете это нагружение заменялось системой простых нагружений по схеме 3.12). В обоих случаях получено удовлетворительное согласование результатов расчета с данными экспериментов, хотя в экспериментах наблюдалось определенное влияние режима нагружения на предельные деформации. Представленные зависимости

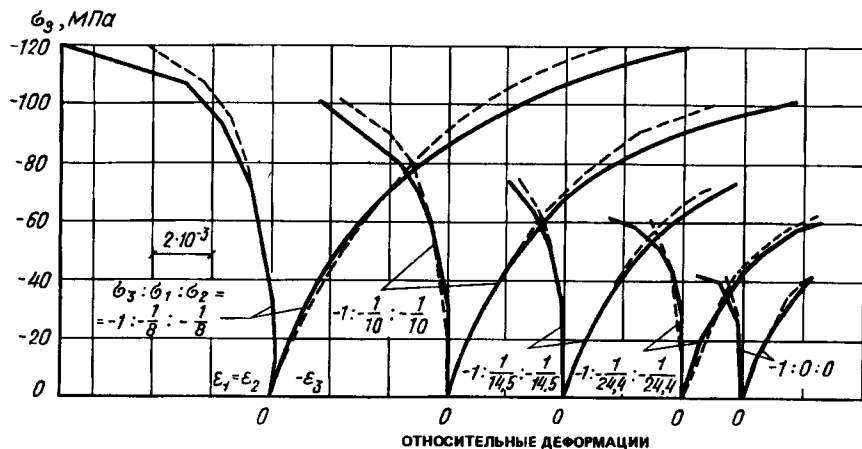


Рис. 3.13. Сопоставление опытных и теоретических деформаций бетона при простом трехосном сжатии

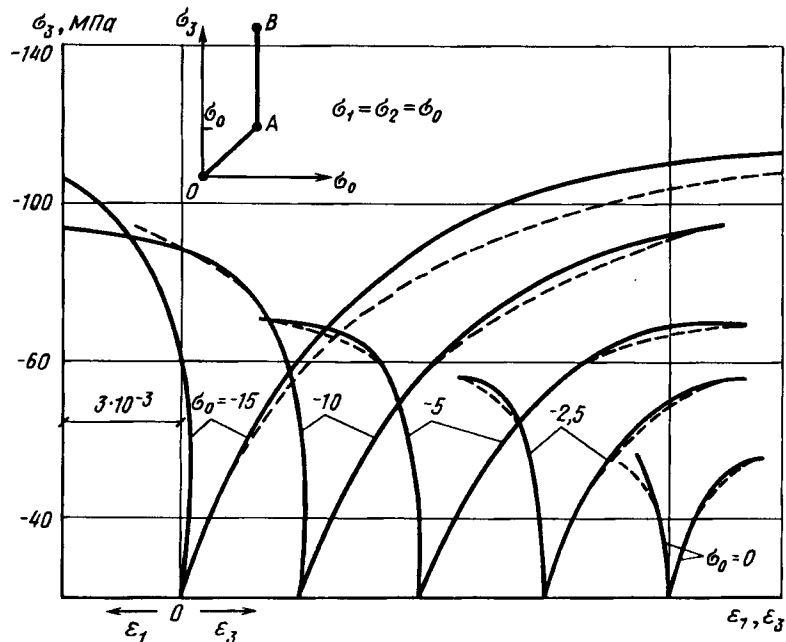


Рис. 3.14. Сопоставление опытных деформаций бетона (при нагружении по ломаной линии OAB) с теоретическими

также прошли проверку на основании опытов А.В. Яшина [173], М.Д. Кацовова (Kotsovos M.D. [190]) и некоторых других авторов.

Область $\sigma_1 >$ (смешанных напряжений и всестороннего растяжения). Предварительно выполняется разделение (сортировка) напряжений σ_e ($e = 1, 2, 3$) на положительные σ_e^+ и отрицательные σ_e^- . Алгоритмически это удобно выполнять, представляя каждое напряжение в виде суммы двух компонент $\sigma_e = \sigma_e^+ + \sigma_e^-$, где одна из компонент равна нулю. Например, если $\sigma_1 > 0$, то $\sigma_1^+ = \sigma_1$, а $\sigma_1^- = 0$. Если сжатие приводит к сравнительно одинаковому изменению модулей $E_b^0 \nu_{be}$ по объему (по трем главным направлениям), то растяжение действует избирательно, изменяя модуль в основном по направлению действия главных напряжений в зависимости от их уровня. Этот фактор можно учесть, если элементы определять по формуле (3.97), приняв

$$\hat{\nu}_{be} = \hat{\nu}_{be}^+ \hat{\nu}_{b3}^-; \nu_{0e} = 1; \quad (3.106)$$

где

$$\hat{\nu}_{be}^+ = 1 - (1 - \hat{\nu}_{bt}) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_e^+}{\hat{\sigma}_{bt}}} \quad (3.107)$$

здесь $\hat{\sigma}_e^+ / \hat{\sigma}_{bt} \leq 1$; $\hat{\nu}_{bt}$ вычисляется по формуле (3.13); $\hat{\nu}_{bt}$ — напряжения в вершине диаграммы одноосного растяжения, в практических расчетах $\hat{\sigma}_{bt} = R_{bt,ser}$;

$$\text{если } |\hat{\sigma}_3^- / \hat{\sigma}_b^+| < 1, \text{ то } \hat{\nu}_{b3}^- = 1 - (1 - \hat{\nu}_b) \left| \frac{\hat{\sigma}_3^-}{\hat{\sigma}_b^+} \right|, \quad (3.108)$$

если $\hat{\sigma}_3^- / \hat{\sigma}_b^+ > 1$, то $\hat{\nu}_{b3}^-$ вычисляется по формуле (3.102).

Из рассмотрения соотношений (3.22) и (3.24) следует, что основное влияние на увеличение поперечных деформаций оказывает сжатие. Это отражается на параметрах $\hat{\nu}_b$ и $\hat{\mu}_b$, относящихся к вершине диаграммы одноосного сжатия. Здесь этим параметрам в соответствии поставлены параметры $\hat{\nu}_b^-$ и $\hat{\mu}_{bek}^-$. Предположительно, что их значения зависят от максимальных по модулю напряжений сжатия $\hat{\sigma}_3^-$. В связи с этим элементы $\hat{\nu}_b^-$ рекомендуется определять по формуле (3.97), полагая $\hat{\nu}_{be} = \hat{\nu}_{b3}^-$. В окончательных формулах (3.98) элементы $\hat{\mu}_{bek}^-$ вычисляются по формуле (3.104), где $\hat{\nu}_{b3}$ заменяется на $\hat{\nu}_{b3}^-$, а параметр χ_{ek} принимается

$$\chi_{ek} = \frac{|\hat{\sigma}_e^+ - \hat{\sigma}_k^+|}{|\hat{\sigma}_1^+ - \hat{\sigma}_3^+|} \quad (3.109)$$

здесь $\hat{\sigma}_e^+$ или $\hat{\sigma}_k^+$ ($e, k = 1, 2, 3$) — приведенные главные напряжения, причем $\hat{\sigma}_e^+ = \alpha_R \hat{\sigma}_e$, если $\hat{\sigma}_e^+ = \hat{\sigma}_e^+$ (напряжения положительны) и $\hat{\sigma}_e^+ = \hat{\sigma}_e^-$, если $\hat{\sigma}_e^+ = \hat{\sigma}_e^-$ (напряжения отрицательны); $\alpha_R = |\hat{\sigma}_e / \hat{\sigma}_{bt}|$

При смешанных напряженных состояниях растягивающие напряжения, например σ_1 , способствуют более интенсивному развитию поперечных микротрещин раскалывания, направленных вдоль действия главных напряжений сжатия, особенно вдоль действия σ_3 . Это

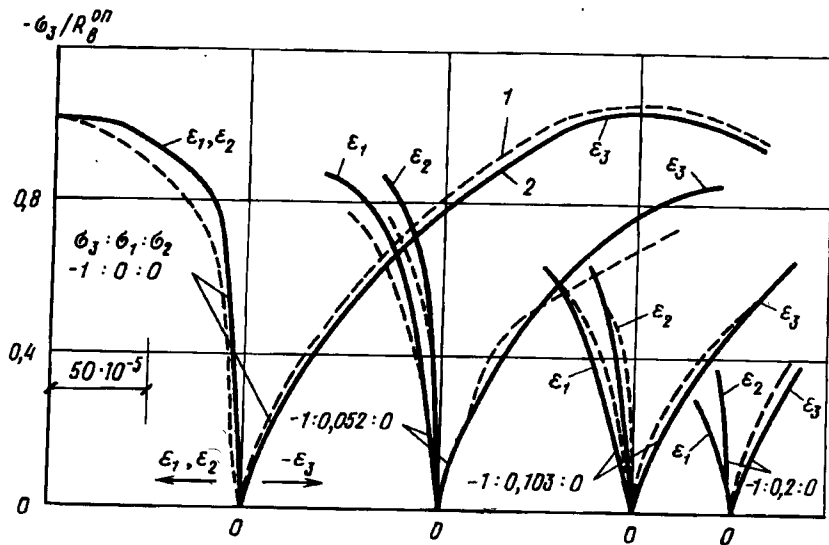


Рис. 3.15. Сопоставление опытных (1) и теоретических (2) деформаций при двухосном напряжении сжатие-растяжение

сказывается на развитии поперечных деформаций, особенно по направлению σ_1 . Множитель χ_{ek} в виде (3.109) позволяет учесть этот фактор.

Представленные зависимости, описывающие область напряжений $\sigma_1 > 0$, также прошли экспериментальную проверку, хотя и в меньшей степени. Опытов с такими напряжениями имеется ограниченное количество. Сопоставление теоретических графиков деформаций с графиками известных опытов Купфера (Н. Kupfer [192]) при двухосном напряжении сжатие — растяжение приведено на рис. 3.15.

Вектор-столбец коэффициентов температурных деформаций бетона представляется в виде

$$\{\alpha_b^0\} = \{\alpha_b^0, \alpha_{b1}^0, \alpha_{b2}^0, 0, 0, 0\}^T, \quad (3.110)$$

где $\alpha_b^0 = \alpha_{b1}^0 + \alpha_{b2}^0$ — коэффициент температурной деформации; $\alpha_{b1}^0, \alpha_{b2}^0$ — его составляющие, они определяются по формулам (3.75) и (3.76).

Температура также влияет на значения $E_b^0, \hat{\epsilon}_b^0, \hat{\epsilon}_{bt}^0, \mu_b^0$; они заменяются на значения ${}^0E_b, {}^0\epsilon_b, {}^0\epsilon_{bt}, {}^0\mu_b$, вычисляемые по формулам (3.69) — (3.74), однако такой подход еще требует исследования.

Определение параметров матрицы податливости бетона через уровни деформаций. В первую очередь определяются предельные деформации. Предельные деформации $\hat{\epsilon}_e^0$ ($e = 1, 2, 3$) соответствуют выходу напряжений на поверхность прочности, т.е. предельным напряжениям $\hat{\sigma}_e^0$. Заметим, что если реализуется ниспадающая ветвь, то деформации элемента в момент разрушения будут превы-

шать $\hat{\epsilon}_e^0$. Соотношения (3.95), (3.96) при $\sigma_e = \hat{\sigma}_e^0$ ($\eta_e = 1$) преобразуются к виду (если не учитывать влияние температуры):

$$\begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \\ \hat{\epsilon}_3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{\hat{\nu}_{b1}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b12}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b3}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) \\ \left(-\frac{\hat{\mu}_{b12}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) & \left(-\frac{1}{\hat{\nu}_{b2}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b23}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) \\ \left(-\frac{\hat{\mu}_{b13}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b23}}{\hat{\nu}_{b3}}\right) & \left(-\frac{1}{\hat{\nu}_{b3}}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

(параметры $\hat{\nu}_{be}, \hat{\nu}_{b3}$ и другие вычисляются по представленным выше формулам в зависимости от вида напряжений: $\sigma_{b1} > 0$ или $\sigma_{b1} < 0$).

Предельные диагональные деформации составят $\hat{\epsilon}_{de}^0 = \hat{\sigma}_e^0 / E_b^0 \hat{\nu}_{be}^0$. Зная предельные диагональные деформации $\hat{\epsilon}_{de}^0$, можно вычислить их уровни $\eta_{de} = \epsilon_{de} / \hat{\epsilon}_{de}^0$. Связь между уровнями напряжений η (η_e) и уровнями деформаций η_{de} осуществляется по формуле (3.10). Может быть также использована формула (3.11) по определению коэффициентов $\hat{\nu}_{be}$ в функции от уровней деформаций η_{de} , при этом $\hat{\nu}_b$ заменяется на $\hat{\nu}_{be}$. Этой формулой заменяется формула (3.97). Формула (3.98) не заменяется, но в ней переходим от уровня η_e к уровню η_{de} по формуле (3.10), таким образом все параметры матрицы $[\hat{c}_b]_n$ можно формировать по уровням деформаций.

3.7. ЗАПИСЬ ОБЩИХ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ В ВИДЕ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРИРАЩЕНИЯМИ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ. НАГРУЖЕНИЕ И РАЗГРУЗКА

Запись физических соотношений в малых приращениях.

Установим связь между бесконечно малыми приращениями напряжений и деформаций в случае трехосного напряженного состояния. Физические соотношения для этого случая, устанавливающие связи между общими напряжениями и деформациями, записываются в виде (3.95), (3.96). К соотношениям в приращениях можно перейти, продифференцировав уравнения (3.95)

$$d\epsilon_e = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 + \frac{\partial \epsilon_e}{\partial t^0} dt^0, \quad (e = 1, 2, 3) \quad (3.112)$$

Пусть трехосное напряжение является простым. В процессе простого напряжения (простой нагрузки) все напряжения и температура изменяются пропорционально одному параметру η ; $\sigma_i = \hat{\sigma}_i \eta$, где

η уровень нагрузки (переменная величина), $\hat{\sigma}_i$ — предельные напряжения (константы), соответствующие $\eta = 1$, t^0 — температура, соответствующая $\eta = 1$. Этот фактор облегчает переход от соотношений (3.95) к соотношениям в приращениях, поскольку все соотношения (3.95) можно представить как функции одной переменной. При этом $d\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_e d\eta$, $dt^0 = t^0 d\eta$, а переход к приращениям можно осуществить проинтегрировав (3.95) по η , определив $d\varepsilon_e/d\eta$, а затем заменив перед отдельными слагаемыми $d\eta$ на $d\sigma_e/\hat{\sigma}_e$. Однако такой путь физически менее нагляден, точнее менее связан с выводом физических соотношений (3.43) в приращениях для одноосного сжатия и растяжения.

Остановимся на втором пути, который лишен этого недостатка, но, естественно, приводит к одинаковым зависимостям. Предположим сначала, что: каждое напряжение и температура изменяются линейно в функции от своего уровня η_e , так, что, например, $\sigma_e = \eta_e \hat{\sigma}_e$, где $\hat{\sigma}_e$ по-прежнему константы; в матрице (3.96) первый столбец коэффициентов зависит от $\eta_1 = \sigma_1/\hat{\sigma}_1$, второй — от $\eta_2 = \sigma_2/\hat{\sigma}_2$, третий — от $\eta_3 = \sigma_3/\hat{\sigma}_3$, а затем перейдем к частному случаю $\eta_e = \eta$, причем единственно возможному, если требовать соблюдение парности побочных коэффициентов в матрице податливости. Температурный уровень $\eta_4 = t^0/t^0$. При указанных двух условиях дифференцирование соотношений (3.95) по формулам (3.112) приводит к

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(-\frac{\sigma_1}{\nu_{b1}} \right) d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \left(-\frac{\sigma_2 \mu_{b12}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \left(-\frac{\sigma_3 \mu_{b13}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_3 + \frac{\partial}{\partial t^0} (\alpha_b^0 t^0) dt^0; \\ d\varepsilon_2 &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(-\frac{\sigma_1 \mu_{b21}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \left(-\frac{\sigma_2}{\nu_{b2}} \right) d\sigma_2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \left(-\frac{\sigma_3 \mu_{b23}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_3 + \frac{\partial}{\partial t^0} (\alpha_b^0 t^0) dt^0; \\ d\varepsilon_3 &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(-\frac{\sigma_1 \mu_{b31}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \left(-\frac{\sigma_2 \mu_{b32}}{\nu_b^-} \right) d\sigma_2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \left(-\frac{\sigma_3}{\nu_b^-} \right) d\sigma_3 + \frac{\partial}{\partial t^0} (\alpha_b^0 t^0) dt^0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Нетрудно заметить, что элементы системы (3.113), стоящие перед приращениями $d\sigma_e$, равны в случае одноосного напряжения коэффициентам изменения касательных модулей (ν_b^k и μ_b^k). По этой аналогии им можно присвоить соответствующие обозначения. Так, по аналогии с (3.31), (3.32) можно записать

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_e} \left(-\frac{\sigma_e}{\nu_{be}} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_e} \left(-\frac{\eta_e}{\nu_{be}} \right) = -\frac{1}{\nu_{be}^k}, \quad (3.114)$$

где ν_{be}^k — коэффициенты изменения касательных модулей ($E_b^0 \nu_{be}^k$ — касательные модули).

Побочным элементам системы (3.113) соответствуют в частном случае элементы (3.38), (3.39). По аналогии с ними можно обозначить:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_e} \left(-\frac{\sigma_e \mu_{bke}}{\nu_b^-} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_e} \left(-\frac{\eta_e \mu_{bke}}{\nu_b^-} \right) = -\frac{\mu_{bke}^k}{\nu_b^-} \quad (3.115)$$

Касательные коэффициенты α_b^{0k} температурной деформации составят

$$-\frac{\partial}{\partial t^0} (\alpha_b^0 t^0) = \alpha_b^{0k} \quad (3.116)$$

С учетом принятых в (3.114) и (3.115) обозначений уравнения системы (3.113) без учета температурных членов преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\nu_{b1}^k} & \left(-\frac{\mu_{b12}^k}{\nu_b^-} \right) & \left(-\frac{\mu_{b13}^k}{\nu_b^-} \right) \\ \left(-\frac{\mu_{b21}^k}{\nu_b^-} \right) & \frac{1}{\nu_{b2}^k} & \left(-\frac{\mu_{b23}^k}{\nu_b^-} \right) \\ \left(-\frac{\mu_{b31}^k}{\nu_b^-} \right) & \left(-\frac{\mu_{b32}^k}{\nu_b^-} \right) & \frac{1}{\nu_{b3}^k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix}$$

В полном виде систему (3.95) в приращениях можно представить $\{d\varepsilon_b\}_n = [c_b^k]_n \{d\sigma_b\}_n + \{\alpha_b^{0k}\} dt^0$, (3.118)

где $\{d\varepsilon_b\}_n = \{d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3, d\gamma_{12}, d\gamma_{23}, d\gamma_{31}\}^T$,
 $\{d\sigma_b\}_n = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\tau_{12}, d\tau_{23}, d\tau_{31}\}^T$,
 $[c_b^k]_n$ — симметричная матрица касательных модулей

$$[c_b^k]_n = \frac{1}{E_b} \begin{vmatrix} \frac{1}{\nu_{b1}^k} & \left(-\frac{\mu_{b12}^k}{\nu_b^-} \right) & \left(-\frac{\mu_{b13}^k}{\nu_b^-} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\mu_{b12}^k}{\nu_b^-} \right) & \frac{1}{\nu_{b2}^k} & \left(-\frac{\mu_{b23}^k}{\nu_b^-} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\mu_{b13}^k}{\nu_b^-} \right) & \left(-\frac{\mu_{b23}^k}{\nu_b^-} \right) & \frac{1}{\nu_{b3}^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nu_{G12}^k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nu_{G23}^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nu_{G31}^k} \end{vmatrix}$$

Таким образом приходим к записи физических соотношений в приращениях.

Внося в (3.114) и (3.115) значения ν_{be} и μ_{bek} из (3.97), (3.98) и выполнив дифференцирование, находим при $\eta_e = \eta$

$$\frac{1}{\nu_{be}^k} = \frac{1}{\nu_{be}} + \frac{2 \operatorname{ср} \tilde{\sigma}_e^p s_e + (\nu_{0e} - \hat{\nu}_{be}') s_e'}{2 \nu_{be}^2 \sqrt{s_e}} \quad (3.120)$$

где

$$s_e = 1 - \omega_{1e} \eta - \omega_{2e} \eta^2;$$

$$s_e' = \omega_{1e} \eta - 2 \omega_{2e} \eta^2;$$

$$p = 1/3; \quad \tilde{\sigma}_e = \sigma_e k_e / \hat{\sigma}_b = \sigma_3 / \hat{\sigma}_b;$$

k_e — коэффициенты пропорциональности простого нагружения ($k_e = \hat{\sigma}_{b3} / \hat{\sigma}_{be}$, в процессе нагружения коэффициенты пропорциональности остаются константами).

Заметим, что при дифференцировании параметр $c(\hat{\sigma}_3 / \hat{\sigma}_b)^{1/3}$ в выражении (3.101) заменяется на $c(\hat{\sigma}_e k_e / \hat{\sigma}_b)^{1/3}$.

К выражению $1/\nu_{be}^k$ приходим, заменив в формуле (3.120) ν_{be}^k на $\nu_{b'}^k$, ν_{be} на $\nu_{b'}^k$, $\hat{\nu}_{be}$ на $\hat{\nu}_{b'3}$.

Касательный коэффициент поперечной деформации определяется из выражения (3.115). Внося в это выражение значения ν_{be} и μ_{bek} из (3.97) и (3.98) и выполнив дифференцирование, находим

$$\mu_{bke}^k = \mu_{bke} - (\pm) \frac{\eta^2 \nu_b^{k-1} (\mu_{bke}^0 - \hat{\mu}_{bke})}{2 \nu_b^k \sqrt{(1 - \eta^2)}} \quad (3.121)$$

$$(\mu_{bke}^k = \mu_{bek}^k; \quad ke = 12, 13, 23),$$

В выражениях (3.120) и (3.121) верхний знак «+» относится к восходящей ветви, а «-» — к нисходящей.

Заметим, что элементы, учитывающие сдвиг, не выводятся из системы (3.95), а записываются по аналогии с (3.99),

$$\frac{1}{\nu_{Gei}^k} = \frac{1}{\nu_{be}^k} + \frac{1}{\nu_{bi}^k} + \frac{2 \mu_{bei}^k}{\nu_b^{k-1}} \quad (ei = 12, 23, 13). \quad (3.122)$$

Описание некоторых программ нагружения в виде ломаной линии. Рассмотрим иной способ определения деформаций для программы нагружения OAB по рис. 3.12 (она еще показана на рис. 3.16, а). Это нагружение можно разделить на два простых — одно на OA , а другое на AB , при этом на AB нагружение представляется простым относительно приращений напряжений. Последовательность расчета такова. Вначале определяются деформации на OA по формулам (3.95) или (3.119), и фиксируются в точке A следующие величины: касательные коэффициенты $(\nu_{be(A)}^k, \nu_{b(A)}^k, \mu_{bek(A)}^k)$ касательной матрицы (3.119), а также напряжения $\sigma_{e(A)}$ и относительные деформации $\epsilon_{e(A)}$.

На AB общие напряжения и деформации представляются в виде

$$\sigma_e = \sigma_{e(A)} + \sigma_{\Delta e}; \quad \epsilon_{be} = \epsilon_{e(A)} + \epsilon_{\Delta e},$$

где $\hat{\sigma}_{e'}$, $\hat{\sigma}_{e''}$ — напряжения и деформации, точнее их приращения, которые отсчитываются от нового начала точки A .

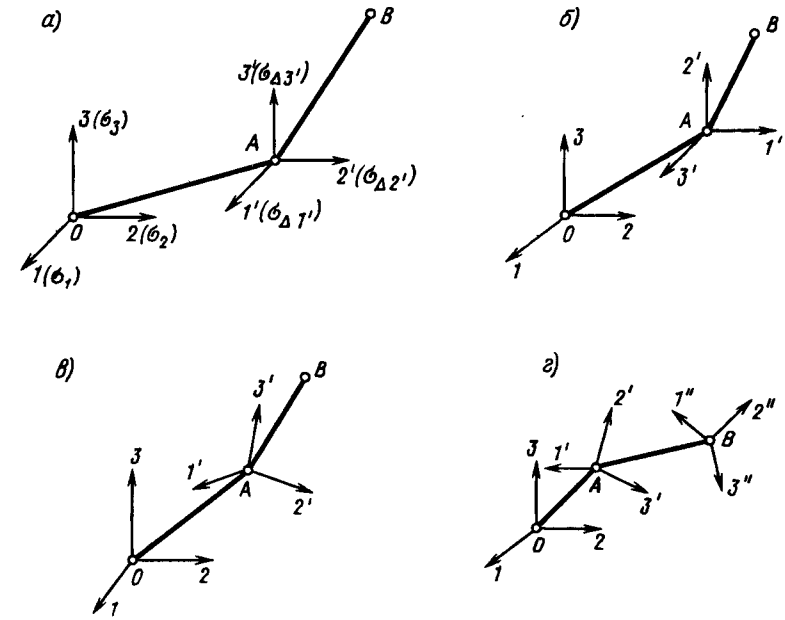


Рис. 3.16. К описанию сложных программ нагружения

Причем полагаем, что соблюдаются условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \quad \sigma_{\Delta 1} > \sigma_{\Delta 2} > \sigma_{\Delta 3}.$$

В виде параметра нагружения новых напряжений, отсчитываемых от точки A , выступает уровень η_{Δ} — уровень приращения напряжений; $\eta_{\Delta} = \sigma_{\Delta e} / \hat{\sigma}_{\Delta e}$, где $\hat{\sigma}_{\Delta e}$ — предельные приращения, которые соответствуют точке пересечения линии AB с поверхностью прочности (на рис. 3.12 эта точка пересечения совпадает с точкой B , хотя это не обязательно). Практически уровни η_{Δ} определяются из критерия прочности (2.45), (2.47), вводя в него

$$\hat{\sigma}_e = \sigma_{e(A)} + \eta_{\Delta}^1 \sigma_e. \quad (3.123)$$

Для вычисления деформаций $\epsilon_{\Delta e}$ на AB необходимы их связи с напряжениями $\sigma_{\Delta e}$. Эти связи можно записать в виде (3.95) или (3.118), несколько изменив формулы по определению элементов матриц (3.96) или (3.119). Изменения таковы: $\sigma_e, d\sigma_e, \hat{\sigma}_e, \eta_e(\eta), \epsilon_e, d\epsilon_e$ заменяются соответственно на $\sigma_{\Delta e}, d\sigma_{\Delta e}, \hat{\sigma}_{\Delta e}, \eta_{\Delta e}(\eta_{\Delta}), \epsilon_{\Delta e}, d\epsilon_{\Delta e}$ и принимаются величины $\nu_{be}^0 = \nu_{be(A)}^k; \mu_{bek}^0 = \mu_{bek(A)}^k$. Кроме этого должны корректироваться величины $\hat{\nu}_{be}$ и $\hat{\nu}_b$, которые заменяются на $\hat{\nu}_{be(A)}$ и $\hat{\nu}_b$. Причем

$$\nu_{be}^k \approx \frac{\hat{\sigma}_e - \sigma_{e(A)}}{\hat{\epsilon}_{e'} - \epsilon_{\Delta e(A)}} [\nu_b^0]^{-1} \approx \hat{\nu}_{be} \left(\frac{1 - \eta(A)}{1 - \eta_{\Delta e(A)}} \right),$$

здесь $\hat{\varepsilon}_{\Delta e}$, $\varepsilon_{\Delta e(A)}$ — диагональные деформации (предельные и в точке A); $\hat{\eta}_{\Delta e(A)}$, $\eta_{\Delta e(A)}$ — уровни напряжений и диагональных деформаций в точке A ($\hat{\eta}_{\Delta e(A)} = \eta_{\Delta e(A)} \sqrt{v_{be}^2} / \sqrt{v_{be(A)}^2}$).

$$\hat{\nu}_{\Delta b} = \nu_b \left(\frac{1 - \eta(A)}{1 - \eta_{\Delta 3}(A)} \right).$$

Формулы по определению параметров $\hat{\nu}_{\Delta be}$, $\hat{\nu}_{\Delta b}$ еще требуют уточнения, поскольку они не учитывают влияние режимов нагружения на указанные параметры. В частном случае одноосного сжатия или растяжения рассмотренный переход к новой точке отсчета показан на рис. 3.6, где новая точка обозначается 0.

По линии AB может осуществляться также простая разгрузка на приращениях. Этот случай рассмотрен в следующем пункте. Другие случаи перехода от линейной программы OA к программе AB можно обозначить пока лишь схематически.

Пусть, например, номера ($e = 1, 2, 3$) приращений $\sigma_{\Delta e}$ на AB в последовательности $\sigma_{\Delta 1} > \sigma_{\Delta 2} > \sigma_{\Delta 3}$, которые обозначим $\sigma_{\Delta e}$, $\sigma_{\Delta 1'} > \sigma_{\Delta 2'} > \sigma_{\Delta 3'}$, не совпадают с номерами e напряжений σ_{eA} в последовательности $\sigma_{1(A)} > \sigma_{2(A)} > \sigma_{3(A)}$. В этом случае усложняется определение уровня η_{Δ} , поскольку эта последовательность заложена в конструкцию критерия прочности. Пусть, например, вдоль $\sigma_{1(A)}$ действует приращение $\sigma_{\Delta 3'}$, вдоль напряжения $\sigma_{2(A)}$ приращение $\sigma_{\Delta 1'}$, а вдоль $\sigma_{3(A)}$ приращение $\sigma_{\Delta 2'}$ (см. рис. 3.16, б).

Предельные напряжения составят

$$\hat{\sigma}_e = \sigma_{1(A)} + \sigma_{\Delta 3'} \eta_{\Delta}^{-1}, \quad \hat{\sigma}_k = \sigma_{2(A)} + \sigma_{\Delta 1'} \eta_{\Delta}^{-1}, \quad (3.124)$$

$$\hat{\sigma}_s = \sigma_{3(A)} + \sigma_{\Delta 2'} \eta_{\Delta}^{-1},$$

где каждый из индексов e, k, s должен принять одно из значений 1, 2, или 3 так, чтобы $\hat{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_2 > \hat{\sigma}_3$; как уже указывалось, это условие заложено в конструкцию критерия прочности. Решение задачи сводится к перебору шести вариантов: 1) $e = 1, k = 2, s = 3$; 2) $e = 1, k = 3, s = 2$; 3) $e = 2, k = 3, s = 1$; 4) $e = 2, k = 1, s = 3$; 5) $e = 3, k = 2, s = 1$; 6) $e = 3, k = 1, s = 2$.

Допустим, что к решению приводит пятый вариант, тогда $(\hat{\sigma}_1 = -\sigma_{3(A)} + \sigma_{\Delta 2'} \eta_{\Delta}^{-1}) \geq (\hat{\sigma}_2 = \sigma_{2(A)} + \sigma_{\Delta 1'} \eta_{\Delta}^{-1}) \geq (\hat{\sigma}_3 = \sigma_{1(A)} + \sigma_{\Delta 3'} \eta_{\Delta}^{-1})$. Если это условие не выполняется, то пятый вариант не является решением. По уровню η_{Δ} начальным условиям в точке A и конечным условиям в точках с координатами $\hat{\sigma}_e$ можно установить [по аналогии с (3.96) и (3.119)] матрицы, связывающие $\sigma_{\Delta e'}$ с $\varepsilon_{\Delta e'}$ или $d\sigma_{\Delta e'}$ с $d\varepsilon_{\Delta e'}$, однако эти зависимости еще не исследованы.

Можно рассмотреть схематически и более общий случай с произвольным поворотом осей главных напряжений и их приращений в точке A (см. рис. 3.16, в). Заметим, что схема рис. 3.16, б также связана с поворотом осей в точке A и на AB , однако такой поворот является простым (осуществляется на углы 0 и 90° или кратные им). На рис. 3.16, в это условие не соблюдается, хотя между описаниями схем 3.13, б и 3.13, в имеется аналогия. Укажем на нее.

Вектор-столбец напряжений в точке A $\sigma_{e(A)}$, преобразованный к осям 1, 2, 3 будет иметь кроме нормальных $\sigma_{e'(A)}$ напряжений еще и касательные $\tau_{e'k(A)}$. Чтобы оси 1, 2, 3 в результате поворота стали главными, необходимо поворот сопроводить приложением касательных напряжений обратного знака ($-\tau_{e'k(A)}$) — условно касательной разгрузкой. После этого останутся одни нормальные напряжения $\sigma_{e'(A)}$, с которыми можно оперировать так же, как в предыдущем примере (см. рис. 3.16, в).

Встает еще вопрос, как влияет разгрузка касательными напряжениями на деформации $\varepsilon_{e'(A)}$? Составить об этом представление можно, преобразовав физические соотношения типа (3.95) или (3.119), если рассмотрение проводится в малых приращениях к осям 1', 2', 3'. В результате таких преобразований матрица $[c_{b(A)}]_n$ переходит в матрицу $[c_{b(A)}]_n$, которая будет в отличие от $[c_{b(A)}]_n$ полностью заполненной. Умножив нормальные напряжения $\sigma_{e'k(A)}$ и касательные компоненты $\tau_{e'k(A)}$ на компоненты этой матрицы, получим нормальные удлинения $\varepsilon_{e'(A)}$ и сдвиги $\gamma_{e'k(A)}$, которые будут зависеть от всех компонент напряжений (нормальных и касательных). Эти деформации следует сложить с деформациями, которые получаются в результате касательной разгрузки напряжениями $-\tau_{e'k(A)}$.

Если допустить, что компоненты матрицы $[c_{b(A)}]_n$ на касательной разгрузке не меняются, то тогда в сумме все влияние касательных компонент на деформации сводится к нулю. Т.е. можно оперировать только с частью матрицы $[c_{b(A)}]_n$, оставляя в ней те же члены, что и в матрице $[c_{b(A)}]_n$. Если поворот мал, то элементы этих матриц можно в первом приближении и приравнять. Таким образом приходим к модифицированной схеме рис. 3.16, г.

Разгрузка. Запись физических соотношений в конечных приращениях. Повторная нагрузка. В частном случае одноосного напряжения методика конечных приращений представлена выше формулами (3.44) — (3.54). Дадим развитие этой методики на случай трехосного напряжения. Здесь, как и в одноосном случае, вершины и начальные параметры диаграмм в процессе разгрузок и нагрузок будут несколько изменяться. Пока эти изменения можно выполнять по формулам, относящимся к одноосному напряжению, однако этот вопрос еще требует исследования.

Пусть простая или активная нагрузка в некоторой точке A при напряжениях $\sigma_{e(A)}$ и относительных деформациях $\varepsilon_{e(A)}$ сменяется простой или активной разгрузкой; σ_e, ε_e — текущие (на шагах) напряжения и деформации на ветви разгрузки. Пусть одновременно температура уменьшается от значений $t_{(A)}^0$ в точке начала разгрузки A до t^0 ; $t_{\Delta}^0 = t^0 - t_{(A)}^0$. Приращения напряжений и деформаций, отсчитываемые от точки, являются конечными (в принципе любыми, в отличие от бесконечно малых); эти приращения, как уже указывалось, составляют:

$$\sigma_{\Delta e} = \sigma_e - \sigma_{e(A)}; \quad \varepsilon_{\Delta e} = \varepsilon_e - \varepsilon_{e(A)} \quad (e = 1, 2, 3). \quad (3.125)$$

Физические соотношения на ветви разгрузки записываются в приращениях

$$\{\varepsilon_{\Delta b}\}_n = [c_{\Delta b}]_n \{\sigma_{\Delta b}\}_n + \{\alpha_{b2}^0\} t_{\Delta}^0, \quad (3.126)$$

где

$$\{\varepsilon_{\Delta b}\}_n = \{\varepsilon_{\Delta 1}, \varepsilon_{\Delta 2}, \varepsilon_{\Delta 3}, \gamma_{\Delta 12}, \gamma_{\Delta 23}, \gamma_{\Delta 31}\}^T;$$

$$\{\sigma_{\Delta b}\}_n = \{\sigma_{\Delta 1}, \sigma_{\Delta 2}, \sigma_{\Delta 3}, \sigma_{\Delta 12}, \sigma_{\Delta 23}, \sigma_{\Delta 31}\}^T;$$

$[c_{\Delta b}]_n$ — матрица податливости бетона на приращениях напряжений и деформаций при разгрузке

$$[c_{\Delta b}]_n = \frac{1}{E_b} \begin{vmatrix} (1/\nu_{\Delta b1}) - \mu_b & -\mu_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_b & (1/\nu_{\Delta b2}) - \mu_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_b & -\mu_b & (1/\nu_{\Delta b3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G23}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G13}) \end{vmatrix} \quad (3.127)$$

$\{\alpha_{b2}^0\}$ — вектор-столбец коэффициентов обратимой температурной деформации,

$$\{\alpha_{b2}^0\} = \{\alpha_{b2}^0, \alpha_{b2}^0, \alpha_{b2}^0, 0, 0, 0\}^T, \quad (3.128)$$

здесь α_{b2}^0 — коэффициенты обратимой температурной деформации, определяемые по формулам, приведенным в п. 3.3.

Коэффициенты $\nu_{\Delta be}$ ($e = 1, 2, 3$), входящие в матрицу (3.128), вычисляют двояким способом. При первом способе

$$\nu_{\Delta be} = \nu_{be}^{-1} [1 - 0,2 (\eta_{(A)} - \eta)^2], \quad (3.129)$$

где ν_{be} — коэффициенты, вычисляемые по текущим (на шагах) напряжениям σ_{be} , как при простой нагрузке; $\eta_{(A)}$ — уровень напряжений в точке А начала разгрузки; η — уровень текущих напряжений σ_{be} .

Во втором способе коэффициенты ν_{be} находят по формуле (3.97), полагая в ней

$$\nu_{0i} = \nu_{bi(A)}^{-1}; \quad \hat{\nu}_{bi} = 1 - 0,2 \eta_{(A)} \quad (3.130)$$

и заменяя η на $\eta_{\Delta} = \eta_{(A)} - \eta$,

где $\nu_{bi(A)}$ — коэффициент ν_{bi} , определяемый на ветви нагрузки в точке А; могут использоваться также формулы типа (3.46).

Коэффициент $\nu_{\Delta Gke}$ вычисляют по формуле (3.99), заменяя в ней ν_{Gke} на $\nu_{\Delta Gke}$, ν_{be} (ν_{bk}) на $\nu_{\Delta be}$ ($\nu_{\Delta bk}$), μ_{bek} на μ_b^0 и полагая $\nu_b^- = 1$.

Если в процессе разгрузки переходят из области напряженного состояния $\sigma_1 < 0$ в область $\sigma_1 > 0$ и наоборот, то начало перехода в другую область относится к началу нагрузки в этой области, причем осуществляется с коррективами типа (3.47). Теперь пусть разгрузка в одной области напряжений следует до точки В, а затем начинается повторная нагрузка. В точке В фиксируются величины $\nu_{\Delta be(B)}$, вычисляемые по формулам (3.128) или (3.129), в которых коэффициент 0,2 заменяется на 0,25. Физические соотношения записываются в виде (3.126), где приращения напряжений и деформаций определяются по формулам (3.125) после замены в этих формулах индекса А на индекс В.

Матрицу податливости $[C_{\Delta b}]_n$ представляют в виде (3.127), заменяя $\nu_{\Delta be}$ на $\nu_{\Delta be(B)}$. Приращения температуры также отсчитывают от точки В. Эти соотношения используют до тех пор, пока текущие уровни η не достигнут величины $\eta_{(A)}$ — уровня напряжений, соответствующего началу разгрузки в точке А. После этого переходят к определению деформаций по первоначальным соотношениям (3.95), (3.96). Вектор-столбец коэффициентов температурной деформации определяют в виде (3.128), пока температура t^0 не достигнет температуры $t_{(A)}$. На приращениях температуры $t_{\Delta}^0 = t^0 - t_{(A)}$, где $t^0 > t_{(A)}$, компоненты температурной деформации определяют по соотношениям (3.95), (3.110).

Единые зависимости для нагрузки и разгрузки. В практических расчетах не всегда удобно одновременно использовать деформационные типа (3.95) и инкрементальные типа (3.126) формулировки физических соотношений, а встает задача приведения соотношений к единому виду. Это приведение следует осуществлять по следующим правилам.

Пусть на линии нагружения, изображенной в координатах главных напряжений σ_e ($e = 1, 2, 3$), намечены три точки 0, 1, 2 и записаны соотношения с индексами $(p-s) = (1-0), (2-1), (2-0)$, в виде

$$\{\varepsilon_b\}_{n(p-s)} = [c_b]_{n(p-s)} \{\sigma_b\}_{n(p-s)} + [\alpha_b^0]_{(p-s)} t_{(p-s)}^0, \quad (3.131)$$

где вторые индексы $s = 0, 1, 0$ в круглых скобках указывают на точку, от которой отсчитываются приращения напряжений и деформаций, а также значения текущих модулей, а первые $p = 1, 2, 2$ — на точку, для которой устанавливаются связи между таким образом найденными приращениями напряжений и деформаций.

Если точка 0 помещена в начало координат, то, естественно, приращения на участках $(1-0)$ и $(2-0)$ переходят в общие величины напряжений и деформаций для точек 1, 2, и лишь на участке $(2-1)$ они выступают как приращения.

В соотношениях (3.131) вектор-столбец приращений напряжений и относительных деформаций на участке $p-s$,

$$\{\varepsilon_b\}_{n(p-s)} = \{\varepsilon_{1(p-s)}, \varepsilon_{2(p-s)}, \varepsilon_{3(p-s)}, \gamma_{12(p-s)}, \gamma_{23(p-s)}, \gamma_{31(p-s)}\}^T \quad (3.132)$$

$$\{\sigma_b\}_{n(p-s)} = \{\sigma_{1(p-s)}, \sigma_{2(p-s)}, \sigma_{3(p-s)}, \tau_{12(p-s)}, \tau_{23(p-s)}, \tau_{31(p-s)}\}^T$$

$[c_b]_{n(p-s)}$ — матрица податливости бетона на приращениях напряжений и деформаций на участке $(p-s)$.

$$[c_b]_{n(p-s)} = \begin{vmatrix} c_{b11}^n(p-s) & c_{b12}^n(p-s) & c_{b13}^n(p-s) & 0 & 0 & 0 \\ c_{b12}^n(p-s) & c_{b22}^n(p-s) & c_{b23}^n(p-s) & 0 & 0 & 0 \\ c_{b13}^n(p-s) & c_{b23}^n(p-s) & c_{b33}^n(p-s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b44}^n(p-s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b55}^n(p-s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b66}^n(p-s) \end{vmatrix}$$

где $c_{bke}^n(p-s)$ — элементы матрицы, определяемые через элементы матриц (3.96) и (3.127) на основе соотношений:

$$c_{ke(2-0)}[\sigma_{\Delta e(2-0)} + \sigma_{\Delta k(2-0)}] = c_{ke(1-0)}[\sigma_{\Delta e(1-0)} + \sigma_{\Delta k(1-0)}] + c_{ke(2-1)}[\sigma_{\Delta e(2-1)} + \sigma_{\Delta k(2-1)}], \quad (3.134)$$

($ke = 11, 12, 13, 22, 23, 33$),

$$\begin{aligned} c_{b44}^n(p-s) &= c_{b11}^n(p-s) + c_{b22}^n(p-s) + 2c_{b12}^n(p-s); \\ c_{b55}^n(p-s) &= c_{b22}^n(p-s) + c_{b33}^n(p-s) + 2c_{b23}^n(p-s); \\ c_{b66}^n(p-s) &= c_{b11}^n(p-s) + c_{b33}^n(p-s) + 2c_{b13}^n(p-s) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Формулы (3.134) связывают коэффициенты податливости на трех участках деформирования $(1-0)$, $(2-1)$ и $(2-0)$. Значения податливостей на двух участках $(1-0)$, $(2-0)$ — на ветви нагрузки и $(1-0)$, $(2-1)$ — в случае, если в точке 1 нагрузка сменяется разгрузкой, вычисляют по формулам (3.95), (3.126), а на третьем участке их находят, используя соотношения (3.134).

Например, на указанном выше пути нагружения $0-A-B$ с разгрузкой, который является одним из вариантов пути нагружения $0-1-2$, коэффициенты $c_{ke(A-0)}$ вычисляют по формулам (3.96), коэффициенты $c_{ke(B-A)}$ — по формулам (3.127), а коэффициенты $c_{ke(B-0)}$ находят, используя соотношения (3.134), (3.135). Внося коэффициенты $c_{ke(B-0)}$ в матрицу (3.96), можно на ветви разгрузки, если она является частичной, вместо соотношений (3.131), записанных в конечных приращениях, использовать деформационные соотношения (3.95). И, наоборот, путь нагружения до точки A можно

пройти, используя вместо (3.95) соотношения (3.131) на отрезке типа $2-1$. При этом на отрезках $(1-0)$ и $(2-0)$ жесткости c_{ke} вычисляются по формулам (3.96) — (3.109), а на отрезке $2-1$ они находятся из соотношений (3.134) или (3.135).

Записывая физические соотношения относительно небольших конечных приращений, можно с некоторым приближением использовать эти соотношения и для описания сложного нагружения при изменении нумерации и ориентации осей главных напряжений.

Вектор-столбец коэффициентов температурной деформации

$$\{\alpha_b^0\}_{(p-s)} = \{\alpha_{b(p-s)}^0, \alpha_{b(p-s)}^0, \alpha_{b(p-s)}^0, 0, 0, 0\}^T, \quad (3.136)$$

где $\alpha_{b(p-s)}^0$ связаны соотношением

$$\alpha_{b(2-0)}^0 t_{b(2-0)}^0 = \alpha_{b(1-0)}^0 t_{b(1-0)}^0 + \alpha_{b(2-1)}^0 t_{b(2-1)}^0, \quad (3.137)$$

здесь коэффициенты $\alpha_{b(p-s)}^0$ могут выступать как общие коэффициенты α_b^0 , входящие в вектор-столбец (3.110), или как коэффициенты α_{b2}^0 , входящие в вектор-столбец (3.128) и характеризующие обратимую часть температурной деформации.

В случае, если на линии $0-1-2$ температура увеличивается, тогда коэффициенты $\alpha_{b(1-0)}^0$ и $\alpha_{b(2-0)}^0$ определяются как общие коэффициенты α_b^0 , а коэффициент $\alpha_{b(2-1)}^0$ находят из соотношения (3.137). В случае, если до точки 1 температура увеличивается, а затем при переходе к точке 2 происходит ее снижение, тогда: коэффициент $\alpha_{b(1-0)}^0$ определяют как общий коэффициент α_b^0 , коэффициент $\alpha_{b(2-1)}^0$ вычисляют как α_{b2}^0 , третий коэффициент $\alpha_{b(2-0)}^0$ находят из соотношения (3.137).

3.8. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В СЛУЧАЕ ТРЕХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ТРЕЩИНОВАТОГО БЕТОНА

Выше связи между напряжениями и деформациями устанавливались на основании анализа экспериментов, привлекая дополнительно некоторые предположения. Здесь, следуя [86], рассмотрим теоретический путь. Он позволяет выявить новые свойства коэффициентов матрицы податливости бетона как ортотропного материала, которые в механике анизотропных тел ранее не встречались, хотя этот путь и не лишен определенных условностей.

Пусть задан прямоугольный бетонный элемент, подвергаемый трехосному растяжению главными растягивающими напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (см. рис. 3.17, а, б). В процессе увеличения растягивающих напряжений в структуре бетона могут накапливаться трещины отрыва. Эти трещины ориентируются преимущественно вдоль площадок приложения главных растягивающих напряжений, выключая части этих площадок из восприятия напряжений. Таким образом напряже-

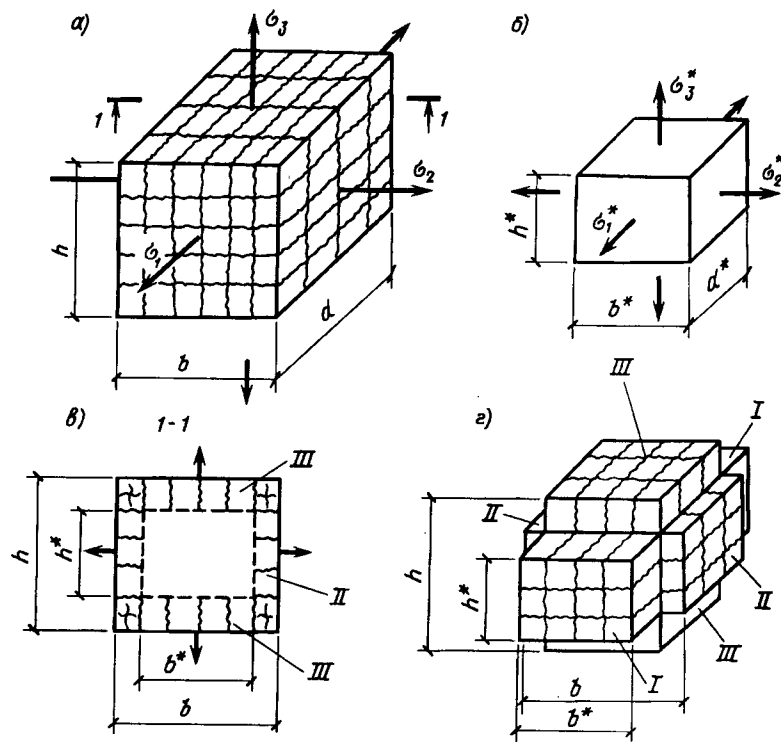


Рис. 3.17. К учету влияния трещиноватости на связи между напряжениями и деформациями в случае трехосного растяжения

ния воспринимаются как бы уменьшенным сечением. Этот фактор учтем схематически.

Представим элемент (см. рис. 3.17, а) в виде сплошной части (рис. 3.17, в) и прилегающих к ней прямоугольных частей, изрезанных прорезями, проходящими по трем ортогональным направлениям (см. рис. 3.17, а, б, г). Размеры начального элемента составляют b, h, d , а размеры сторон сплошной части — b^*, h^*, d^* ; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — напряжения в сплошной части. Эти напряжения, как и напряжения $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$, являются сглаженными. В них некоторым осредненным образом учитывается влияние местных концентраций напряжений у трещин и влияние других неоднородностей структуры бетона, поэтому концентрации отдельно не выделяются. Относительные деформации общего элемента обозначаются $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, а аналогичные деформации сплошной части — $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$.

Изрезанные прорезями части элемента можно разделить на две группы. Одна группа (I, —III, см. рис. 3.17, в, г) в виде столбиков может воспринимать только одноосные напряжения: σ_1^* (части I), σ_2^*

(части II), σ_3^* (части III), передавая их на сплошную часть. Вторая группа (она на рис. 3.17, г не показана) изрезана трещинами так, что напряжения воспринимать не может. Деформация элемента в частях I — III соответственно обозначаются $\tilde{\epsilon}_1^*, \tilde{\epsilon}_2^*, \tilde{\epsilon}_3^*$. Полагаем, что бетон в сплошных частях деформируется как некоторый упругий изотропный материал

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1^* \\ \epsilon_2^* \\ \epsilon_3^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} 1 & -\mu_b^0 & -\mu_b^0 \\ \text{Симметрично} & 1 & -\mu_b^0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \end{Bmatrix} \quad (3.138)$$

где E_b^0 — модуль упругости бетона; μ_b^0 — начальный коэффициент поперечной деформации (Пуассона).

Деформации в частях с трещинами составят

$$\tilde{\epsilon}_1^* = \frac{\sigma_1^*}{E_b^0}; \quad \tilde{\epsilon}_2^* = \frac{\sigma_2^*}{E_b^0}; \quad \tilde{\epsilon}_3^* = \frac{\sigma_3^*}{E_b^0}. \quad (3.139)$$

Общие напряжения определяются из очевидных равенств (см. рис. 3.17, а, г):

$$\begin{aligned} \sigma_1 b h &= \sigma_1^* b^* h^*; & \sigma_2 h d &= \sigma_2^* h^* d^*; \\ \sigma_3 b d &= \sigma_3^* b^* d^*; \end{aligned}$$

которые, вводя обозначения:

$$\frac{b^* h^*}{b h} = \nu_{b1}; \quad \frac{h^* d^*}{h d} = \nu_{b2}; \quad \frac{b^* d^*}{b d} = \nu_{b3}, \quad (3.140)$$

можно записать:

$$\sigma_1^* = \sigma_1 / \nu_{b1}; \quad \sigma_2^* = \sigma_2 / \nu_{b2}; \quad \sigma_3^* = \sigma_3 / \nu_{b3}. \quad (3.141)$$

Как показано выше, ν_{bi} — это коэффициенты изменения модулей продольных деформаций. Обычно ими учитывается развитие пластических деформаций. Здесь они характеризуют трещиноватость бетона — степень нарушения сплошности.

Удлинение грани d составит $\epsilon_1 d$. Это удлинение будет складываться из удлинений $\epsilon_1^* d^*$ сплошной части и удлинения $\tilde{\epsilon}_1^* (d - d^*)$ трещиноватых частей 1. Таким образом можно составить три равенства:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 d &= \epsilon_1^* d^* + \tilde{\epsilon}_1^* (d - d^*); \\ \epsilon_2 b &= \epsilon_2^* b^* + \tilde{\epsilon}_2^* (b - b^*); \\ \epsilon_3 h &= \epsilon_3^* h^* + \tilde{\epsilon}_3^* (h - h^*). \end{aligned} \quad (3.142)$$

При записи (3.142) фактически используется правило усреднения по объему, однако два размера в правой и левой частях равенств

оказываются одинаковыми, поэтому сокращаются. Внося (3.141) в (3.138) и (3.139), а затем полученные деформации в (3.142), находим с учетом обозначений (3.140)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} 1 & \mu_b^0 & \mu_b^0 \\ \nu_{b1} & \nu_{b12} & \nu_{b13} \\ \text{Симметрично} & 1 & \mu_b^0 \\ & \nu_{b2} & \nu_{b23} \\ & & 1 \\ & & \nu_{b3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.143)$$

где

$$\nu_{b12} = h^*/h; \quad \nu_{b13} = b^*/b; \quad \nu_{b23} = d^*/d. \quad (3.144)$$

Перемножая коэффициенты ν_{bi} и ν_{bij} в столбцах (или строках) матрицы (3.143), можно заметить, что

$$\nu_{b12} \nu_{b13} = \nu_{b2}; \quad \nu_{b12} \nu_{b23} = \nu_{b22}; \quad \nu_{b13} \nu_{b23} = \nu_{b33},$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \nu_{b13} &= \sqrt{\nu_{b1} \nu_{b3} / \nu_{b2}}; & \nu_{b12} &= \sqrt{\nu_{b1} \nu_{b2} / \nu_{b3}}; \\ \nu_{b23} &= \sqrt{\nu_{b2} \nu_{b3} / \nu_{b1}}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Коэффициенты ν_{bij} характеризуют изменение поперечных деформаций по мере развития структурных трещин. Установленная связь коэффициентов ν_{bij} с коэффициентами изменения модулей продольных деформаций ν_{bi} в виде (3.145) является новой; обычно использовались выражения типа $\nu_{bij} = \sqrt{\nu_{bi} \nu_{bj}}$, которые могут приводить к существенно иным результатам, чем соотношения (3.145).

Соотношения (3.143) не изменятся, если предположить, что напряжения σ_i ($i = 1, 2, 3$) не являются главными, например $i = x, y, z$ (рис. 3.18, а), важно только чтобы площадки микротрещин были параллельны плоскостям 102, 203, 301 или X0Y, Y0Z, Z0X. Однако эти соотношения необходимо дополнить тремя новыми соотношениями, связывающими касательные напряжения τ_{ij} со сдвигами γ_{ij} ($ij = 12, 23, 31$ или XY, YZ, ZX) в трех указанных плоскостях.

Эти соотношения приближенно можно представить в виде

$$\gamma_{bij} \approx \frac{\tau_{ij} (1 - \mu_b^0)}{E_b^0} \left(\frac{1}{\nu_{bi}} + \frac{1}{\nu_{bj}} \right). \quad (3.146)$$

Эта формула устанавливается следующим образом. Каждый угол сдвига можно представить в виде суммы двух углов $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*$, например, см. рис. 3.18, б, $\gamma_{23} = \gamma_{23}^* + \gamma_{32}^*$.

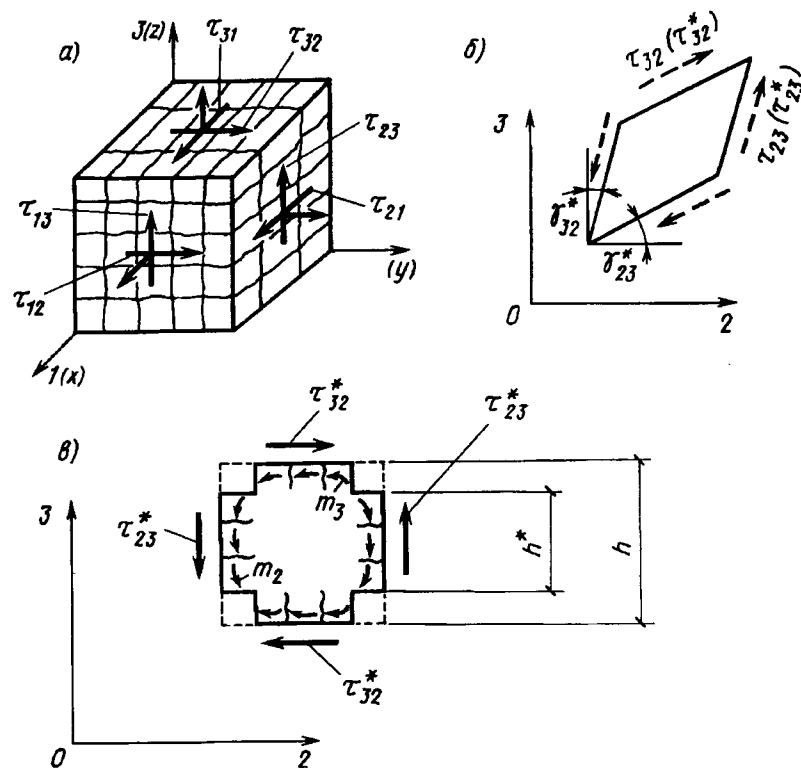


Рис. 3.18. К определению деформаций сдвига в трещиноватых элементах

В изотропных материалах две компоненты будут одинаковыми, в результате

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^* = \frac{\tau_{ij} (1 - \mu)}{E} + \frac{\tau_{ji} (1 - \mu)}{E}. \quad (3.147)$$

Учитывая парность касательных напряжений $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, приходим к $\gamma_{ij} = \tau_{ij} / G$, где G — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона ($G = E / 2(1 + \mu)$). В трещиноватых элементах реальные напряжения обозначаются τ_{ij}^* и τ_{ji}^* , тогда формула (3.147) принимает вид

$$\gamma_{ij} = \frac{(1 - \mu_b^0)}{E_b^0} (\tau_{ij}^* + \tau_{ji}^*). \quad (3.148)$$

Связь между сглаженными τ_{ij} и реальными τ_{ij}^* напряжениями по аналогии с (3.141) записывается

$$\tau_{ij}^* = \tau_{ij} / \nu_{bi} \quad (3.149)$$

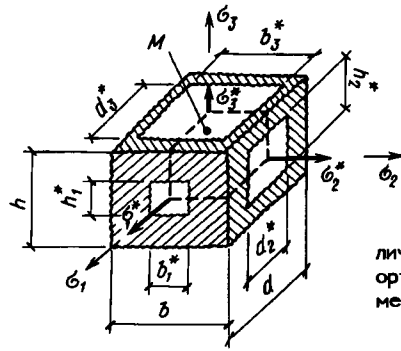


Рис. 3.19. Трещиноватый элемент с различными нарушениями сплошности по трем ортогональным сечениям (M — осьмая часть элемента)

Внося (3.149) в (3.148), приходим к формуле (3.146). Заметим, что парность реальных касательных напряжений τ_{ij}^* может нарушаться, хотя полагаем, что парность сглаженных напряжений соблюдается $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Нарушение парности связано с возникновением в полосах бетона между внутренними трещинами дополнительных моментов m_i, m_j (см. рис. 3.18, б), которые и уравнивают состояние $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$. Особое моментное состояние полосок бетона между внутренними трещинами и его влияние на сдвиги здесь не учитываются, хотя изучение этого вопроса заслуживает внимания, поскольку реальное напряженное состояние трещиноватой среды не может быть безмоментным.

Образование структурных трещин по трем направлениям в представленной схеме оказалось зависимым — синхронизируемым, имея в виду общие размеры h^*, b^*, d^* (см. рис. 3.17, б). В этом случае коэффициенты ν_{bi} будут являться функциями трех напряжений σ_i^* ($i = 1, 2, 3$). Такие свойства установленной системы больше отвечают трехосному сжатию, чем растяжению, хотя сжатие здесь и не рассматривается.

Перейдем к рассмотрению более общего случая, когда нарушение сплошности по трем направлениям — вдоль плоскостей $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ и σ_2^*, σ_1^* будет происходить независимо (несинхронизированно). Такие сечения с нарушенной сплошностью на рис. 3.19 условно вынесены на поверхности прямоугольного параллелепипеда. Части, нарушенные структурными трещинами соответствующей ориентации, заштрихованы; ненарушенными остаются площади: $h_1^* b_1^*$, $h_2^* d_2^*$ и $b_3^* d_3^*$. Главные напряжения на ненарушенных площадках обозначены $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$. Они связываются с аналогичными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, отнесенными к полным площадкам, соотношениями, которые следуют из рис. 3.19:

$$\sigma_1^* h_1^* b_1^* = \sigma_1 h b; \quad \sigma_2^* h_2^* d_2^* = \sigma_2 h d; \quad \sigma_3^* b_3^* d_3^* = \sigma_3 b d. \quad (3.150)$$

Обозначим:

$$\nu_{b1} = \frac{h_1^* b_1^*}{h b}; \quad \nu_{b2} = \frac{h_2^* d_2^*}{h d}; \quad \nu_{b3} = \frac{b_3^* d_3^*}{b d}, \quad (3.151)$$

тогда:

$$\sigma_1^* = \sigma_1 / \nu_{b1}; \quad \sigma_2^* = \sigma_2 / \nu_{b2}; \quad \sigma_3^* = \sigma_3 / \nu_{b3}. \quad (3.152)$$

Расположим главные напряжения в последовательности

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

тогда логично предположить, что $h_1^* \leq h_2^*$; $b_1^* \leq b_3^*$; $d_2^* \leq d_3^*$.

Представленные на рис. 3.19 три сечения с различными нарушениями сплошности будут внутри элемента взаимно пересекаться и делить общий элемент на отдельные части. Можно выделить четыре типа таких частей (подэлементов): 1 — ненарушенная трещинами часть; 2 — часть, нарушенная трещинами только одного направления; 3 — часть, нарушенная взаимно пересекающимися трещинами двух направлений; 4 — часть, нарушенная взаимно пересекающимися трещинами трех направлений. На рис. 3.20 показана одна восьмая часть исследуемого элемента (см. M, рис. 3.19), «разобранная» на указанные малые части (подэлементы) трех типов. Подэлементы четвертого типа изымаются из рассмотрения, поскольку они не могут воспринимать напряжений ни по одному из направлений, т.е. считаются полностью разрушенными; на схемах рис. 3.18 они не показаны.

Покажем процедуру вывода связей между напряжениями и деформациями на примере направления σ_2^*, ϵ_2^* . В этом выводе участвуют подэлементы, которые могут воспринимать напряжения σ_2^* . Эти подэлементы показаны на рис. 3.20, а, а', а'', точнее показана одна восьмая часть подэлементов; формально, чтобы учесть полные объемы, мы не должны обращать внимание на коэффициенты 1/2, проставленные перед размерами $b_1^*, h_1^*, d_2^*, h_2^*, b_3^*, h$.

Деформации ϵ_2^* в сплошной части подэлемента (см. рис. 3.20, а), определяются по зависимости (3.138)

$$\epsilon_2^* = \frac{1}{E_b^*} [-\sigma_1^* \mu_b^* + \sigma_2^* - \sigma_3^* \mu_b^*]. \quad (3.153)$$

Объем этих деформаций составляет

$$\epsilon_2^* b_1^* h_1^* d_2^*. \quad (3.154)$$

Относительные деформации $\tilde{\epsilon}_2^*$ в подэлементе (см. рис. 3.18, а') определяются по формуле (3.138) при $\sigma_1^* = 0$

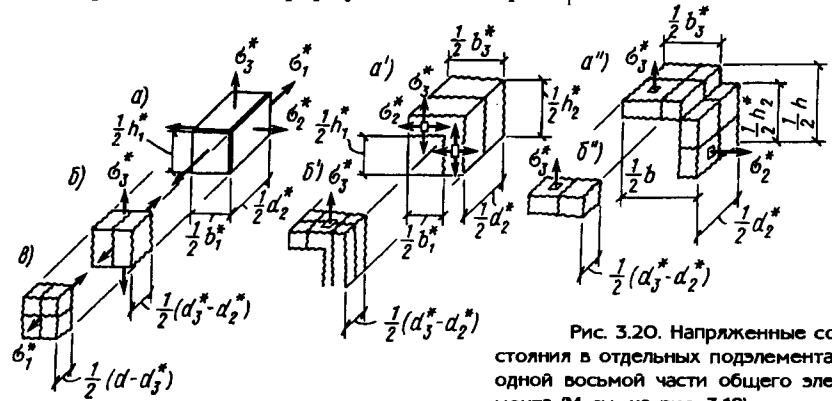


Рис. 3.20. Напряженные состояния в отдельных подэлементах одной восьмой части общего элемента (M см. на рис. 3.19)

$$\tilde{\varepsilon}_2^* = \frac{1}{E_b^0} [\sigma_2^* - \mu_b^0 \sigma_3^*]. \quad (3.155)$$

Объем этих деформаций составит

$$\tilde{\varepsilon}_2^*(b_3^* h_2^* d_2^* - b_1^* h_1^* d_2^*). \quad (3.156)$$

Еще напряжения σ_2^* приложены к части подэлемента, представленного на рис. 3.18, а", в этой части деформации определяются по формуле

$$\tilde{\varepsilon}_2^* = \sigma_2^* / E_b^0. \quad (3.157)$$

Объем этих деформаций равен

$$\tilde{\varepsilon}_2^*(b h_2^* d_2^* - b_3^* h_2^* d_2^*). \quad (3.158)$$

Объем (3.154), (3.156) и (3.158) приравняем к объему общих деформаций ε_2 , т.е.

$$\varepsilon_2 d_2^* h_2^* b = \varepsilon_2^* b_1^* h_1^* d_2^* + \tilde{\varepsilon}_2^*(b_3^* h_2^* d_2^* - b_1^* h_1^* d_2^*) + \tilde{\varepsilon}_2^*(b h_2^* d_2^* - b_3^* h_2^* d_2^*). \quad (3.159)$$

Заметим, что при записи объема общих деформаций ($\varepsilon_2 d_2^* h_2^* b$) учитываем только рабочий объем элемента, который формирует эти деформации, и отбрасываем части, которые нарушены трещинами, и деформации которых в связи с этим следуют по направлению 2 авторматически за деформациями рабочего объема. Внося в зависимости (3.159) значения ε_2^* , $\tilde{\varepsilon}_2^*$ и $\tilde{\varepsilon}_2^{**}$ из (3.153), (3.155), (3.157) и учитывая значения (3.151), (3.152), находим

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_b^0} \left[-\sigma_1 - \frac{\mu_b^0 h}{h_2^*} + \sigma_2 - \frac{1}{\nu_{b2}} - \sigma_3 - \frac{\mu_b^0 d}{d_3^*} \right]. \quad (3.160)$$

Аналогичным образом устанавливаются деформации ε_1 и ε_3 . Вклад в деформации ε_1 дают подэлементы, представленные на рис. 3.20, а, б, в, объемы деформаций ε_3 будут складываться из объемов деформаций в подэлементах, представленных на рис. 3.20, а, б, а', б', а'', б''. Составляем остальные два равенства типа (3.159), а затем по аналогии с (3.160) устанавливаем окончательные зависимости по определению ε_1 и ε_3 .

В итоге приходим к системе физических соотношений (3.143) с тем лишь различием, что входящие в эти зависимости коэффициенты ν_{bi} следует вычислять по формулам (3.151), а коэффициенты ν_{bij} необходимо принимать

$$\nu_{b12} = h_2^*/h; \quad \nu_{b13} = b_3^*/b; \quad \nu_{b23} = d_3^*/d \quad (3.161)$$

(вводятся еще только некоторые упрощения при определении коэффициента ν_{b3}).

Соотношения (3.145) теряют силу, однако их формально можно записать в ином виде. Обозначим:

$$\varphi_h = h_2^*/h_1^*; \quad \varphi_b = b_3^*/b_1^*; \quad \varphi_d = d_3^*/d_2^*, \quad (\varphi_h \geq 1; \quad \varphi_b \geq 1; \quad \varphi_d \geq 1),$$

тогда, перемножив коэффициенты ν_{bi} и ν_{bij} , стоящие в столбцах (или строках), получим:

$$\nu_{b12} \nu_{b13} = \nu_{b1} \varphi_h \varphi_b; \quad \nu_{b12} \nu_{b23} = \nu_{b2} \varphi_d; \quad \nu_{b13} \nu_{b23} = \nu_{b3}.$$

Эти соотношения можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \nu_{b12} &= \sqrt{\frac{\nu_{b1} \nu_{b2}}{\nu_{b3}} \varphi_h \varphi_b \varphi_d}; \\ \nu_{b13} &= \sqrt{\frac{\nu_{b1} \nu_{b3}}{\nu_{b2}} \varphi_h \varphi_b}; \\ \nu_{b23} &= \sqrt{\frac{\nu_{b2} \nu_{b3}}{\nu_{b1}} \varphi_d}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Эти соотношения удобны для анализа, однако не добавляют новой информации, поскольку входящие в них коэффициенты φ_h , φ_b и φ_d являются неизвестными.

Частные случаи. Пусть трещины в структуре бетона ориентируются только по одному из направлений: $h_2^* = h$; $b_3^* = b$; $d_3^* = d$. Из (3.151), (3.152) следует, что $\nu_{b2} = \nu_{b3} = \nu_{bij} = 1$. В результате этого соотношения (3.143) преобразуются к виду

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} 1/\nu_{b1} & -\mu_b^0 & -\mu_b^0 \\ \text{Симметрично} & 1 & -\mu_b^0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (3.163)$$

Таким образом при однонаправленной ориентации внутренних трещин они не сказываются на коэффициенте поперечной деформации.

Пусть теперь развитие трещин по всем трем направлениям происходит одинаково (случай изотропного развития внутренних трещин). Тогда $\nu_{b1} = \nu_{b2} = \nu_{b3} = \nu_b$; $\nu_{b12} = \nu_{b13} = \nu_{b23} = \nu_b^2$, в результате

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0 \nu_b} \begin{bmatrix} 1 & -\mu_b^0 \sqrt{\nu_b} & -\mu_b^0 \sqrt{\nu_b} \\ \text{Симметрично} & 1 & -\mu_b^0 \sqrt{\nu_b} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (3.164)$$

В точности этот случай соответствует трехосному равномерному растяжению.

Укажем на возможность учета еще одного фактора. Выше материал сплошной части принимался упругим. Однако в принципе

сплошная часть, в свою очередь, может деформироваться нелинейно, причем физическая природа этой нелинейности будет иной, т.е. не будет связана с указанной системой внутренних трещин. Этот фактор можно приближенно учесть, заменив упругие константы E_b^0 и μ_b^0 на переменные величины E_b и μ_b ($E_b = E_b^0 \nu_b$, где ν_b — некоторая функция напряженного состояния).

Рассмотренные простые схемы позволяют более осмысленно подходить к построению реальных физических соотношений для бетона.

В заключение укажем на некоторые вопросы в теории деформации бетона, которые еще требуют развития и совершенствования на основе теоретических и экспериментальных исследований. Ранее уже говорилось о необходимости развития нового направления, основанного на непосредственном учете внутренней трещиноватости бетона. Можно особо выделить вопросы определения деформаций бетонов при сложных нагружениях с разгрузками. Здесь особо остро стоит проблема постановки специальных экспериментов.

Как будет показано в гл. 4, остаются слабо исследованными вопросы по определению деформаций ползучести бетонов при одноосных напряжениях и проверке общей расчетной модели с учетом этого немаловажного фактора. Выполненные по этой проблеме экспериментальные исследования ограничены, а отсюда и недостаточны для успешных теоретических разработок.

Практически незатронутыми остаются факторы влияния масштабных эффектов и градиентов напряжений на деформации и прочность бетонов при одноосных напряженных состояниях, которые могут заметно повлиять на определение деформаций и прочности. Следует заметить, что в их учете состоит определенный резерв повышения прочности. Встают вопросы выявления более четких границ применимости различных моделей деформирования бетонов на основе более детальной экспериментальной проверки их основополагающих предпосылок.

Появление новых более экономичных вяжущих и бетонов на их основе требует проведения определенных сопоставимых экспериментов для решения вопросов определения их деформаций и прочности в условиях одноосных напряжений, кстати при этом проявляются весьма выпукло характерные свойства бетонов (псевдопластичность, вязкость, малая упругость), которые при обычных одноосных испытаниях могут сглаживаться.

Весьма существенными остаются вопросы разработки новых более точных и высокоавтоматизированных установок по проведению экспериментальных исследований (в этом плане в нашей стране по сравнению с зарубежьем наблюдается заметное отставание).

Можно указать и на некоторые другие вопросы. Тем не менее уже в разработанном виде теория деформирования бетонов может найти широкое применение в практике проектирования, особенно современного автоматизированного проектирования на ЭВМ, и способствовать созданию более совершенных и экономичных конструктивных решений.

Глава 4. НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА В УСЛОВИЯХ ОДНООСНЫХ И НЕОДНООСНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Выполненные к настоящему времени экспериментальные исследования показывают, что реальная ползучесть бетона в условиях одноосных напряженных состояний может значительно, а при высоких уровнях трехосного неравномерного сжатия и на порядок, отличаться от результатов расчета по линейным теориям. Общая теория деформирования бетонов в условиях длительного приложения одноосных напряжений находится еще в стадии разработки [19, 91, 174]. Здесь остановимся сначала на некоторых частных подходах, которые, однако, позволяют описать все стадии деформирования элементов при некоторых режимах нагружения вплоть до разрушения, в том числе постепенного разрушения по типу нисходящей ветви на диаграмме « $\mathcal{E}-\sigma$ », а затем рассмотрим вывод общих соотношений.

4.1. МЕТОДИКА ДИАГРАММ-ИЗОХРОН ПРИ ЭТАЛОННЫХ ПРОГРАММАХ (РЕЖИМАХ) НАГРУЖЕНИЯ. ОПИСАНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММ НАГРУЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала одноосное напряженное состояние, ограничившись некоторыми выделенными (эталонными) режимами нагружения. В качестве типовых примем два типа диаграмм-изохрон [74, 78]: диаграммы-изохроны, соответствующие ступенчатым режимам нагружения (рис. 4.1, а), когда нагрузка прикладывается в течение непродолжительного отрезка времени — в пределах 1 ч и в последующем выдерживается постоянной в течение времени $t-t_0$ (t_0 — возраст бетона к началу нагружения);

диаграммы-изохроны, соответствующие режиму нагружения бетона в возрасте t_0 возрастающими напряжениями или деформациями, причем скорость роста напряжений или деформаций в течение времени нагружения $t-t_0$ остается в среднем близкой к постоянной (см. рис. 4.1, б).

Как в первом случае (жесткий режим нагружения), так и во втором (мягкий режим) $t-t_0$ является временем натекания деформаций $\mathcal{E}_b(t)$, которое принимается одинаковым для всех точек рассматриваемой диаграммы-изохроны. Вершины диаграмм-изохрон, построенных для различных отрезков времени $t-t_0$, выходят на общую кривую — кривую длительного сопротивления бетона $R_b(t, t_0)$, причем кривые длительного сопротивления бетона для жесткого и мягкого режимов нагружения могут не совпадать (линии 7, 8 на рис. 4.1).

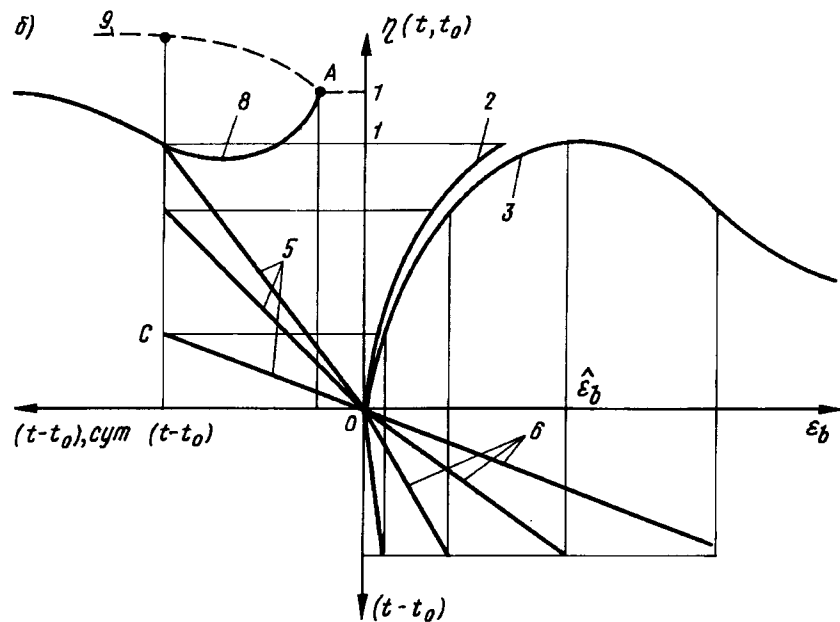
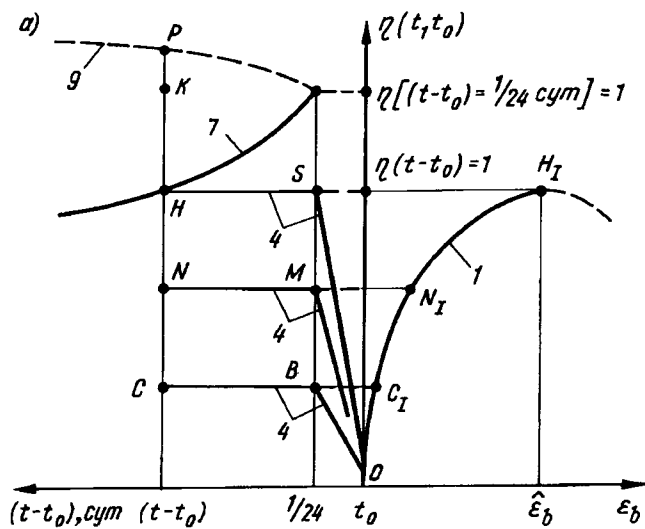


Рис. 4.1. Построение диаграмм-изохрон а - 1 - для жестких режимов нагружения; б - 2, 3 - для мягких режимов нагружения; 4-6 - режим нагружения; 7, 8 - долговременная прочность; 9 - изменение прочности во времени

Построение диаграммы-изохроны можно проиллюстрировать на примере. Представим однотипные бетонные образцы, которые загружаются по жесткой схеме. На рис. 4.1, а выделены три таких образца: один загружается по схеме *OBC*, другой *OMN*, третий *OSH* (все они еще обозначены 4). Замеряются деформации в точках *S*, *N*, *H* и откладываются справа, образуя точки *S_I*, *N_I*, *H_I*. Кривая, проведенная через эти точки, и будет представлять диаграмму-изохрону, отвечающую фиксированному времени $(t-t_0)$. Изменив t , приходим к новой изохроне. В итоге получим веер кривых.

Диаграммы-изохроны можно строить двумя путями — на основе прямых экспериментов, испытывая образцы по схемам 4 или 5 (см. рис. 4.1, а, б), или используя унифицированные (нормированные) меры ползучести [121, 139, 142] в сочетании с решениями в квадратурах некоторых нелинейных уравнений теории ползучести. Второй (теоретический) путь здесь является основным, а второй (экспериментальный) выступает как проверочный.

Следует указать, что в механике идея построения диаграмм-изохрон для жесткого режима известна уже давно (см., например, монографию Ю.Н. Работнова [145]). Применительно к бетону они, видимо, впервые были применены П.И. Васильевым [28], затем также рассматривались В.М. Бондаренко [26]. Имеются другие предложения по построению диаграмм, учитывающих ползучесть, но без трактовки их как диаграмм-изохрон (например, Ю.П. Гущи, Л.Л. Лемьша и других, частично они указаны в обзорах [74, 78]). В работах [74, 78] рассмотрено построение диаграмм-изохрон для жесткого и мягкого режима нагружения по результатам испытания бетонных образцов с различными скоростями роста напряжений (из опытов М.С. Боришанского и Раша [206]). Изохроны, построенные по этим данным, приведены на рис. 4.2.

В работе [76], которой мы здесь следуем (авторы: Н.И. Карпенко, И.Е. Прокопович, Т.А. Мухамедиев, А.Н. Петров и А.Ф. Яременко), идея диаграмм-изохрон получила теоретическое обоснование и доведение до вида, пригодного для широких практических расчетов. Повидимому, это единственный подход, который может приводить к довольно точным согласованиям результатов расчетов с данными опытов. В частности, расчет деформаций тесно увязывается с долговременной прочностью и разрушением элемента на нисходящей ветви диаграммы.

Указанные выше подходы относятся к простым режимам нагрузки и не охватывают разгрузки и ее комбинации с разгрузкой. Покажем также, что этот недостаток можно устранить, конструируя два типа изохрон.

Вершины диаграмм-изохрон (кривые долговременной прочности). Результаты многочисленных экспериментов, проведенных различными авторами, показали, что длительное загрузеение бетона сжимающими напряжениями высокого уровня приводит к снижению

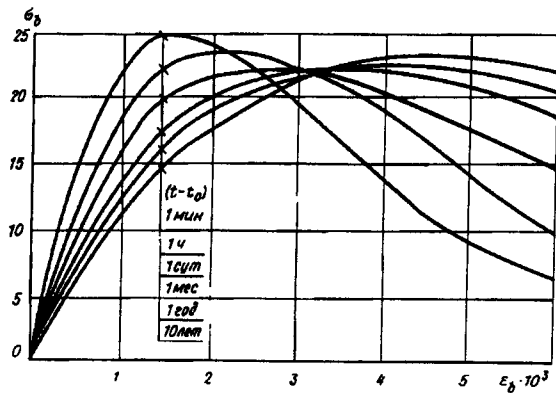


Рис. 4.2. Диаграммы-изохроны деформирования бетона при осевом сжатии (с регулированием скоростей роста деформаций по линиям б рис. 4.1 б)

прочности [37, 117, 171]. Как правило, такие эксперименты проводились с режимами жесткого нагружения на образцах из зрелого бетона. В этом случае кривая длительного сопротивления, после короткого отрезка интенсивного снижения прочности стабилизируется на некотором уровне начальной прочности $R_b(t_0)$, который, по данным разных авторов, изменяется от 0,75 до 0,9 и в среднем составляет 0,85. Соответствующая кривая $R_b(t, t_0)$ показана на рис. 4.1, а (линия 7).

Мягкий режим загрузки образцов оказывает значительное влияние на кривую длительной прочности, на которой в этом случае можно выделить два участка. Для режимов нагружения малой продолжительности наблюдается, как показывают, например, опыты [206] с постоянными скоростями роста деформаций, интенсивное снижение прочности так же, как и в случае жестких режимов нагружения. При загрузении бетона в течение длительного времени $t-t_0$, вид кривой зависит от возраста бетона в момент загрузки и условий твердения.

Если бетон загружен в молодом возрасте и условия внешней среды способствуют набору прочности (при твердении в воде, влажном грунте и при влажности окружающей среды выше 75%), то после некоторого снижения наблюдается рост длительного сопротивления. Соответствующая кривая $R_b(t, t_0)$ показана на рис. 4.1, б (линия 8). Если же бетон загружен в зрелом возрасте $t_0 > 1$ года или условия среды неблагоприятны для набора прочности, длительное сопротивление сопровождается снижением предела прочности. Возможные отступления от этих схем укажем в конце рассмотрения изохрон.

Несмотря на многообразие факторов, влияющих на кривую длительного сопротивления бетона, ее можно аппроксимировать единой зависимостью

$$R_b(t, t_0) = R_b(t_0) \left\{ [0,95 - 1,57 \cdot 10^{-2} \ln(t - t_0)] \gamma_t + \frac{\bar{\gamma}_{b2} (1 - \gamma_t)}{1 - (1 - \bar{\gamma}_{b2}) e^{-4\gamma_1(t - t_0)}} \right\}, \quad (4.1)$$

где для мягкого режима нагружения:

$$\gamma_t = \frac{1}{1 + e^{1,5(t - t_0)/t_1 - 4,5}}; \quad (4.2)$$

$$t_1 = 365 [1 - e^{-8 \cdot 10^4 t_0}];$$

для жесткого режима нагружения $\gamma_t = 1$. Кроме того, при $t-t_0 > 365$ сут принимается $t-t_0 = 365$ сут.

Коэффициент $\bar{\gamma}_{b2}$ учитывает влияние на длительное сопротивление возраста бетона и условий твердения. Если условия эксплуатации благоприятны для нарастания прочности, то принимается

$$\gamma_{b2} = 0,85 + 2,39 e^{-0,16t} + 0,178 e^{-0,015t_0}.$$

При $t_0 = 28$ сут $\bar{\gamma}_{b2} = \gamma_{b2} = 1$, где γ_{b2} — коэффициент условий работы бетона по СНиП 2.03.01-84, учитывающий длительность действия нагрузки при аналогичных (благоприятных) условиях твердения. Если $t_0 < 28$ сут, то $\gamma_{b2} > 1$. Коэффициенты формулы подобраны таким образом, чтобы она корреспондировалась с кривой роста прочности незагруженного бетона при благоприятных условиях твердения типа [151]

$$R_b(t_0) = R_{b(28)} \frac{\lg(t_0)}{\lg(28)}, \quad (4.3)$$

где t_0 — возраст бетона, сут (время твердения).

Формула (4.3) справедлива для $t_0 > 7$ сут (для $R_{b(28)} = R_b$ или $R_{b,ser}$; см. табл. 12 СНиП 2.03.01-84). Может быть использована также формула Е.Н. Щербакова

$$R_b(t_0) = R_{b(28)} \left[1 + \frac{23}{55 + B} \left(\frac{t_0 - 28}{t_0 + 11} \right) \right], \quad (4.4)$$

[где B — класс бетона в возрасте 28 сут].

Эта формула, как и формула (4.4), справедлива при внешней среде, благоприятной для нарастания прочности бетона, в противном случае $R_b(t_0) = R_{b(28)}$. В остальных случаях принимается

$$\gamma_{b2} = 0,85 + 1,44 e^{-0,12t_0}.$$

При $t_0 = 28$ сут $\bar{\gamma}_{b2} = \gamma_{b2} = 0,9$, где γ_{b2} — коэффициент условий работы бетона по СНиП 2.03.01-84, учитывающий длительность действия нагрузки при условиях твердения, неблагоприятных для набора прочности.

Диаграммы-изохроны. Аналитическая запись диаграмм-изохрон подобна аналогичной записи диаграмм кратковременного деформирования бетона, которые рассмотрены в гл. 3 (см. п.3.1). В случае сжатия диаграмма-изохрона «конструируется» таким образом, чтобы при времени нагружения $t-t_0 = 1$ ч изохроны переходили в эталонные диаграммы деформирования бетона, получаемые на стандартных элементах, испытываемых с постоянной скоростью роста деформаций 2% в 1 ч или с постоянной скоростью роста напряжений с общим временем нагружения до вершины 1 ч, когда исключается нисходящая ветвь диаграммы и деформации в вершине уменьшаются на 10%.

Диаграммы-изохроны для любого времени t ($5 \text{ мин} < t-t_0 < \infty$) могут быть представлены по аналогии с зависимостью (3.1) в виде

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t, t_0) \nu_b(t, t_0)}, \quad (4.5)$$

где значения $\nu_b(t, t_0)$ могут вычисляться по формулам (3.2)–(3.5), заменяя входящие в них величины $\hat{\nu}_b, \nu_0$ и уровень η величинами $\hat{\nu}_b(t, t_0), \nu_0(t, t_0)$, которые исследованы ниже, и уровнем $\eta(t, t_0)$,

$$\eta(t, t_0) = \frac{\sigma_b(t)}{R_b(t, t_0)};$$

кроме того, здесь $\nu_0(t, t_0) \leq 1$ (в гл. 3 $\nu_0 = 1$).

Заметим, что входящий в формулу (4.5) модуль деформации $E_b(t, t_0)$ может вычисляться по-разному: $E_b(t, t_0)$ заменяется на $E_b(t_0)$ — модуль деформации в начале нагружения; $E_b(t, t_0)$ заменяется на $E_b(t)$ — модуль деформации, соответствующий времени t , для которого строится изохрона; $E_b(t, t_0)$ заменяется на усредненный модуль деформации в интервале $(t-t_0)$ действия напряжений. Принятие того или иного способа зависит от используемой меры и упрощений в построениях. Используем первый (в построениях диаграмм-изохрон жесткого нагружения) и второй способ задания модулей.

Жесткий режим нагружения. Установим вначале функции $\nu_b(t, t_0)$ и $\nu_0(t, t_0)$ применительно к жесткому режиму нагружения. Пусть в момент времени t_0 к однотипным образцам прикладываются ступени напряжений $\sigma(t_0)$, которые затем во времени выдерживаются без изменения. Деформации таких образцов к моменту времени t будут

$$\epsilon_b(t) = \sigma_b(t_0) \left[\frac{1}{E_b(t_0) \nu_b} + f_c C(t, t_0) \right] = \quad (4.6)$$

$$= \frac{\sigma_b(t_0)}{E_b} \left[\frac{\alpha_E(t_0)}{\nu_b} + f_c \varphi(t, t_0) \right],$$

где $E_b = E_{b(28)}$ — модуль упругости бетона, соответствующий $t_0 = 28$ сут (определяется по табл. 18 СНиП 2.03.01.—84); E_b еще обозначается E_b^0 ; $\alpha_E(t_0) = E_b/E_b(t_0)$; f_c — функция нелинейности; $C(t_0, t)$ — мера линейной ползучести; $\varphi(t, t_0)$ —

характеристика ползучести, $\varphi(t, t_0) = E_b C(t, t_0)$; $f_c C(t-t_0)$ — общая мера линейных и нелинейных деформаций ползучести;

$$C(t, \tau, \sigma) = f_c C(t, \tau) = E_b^0 f_c \varphi(t, \tau). \quad (4.7)$$

(в общем выражении t_0 заменяется на τ , см. ниже).

Заметим, что представленная связь между линейной и общей мерой ползучести нашла обоснование во многих работах, например в [142], однако в других, например в [120], она подвергается критике. Там же предложены иные конструкции общей меры.

Для описания характеристики ползучести $\varphi(t, t_0)$ стареющего бетона ($t_0 > 7$ сут) использовалось традиционное выражение

$$\varphi(t, t_0) = \varphi f(t-t_0), \quad (4.8)$$

где $f(t-t_0)$ — функция, учитывающая развитие деформаций ползучести во времени, принималась по предложению И.Е. Прокоповича в виде

$$f(t-t_0) = 1 - De^{-a \gamma(t-t_0)} - Be^{\gamma(t-t_0)}; \quad (4.9)$$

$\varphi = \varphi(t = \infty, t_0)$ — предельная (при $t = \infty$) характеристика линейной ползучести, зависящая от возраста и класса бетона, влажности среды и условий влагообмена со средой.

$$\varphi = \varphi^N \xi_1 \xi_2 (0,5 + de^{-2\gamma t_0}). \quad (4.10)$$

Значения φ^N, ξ_1, ξ_2 , а также d и γ , назначаются по табл. 4.1 и 4.2; $B = 0,8$; $a = 0,6$; $D = 0,2$; таблицы и коэффициенты заимствованы из Пособия по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций [139] (далее называем Пособие); они подготовлены

Таблица 4.1

Параметры	Факторы влияния							
	Класс бетона							
	B12,5	B15	B20	B30	B40	B50	B60	
φ^N	Тяжелый бетон	3,34	3,29	3,10	2,73	2,41	1,95	1,56
	Мелкозернистый бетон	3,26	3,00	2,82	2,44	2,14	1,70	1,38
ν_c		2,24	1,87	1,41	0,97	0,74	0,74	0,74
	Модуль открытой поверхности $M_0, \text{ м}^{-1}$ элемента							
	10 и менее		20	30	40 и более			
$\gamma_1, \text{ сут}^{-1}$		0,04		0,006	0,008	0,010		
	$t_0 = 7$ сут	0,752		0,842	0,942	1,052		
d	$t_0 \geq 28$ сут	0,625		0,700	0,785	0,875		

Таблица 4.2

Параметры	Факторы влияния						
	Относительная влажность среды, %						
$\varphi_{int}, \%$	40 и менее	50	60	70	80	90	100
ξ_1	1,27	1,13	1,00	0,87	0,73	0,60	0,47
	Модуль открытой поверхности $M_0, м^{-1}$ элемента						
M_0	0	5	10	20	30	40	60 и более
ξ_1	0,51	0,65	0,76	0,93	1,00	1,22	1,27
ξ_2	0,89	0,89	0,89	1,00	1,13	1,27	1,27

И.Е. Прокоповичем и М.М. Заставой на основании обобщения исследований [18, 121, 142 и др.], в которых представлены результаты обработки большого массива опытных данных. Функция (4.9), однако, не позволяет описать диаграммы-изохроны в малых промежутках времени $(t - t_0)$, особенно при $(t - t_0) < 1$ сут, поскольку приближенно учитывает развитие быстросотекающих деформаций ползучести. Далее, в связи с этим она уточняется.

Зависимость (4.10) конструируется по определенной схеме. Группа сомножителей $(\varphi^N; \xi_1; \xi_2)$ представляет предельную функцию φ для бетонов, нагружаемых в возрасте $t_0 = 28$ сут. φ^N ξ_1 $\xi_2 = \varphi(t = \infty; t_0 = 28 \text{ сут})$, причем φ^N — предельная функция для бетонов, находящихся в эталонных условиях; ξ_1, ξ_2 — коэффициенты, учитывающие влияние влажности среды и условий влагообмена со средой. Если бетон нагружается в другом возрасте, чем $t_0 = 28$ сут, то в связи со старением функция φ изменяется. Сомножитель $(0,5 + de^{\gamma_1} = \Omega(t_0))$ учитывает влияния старения на предельную характеристику

Аналогично конструируется и линейная мера ползучести

$$C(t, \tau) = C(t = \sim, \tau = 28) \Omega(t_0) f(t - \tau), \quad (4.11)$$

где

$$C(t = \sim, \tau = 28) = \varphi^N \xi_1 \xi_2 / E_b.$$

Заметим, что значения φ^N , приведенные в табл. 4.1, относятся к подвижности бетонной смеси 4–6 см. Для бетонов, имеющих осадку конуса 1–2 см и жесткость 10–15 с, табличные значения φ^N умножаются на 0,8–0,9. Для бетонов, изготовленных на шлакопортландцементе, табличные значения надо умножить на 1,15, на пуццолановом портландцементе — на 1,35; для бетонов, изготовленных на крупном заполнителе из известняка, — на 0,85.

Для описания функции нелинейности использовалось выражение [16, 26, 142]

$$f_c = 1 + v_c \eta^4(t_0),$$

которое было преобразовано к виду

$$f_c = 1 + v_c \gamma_{b2}^4 \eta^4(t, t_0) \approx 1 + k v_c \eta^4(t, t_0), \quad (4.12)$$

где $k = \gamma_{b2}^4$;

$$\eta(t, t_0) = \eta(t_0) \tilde{\gamma}_{b2};$$

$$\tilde{\gamma}_{b2} = R_b(t, t_0) / R_b(t_0),$$

v_c — назначаются по табл. 4.1.

Учитывая, что основное количество экспериментальных данных обрабатывалось при $\gamma_{b2} \approx 0,9$, приближенно принимали $\gamma_{b2}^4 \approx k = 0,65$; значения v_c , которые указаны в работе [142], здесь уменьшены в 2,72 раза, в связи с введением новых уровней напряжений $\eta(t, t_0)$. Приравнивая деформации, полученные по формулам (4.5) и (4.7),

$$\nu_b(t, t_0) = \frac{\nu_b a_E(t_0)}{a_E(t_0) + \nu_b f_c \varphi(t, t_0)}. \quad (4.13)$$

В начале диаграммы $\nu_b = 1$; $f_c = 1$; в вершине диаграммы $\nu_b = \hat{\nu}_b$; $f_c = 1 + k v_c$. Учитывая это, из формулы (4.13) получим для восходящей ветви

$$\nu_0(t, t_0) = \frac{a_E(t_0)}{a_E(t_0) + \varphi(t, t_0)}; \quad (4.14)$$

$$\hat{\nu}_b(t, t_0) = \frac{\hat{\nu}_b a_E(t_0)}{a_E(t_0) + \hat{\nu}_b (1 + k v_c) \varphi(t, t_0)}. \quad (4.15)$$

Заметим, что зависимость (4.13) можно использовать двояким способом: непосредственно вычисляя $\nu_b(t, t_0)$ для изохран (4.5); определяя только граничные значения $\nu_0(t, t_0)$ и $\hat{\nu}_b(t, t_0)$. Тогда как сами выражения для $\nu_b(t, t_0)$ принимаются в виде (3.2). Здесь мы отдаем предпочтение второму подходу. Он позволяет описать все виды диаграмм единообразно, кроме этого создается возможность несколько уточнить сами параметры $\nu_b(t, t_0)$, учитывая неточность функций f_c .

Анализ экспериментов, выполненный Н.И. Карпенко и А.В. Мельником, показал, что лучшее согласование с данными экспериментов достигается, если функцию нелинейности принимать в виде

$$f_c = 1 + k v_c \frac{\eta^4(t, t_0)}{\sqrt{1 - 0,8 e^{-\gamma_1(t - t_0)}}}, \quad (4.16)$$

несколько уточнив зависимость Е.Н. Щербакова [121]. Однако и в виде (4.16) функция f_c еще требует уточнения. В диаграммах-изохронах используется f_c при $\eta(t, t_0) = 1$.

При $t_0 < 28$ сут модуль упругости $E_b(t_0)$ вычислялся по известной формуле

$$E_b(t_0) = \frac{52000 R_{bn}(t_0)}{R_0 + R_{bn}(t_0)}, \quad (4.17)$$

здесь $R_0 = 14$ МПа; если вместо $R_{bn}(t_0)$ вводятся средние значения призмочной прочности $R_b(t_0)$, то $R_0 = 18$ МПа.

Если $t_0 \geq 28$ сут, то принимали $E_b(t_0) = E_b(28) = E_b$; в этом случае $\alpha_E(t_0) \approx 1$.

Ниспадающая ветвь в случае жесткого режима нагружения возможна лишь в том случае, если вблизи вершины происходит регулирование (искусственное или естественное) скорости приложения напряжений с отклонением от жесткого режима. Ниспадающая ветвь описывается формулами (3.5), где в формуле для ω_1 слагаемое $1,95 \hat{\nu}_b$, заменяется на слагаемое $1,95 \hat{\nu}_b(t, t_0) / \nu_0(t, t_0)$. Эта рекомендация по описанию ниспадающей ветви является приближенной, она исходит из условия подобия нисходящих ветвей диаграмм-изохрон.

На рис. 4.3 приведены диаграммы, построенные для тяжелого бетона класса В40 со следующими характеристиками: $E_b = E_b(t_0) = 36000$ МПа; $\alpha_E(t_0) = 1$; $R_b(t_0) = 29$ МПа; $\varphi = 2,41$; $d = 0,785$; $\gamma_1 = 0,08$ сут⁻¹; $\nu_c = 0,45$; $\gamma_{b2} = 0,9$; $t_0 = 28$ сут. Кривая 1 соответствует эталонному времени загрузки, кривая 2 построена для случая $t \rightarrow \infty$.

Мягкий режим нагружения. Для определения параметров $\hat{\nu}_b(t, t_0)$ и $\nu_0(t, t_0)$ диаграмм-изохрон мягких режимов нагружения используем уравнение нелинейной теории ползучести [26] в виде

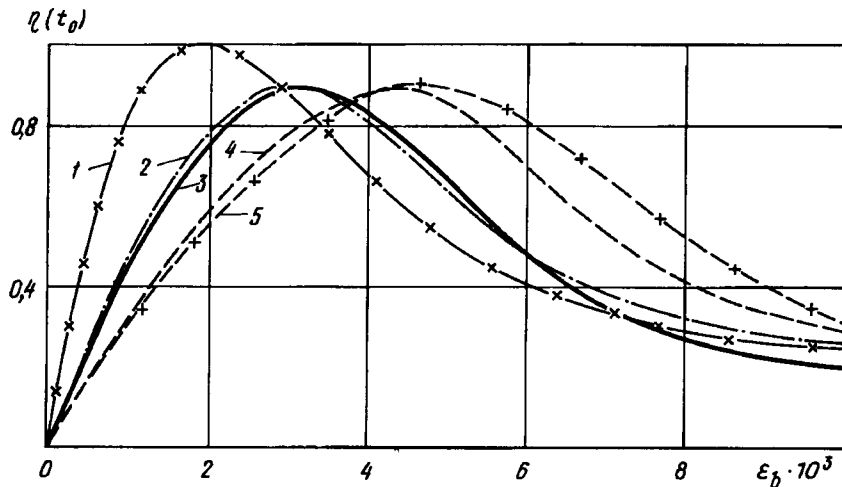


Рис. 4.3. Диаграммы-изохроны при сжатии: 1 — эталонная диаграмма; 2, 3 — изохроны мягкого нагружения; 4, 5 — изохроны жесткого нагружения

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{\bar{E}_b} \left[\frac{1}{\nu_b} - \int_{t_0}^t \frac{\sigma_b(\tau)}{\sigma_b(t)} \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \nu_c \int_{t_0}^t \frac{\sigma_b(\tau)}{\sigma_b(t)} \eta^a(\tau) \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right], \quad (4.18)$$

где \bar{E}_b — усредненный модуль упругости бетона на отрезке $(t - t_0)$.

В квадратных скобках уравнения (4.18) второй член [ниже он обозначен как $\varphi_1(t, t_0)$] учитывает влияние линейной составляющей деформации ползучести, а третий [он ниже обозначен $\varphi_n(t, t_0)$] — нелинейной. Коэффициент ν_b принимается на основании эталонной диаграммы, зависит только от уровня напряжений $\sigma_b(t)$ и не зависит от режима нагружения. Функция $\varphi(t, \tau)$ записывается в виде (4.9), где t_0 заменяется на τ , ее производная

$$\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} = \varphi_1 [-Dca \gamma_1 e^{-a \gamma_1 (t - \tau)} - Bc \gamma_1 e^{-\gamma_1 (t - \tau)} -$$

$$- 2 \gamma_1 d e^{-2 \gamma_1 \tau} - D \gamma_1 (a - 2) d e^{-a \gamma_1 \tau + \gamma_1 (a - 2)} + B d \gamma_1 e^{-\gamma_1 (t + \tau)}]$$

где $\varphi_1 = \varphi^a \xi_1 \xi_2$, $c = 0,5$

Если напряжения в бетоне возрастают с постоянной скоростью

$$\sigma_b(\tau) = \frac{\tau - t_0}{t - t_0} \sigma_b(t), \quad (4.20)$$

как, например, в случае возведения здания, то линейная составляющая $\varphi_1(t, t_0)$ определяется с помощью зависимости

$$\varphi_1(t, t_0) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\varphi_1}{t - t_0} \left\{ c \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{D}{a} + B \right) - (B + D)(t - t_0) \right] - \right.$$

$$- \frac{Dc}{a \gamma_1} e^{-a \gamma_1 (t - t_0)} - \frac{Bc}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (t - t_0)} +$$

$$+ d \left[(t - t_0 + \frac{1}{2 \gamma_1} - D(t - t_0 - \frac{1}{\gamma_1 (a - 2)})) - \right.$$

$$\left. - B(t - t_0 + \frac{1}{\gamma_1}) \right] e^{-2 \gamma_1 t} - \frac{d}{2 \gamma_1} e^{-2 \gamma_1 t_0} +$$

$$+ \left. \frac{Dd}{\gamma_1 (a-2)} e^{-a_1 \gamma_1 t + (a-2) \gamma_1 t_0} + \frac{Bd}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (t+t_0)} \right\}$$

Анализ опытов [206] и некоторых других показал, что зависимость (4.19) можно распространить на отрезки времени $t-t_0 \leq 1$ сут, если принять в формуле (4.10) для $f(t-t_0)$ $D = 0,2$; $a = 400$. Соответствующая кривая 2 изменения функции (4.19) во времени при $t_0 = 28$ сут приведена на рис. 4.4. Пунктиром показана кривая 3, принятая в пособии [139]. Она записывается более простой формулой по сравнению с выражением (4.21),

$$\varphi_l(t, t_0) = 0,5 \varphi [1 + e^{-2 \gamma_c (t-t_0)}] x \quad (4.22)$$

$$x [1 - 0,8 e^{-\gamma_c (t-t_0)}] \Delta(t, t_0),$$

где $\bar{t} = t$ (в данном случае); $t_0 = 28$ сут; если $t-t_0 \geq 1$ сут, то $\Delta(t, t_0) = 1$; если $0 \leq t-t_0 \leq 1$ сут, то $\Delta(t, t_0) = 1 + 0,315 \ln(t-t_0)$. (4.23)

Множитель $\Delta(t, t_0)$ учитывает влияние быстроснатекающей ползучести. Изохроны, построенные с использованием формул (4.20) и (4.22), показаны на рис. 4.3 линиями 4 и 5.

Наибольшее отклонение между кривыми 4 и 5 составляет 7%. Нелинейную функцию $\varphi_n(t, t_0)$ определим, полагая на отрезке $t-t_0$ некоторым приближением

$$\eta(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \approx \frac{\sigma(\tau)}{R[0,5(t+t_0)]} = 0,95 \frac{\sigma(\tau)}{R(t, t_0)} = \quad (4.24)$$

$$= 0,95 \frac{\sigma(t)}{R(t, t_0)} \frac{(\tau-t_0)}{(t-t_0)} = 0,95 \eta(t, t_0) \frac{\tau-t_0}{t-t_0};$$

тогда

$$\varphi_n(t, t_0) = - \frac{0,8 \nu_c \eta^4(t, t_0)}{(t-t_0)^5} \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^5 \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.25)$$

Заметим, что упрощенные зависимости (4.24) можно не вводить, если разделить интервал интегрирования $(t-t_0)$ на отдельные малые подынтервалы, принимая в пределах подынтервалов осредненные значения $\eta(\tau)$.

Подставим в формулу (4.25) значение производной (4.19) и выполним интегрирование по частям — для каждого слагаемого

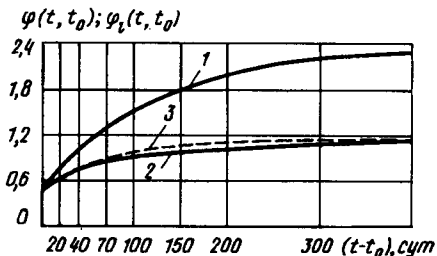


Рис. 4.4. Изменение во времени характеристик ползучести бетона класса В40 1 — жесткий режим; 2 — 3 — мягкий режим

формулы (4.19) в отдельности, используя при этом унифицированную процедуру

$$\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^n A e^{st+pt} d\tau = (\tau-t_0)^n A p^{-1} e^{st+pt} - n(\tau-t_0)^{n-1} (A/p^2) e^{st+pt} + n(n-1)(\tau-t_0)^{n-2} x (A/p^3) e^{st+pt} - n(n-1)(n-2)(\tau-t_0)^{n-3} (A/p^4) e^{st+pt} + n(n-1)(n-2)(n-3)(\tau-t_0)^{n-4} (A/p^5) e^{st+pt} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) (A/p^6) e^{st+pt} \Big|_{t_0}^t, \quad (4.26)$$

где $n = 5$ (как в нашем случае), хотя формула (4.26), может быть по аналогии записана для любого n ; A, s, p — константы.

Полученные аналитические выражения функций $\varphi_l(t, t_0)$ и $\varphi_n(t, t_0)$ были использованы при проведении численных экспериментов с целью поиска более простых аппроксимаций. Было установлено, что приемлемые результаты можно получить, полагая

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b} \left\{ \frac{1}{\nu_b} + [1 + k \nu_c \eta^4(t, t_0)] \varphi_l(t, t_0) \right\} \quad (4.27)$$

здесь значения $\varphi_l(t, t_0)$ вычисляются по формуле (4.22) приближенно

$$k = [0,74 + 0,26 (t_0/t)^2]^4.$$

Приравнявая деформации, получаемые по формулам (4.5) и (4.27) при $\dot{\eta}(t, t_0) = 0$ и $\eta(t, t_0) = 1$, находим параметры $\nu_b(t, t_0)$, $\nu_c(t, t_0)$, соответствующие мягкому режиму нагружения. Эти параметры будут определяться по формулам (4.14), (4.15), где вместо $\varphi(t, t_0)$ следует вводить значения $\varphi_l(t, t_0)$, определяемые по формуле (4.22). Следует заметить, что формулы (4.14), (4.15) с функцией $\varphi(t, t_0) = \varphi_l(t, t_0)$ могут использоваться и для жесткого режима нагружения, полагая в формуле (4.22) $\bar{t} = t_0$ (рис. 4.3) (это унифицированная запись принята в Пособии).

Заметим, что внося в (4.8) $\varphi(t, t_0) = \varphi_l(t, t_0)$ из формулы (4.22) при $\bar{t} = t_0$ и f_c из (4.16), придем к уточненной конструкции общей меры ползучести $C(t, t_0)$. Средний модуль $E_b = E_b[0,5(t+t_0)]$, тогда

$$\alpha_E(t_0) = \alpha_E(\bar{t}) = E_b[0,5(t+t_0)]/E_b.$$

Восходящие ветви диаграмм-изохрон 2 и 3, 4 и 5, приведенные на рис. 4.3, достаточно близки между собой, наибольшее отклонение составляет 7%. Расхождение нисходящих ветвей этих диаграмм, особенно диаграмм 2 и 3, больше. Отметим в этой связи, что положение вершин диаграмм-изохрон и их восходящих ветвей имеет достаточное экспериментальное обоснование, поскольку для их построения использованы рекомендации по определению характеристик ползучести и функций нелинейности [142], кроме этого они сопоставлялись с результатами прямых экспериментов И. И. Темнова (рис. 4.5). Однако нисходящие участки диаграммы требуют уточнения.

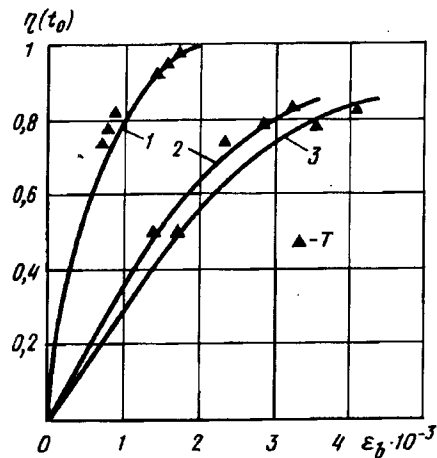


Рис. 4.5. Диаграммы-изохроны для бетона класса В40 1 — эталонная диаграмма; 2 — изохрона ($t - t_0 = 140$ сут; 3 — ($t - t_0 = 700$ сут; $t_0 = 28$ сут; T — опытные точки

Приведенные формулы и диаграммы можно достаточно просто использовать при расчете стержней и стержневых систем. При рассмотрении плосконапряженных элементов железобетонных конструкций следует учитывать эффект уменьшения деформаций ползучести бетона при двухосном сжатии, выявленный на основании анализа экспериментальных данных. Это явление можно учесть, заменяя в формулах (4.15) и (4.16) характеристики ползучести (t, t_0) на ${}_2(t, t_0)$ (по предложению А.Ф. Яременко)

$$\varphi_2(t, t_0) = \left[1 - 0,23 \xi_3 \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)} \right] \varphi(t, t_0), \quad (4.28)$$

где $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ — значения главных напряжений, а значения коэффициента ξ_3 принимаются в зависимости от модуля открытой поверхности образца (см. табл. 4.2).

В случае трехосного неравномерного сжатия формулы методики диаграмм-изохрон претерпевают существенные изменения.

Остановимся еще на одном вопросе. Кривая длительной прочности $R_b(t, t_0)$ реально характеризует лишь прочность образцов, которые нагружаются длительно действующими напряжениями высокого уровня (выше или равными $R_b(t, t_0)$). Если к заданному моменту времени t напряжения в элементе будут ниже $R_b(t, t_0)$, например они будут соответствовать напряжениям в точке С на рис. 4.1, то реальная прочность элемента в данный момент времени t может быть выше длительной прочности. Этот фактор можно выявить, догружая элемент в данный момент времени t кратковременной нагрузкой до разрушения.

Факт повышения прочности объясняется тем, что в элементе проявляют себя два процесса, разрушительный, который связан с развитием деструкции в бетоне (он преобладает при высоких уровнях

напряжений), и созидательный, связанный с набором (ростом) прочности образцов по времени. Вторым процессом характеризуют кривой роста прочности бетона во времени $R_b^*(t)$ (см. пунктирные линии 9 на рис. 4.1).

Для построения такой кривой изготавливают одновременно n серий однотипных образцов, которые хранят в ненагруженном состоянии в одинаковых температурно-влажностных условиях и периодически, через определенные интервалы времени, испытывают до разрушения однотипными кратковременными нагрузками. Кривая $R_b^*(t)$ может быть описана зависимостью, представленной в рекомендациях [142], или зависимостью типа (4.4). Заметим, что если указанные n серий образцов предварительно нагружать напряжениями, а затем хранить в нагруженном состоянии, то, по данным некоторых исследователей, прочность образцов при кратковременных периодических догрузках до разрушения может быть больше прочности $R_b^*(t)$; этот фактор можно учесть, корректируя $R_b^*(t)$.

Догружая элемент в точке С до разрушения, приходим к разрушению в точке К, которая расположена между точками Р и Н (см. рис. 4.1, а). Обозначим

$$\Delta R_b^*(t, t_0) = R_b^*(t) - R_b(t, t_0).$$

Реальные прочности образцов в момент времени t , которые предварительно были нагружены в возрасте t_0 по жестким или мягким режимам, можно вычислять, используя интерполяционную зависимость вида

$$R_b^*(t, t_0) = R_b(t, t_0) + \Delta R_b^*(t, t_0) [1 - \eta^s(t, t_0)] + \Delta R_b^*(t, t_0) [1 - \eta(t, t_0)] a \eta(t, t_0) \quad (4.29)$$

где $s \approx 4$; $a \approx 0,5$; $\eta(t, t_0)$ — уровень напряжений по отношению к длительной прочности, определяемый по формуле (4.5').

Действительный уровень напряжений

$$\eta^*(t, t_0) = \frac{\sigma}{R_b^*(t, t_0)}.$$

Этот уровень может быть использован для уточнения представленных выше зависимостей. Формулу (4.29) можно использовать для определения прочности образцов при догрузках (при режимах длительного нагружения с последующей кратковременной догрузкой).

Заметим еще, что в практических расчетах и нормах могут найти применение граничные диаграммы-изохроны, соответствующие $t = -\infty$, они следуют из представленных выше зависимостей. В этом случае в зависимостях (3.1), (3.2) следует заменить ν_0 на $\nu_0(\infty, t_0)$ и ν_b на $\hat{\nu}_b(\infty, t_0)$:

$$\nu_0(\infty, t_0) = \frac{1}{1 + \varphi\beta};$$

$$\hat{\nu}_b(\infty, t_0) = \frac{\hat{\nu}_b}{1 + \hat{\nu}_b(1 + k\nu_c)\beta\varphi}, \quad (4.30)$$

где для жесткого режима: $k = 0,65$; $\beta = 1$; для мягкого: $k = 0,74$; $\beta = 0,5$. Кроме того, η заменяется на $\eta(t, t_0)$.

Диаграммы-изохроны разгрузки. Пусть задано несколько однотипных режимов нагружения, например три, как на рис. 4.6, а; $\tau_1 = t_0$ — время нагрузки до напряжений $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$, выдержка и полная разгрузка при $t = \tau_2$. В промежутке $\tau_2 - \tau_1$ деформациям всех элементов для любого фиксированного времени, например, t_1 , описываются одной из представленных выше диаграмм-изохрон (условно изохронной нагрузки). Однако после $t > \tau_2$, т.е. после разгрузки, указанные диаграммы становятся неприменимыми. Этот недостаток можно устранить, если ввести понятие диаграмм-изохрон разгрузки.

Заменим режимы нагружения на рис. 4.6, а суммами двух режимов: режимом нагрузки напряжениями $\sigma_{(i)}^+$ и режимом разгрузки напряжениями $\sigma_{(i)}^-$, так что $\sigma_{(i)} = \sigma_{(i)}^+ + \sigma_{(i)}^-$. Будем полагать, что к описанию деформаций ползучести применим принцип наложения воздействий в модифицированном виде. Модификация заключается в

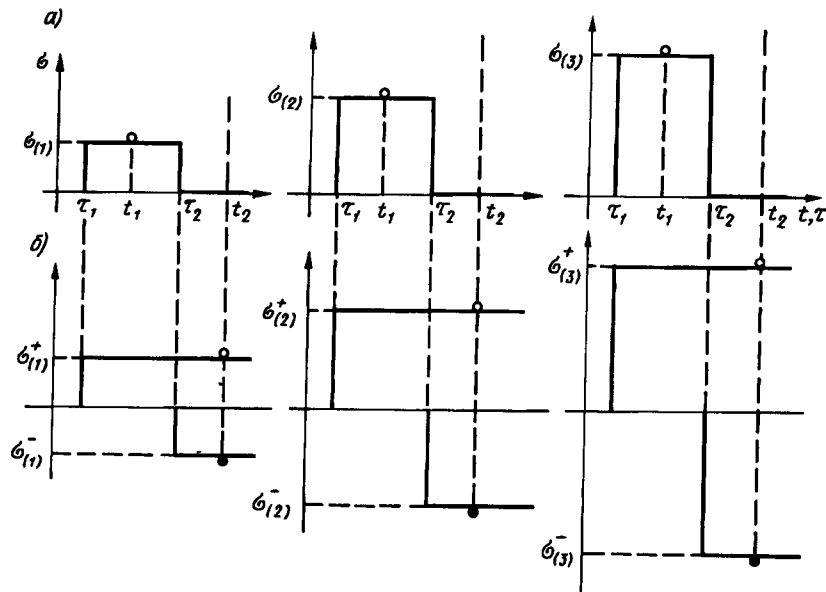


Рис. 4.6. Замена реальных режимов (а) суммами двух режимов (б)

том, что на ветви разгрузки нелинейность деформаций ползучести не учитывается (т.е. $f_c = 1$). При этих условиях деформации элементов, нагружаемых по схемам рис. 4.6, б, при $t > \tau_2$ составят

$$\epsilon_b(t) = \epsilon_b^+(t) + \epsilon_b^-(t); \quad (4.31)$$

где

$$\epsilon_b^+(t) = \frac{\sigma_b^+(i)(\tau_1)}{E_b} \left[-\frac{a_E(\tau_1)}{\bar{\nu}_b} + f_c \varphi(t, \tau_1) \right]; \quad (4.32)$$

$$\epsilon_b^-(t) = \epsilon_{b(i)}^-(t) = -\frac{\sigma_b^-(i)(\tau_2)}{E_b} \left[-\frac{a_E(\tau_2)}{\bar{\nu}_b} + \varphi(t, \tau_2) \right], \quad (4.32)$$

здесь $i = 1, 2, 3$ — номера режимов нагружения (в принципе их можно опустить); $\bar{\nu}_b$ — обозначения величин ν_b в диаграммах кратковременной нагрузки и разгрузки; верхние стрелки: $\leftarrow \rightarrow$ нагрузка, $\leftarrow \leftarrow$ разгрузка, они введены, чтобы подчеркнуть различие параметров ν_b при нагрузке и разгрузке.

Зависимости (4.32) и (4.33) можно заменить соответственно двумя видами изохрон; здесь также для общности записи индексы (i) опустим:

$$\epsilon_b^+(t) = \frac{\sigma_b^+(\tau_1)}{E_b(\tau_1) \bar{\nu}_b(t, \tau_1)}, \quad (4.34)$$

$$\epsilon_b^-(t) = \frac{\sigma_b^-(\tau_2)}{E_b(\tau_2) \bar{\nu}_b(t, \tau_2)}. \quad (4.35)$$

Приравнявая (4.34) и (4.32), (4.35) и (4.33), находим:

$$\bar{\nu}_b(t, \tau_1) = \frac{\bar{\nu}_b a_E(\tau_1)}{a_E(\tau_1) + \bar{\nu}_b f_c \varphi(t, \tau_1)}; \quad (4.36)$$

$$\bar{\nu}_b(t, \tau_2) = \frac{\bar{\nu}_b a_E(\tau_2)}{a_E(\tau_2) + \bar{\nu}_b \varphi(t, \tau_2)}. \quad (4.37)$$

Зависимости (4.34) представляют собой диаграммы-изохроны нагрузки, они полностью совпадают с рассмотренными выше диаграммами-изохронами (4.6), (4.13); здесь только величины $\sigma_b, \nu_b(t, t_0), \nu_b, t_0$ обозначены $\sigma_b^+, \bar{\nu}_b(t, t_0), \bar{\nu}_b, \tau_1$. Зависимости (4.35) назовем (по аналогии) диаграммами-изохронами разгрузки. Значения $\bar{\nu}_b$ вычисляются по формулам кратковременной разгрузки (они указаны в гл. 3, п. 3.2). По аналогии с $\nu_b(t, t_0)$ [см. пояснения к формуле (4.15)] выражение $\bar{\nu}_b(t, t_0)$ также можно использовать двояким способом. Во втором способе применяются зависимости типа (4.14) и (4.15).

Внося (4.34), (4.35) в (4.31), приходим к наложению изохрон. Отсюда говорим об использовании принципа наложения изохрон при

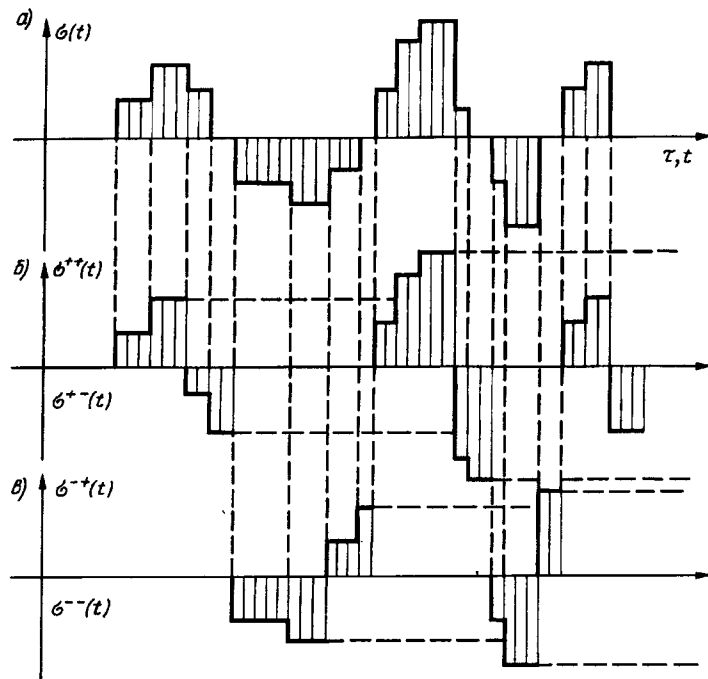


Рис. 4.7. Разделение сложного режима

определении суммарных деформаций элемента. Этот принцип можно распространить и на сложные режимы нагружения (рис. 4.7), однако при этом необходимо учесть некоторые особенности. Среди них особенности стыковки (здесь наложения) диаграмм кратковременного деформирования (см. в п. 3.2). Для учета этих особенностей реальный режим нагружения (рис. 4.7, а) необходимо разделить на четыре графика: нагружение положительными напряжениями $\sigma^{++}(t)$ и разгрузку положительных напряжений $\sigma^{+-}(t)$ (рис. 4.7, б); нагрузку отрицательными напряжениями σ^{-+} и разгрузку отрицательных напряжений $\sigma^{--}(t)$ (рис. 4.7, в). В сумме $\sigma(t) = \sum_k \sigma^k(t)$ ($k = ++; +-, --; -+$); второй знак в индексе указывает на знак напряжения $\sigma^k(t)$, например, $k = +-$ означает, что компонента $\sigma^{+-}(t)$ отрицательна. Фактически, $\sigma^k(t)$ — это приращения напряжений (см. гл. 3).

На каждом графике фиксируются максимальные уровни напряжений (горизонтальные пунктирные линии на рис. 4.7, б, в). Превышая эти уровни по модулю, переходим к иному проявлению как кратковременных деформаций, так и деформаций ползучести. На этом факторе акцентируется внимание в работах П.И. Васильева [28], А.А. Гвоздева [37, 38] и некоторых других исследователей. Вопросы описания сложных режимов нагружения с учетом физической нелинейности еще находятся в стадии разработки.

4.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ИЗОХРОН К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА В УСЛОВИЯХ ТРЕХОСНОГО СЖАТИЯ

Диаграммами-изохронами описываются ступенчатые режимы трехосного неравномерного сжатия напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, когда они прикладываются в течение непродолжительного отрезка времени, примерно в пределах 1 ч, и в последующем выдерживаются постоянными в течение времени $t-t_0$, где t_0 — возраст бетона к моменту нагружения. Такой режим нагружения, как уже указывалось, называем жестким. Обозначим относительные деформации по главным направлениям через $\epsilon_1(t, t_0), \epsilon_2(t, t_0), \epsilon_3(t, t_0)$. К диаграммам-изохронам преобразуем связи между главными напряжениями — деформациями (физические отношения), рассмотренные в гл. 3 (см. п. 3.6), в результате

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1(t, t_0) \\ \epsilon_2(t, t_0) \\ \epsilon_3(t, t_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b^0 \nu_{b3}(t, t_0)} \begin{bmatrix} 1 & -[\mu_{b12}(t, t_0)] & -[\mu_{b13}(t, t_0)] \\ -[\mu_{b12}(t, t_0)] & 1 & -[\mu_{b23}(t, t_0)] \\ -[\mu_{b13}(t, t_0)] & -[\mu_{b23}(t, t_0)] & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

где $\nu_{b3}(t, t_0)$ — коэффициент изменения текущего модуля деформации бетона в диаграмме-изохроне, построенной для времени $(t-t_0)$ по направлению действия главного нормального напряжения σ_3 ; $\mu_{bji}(t, t_0)$ — коэффициенты поперечных деформаций для времени $(t-t_0)$ по трем главным напряжениям (они принимаются различными).

Анализ представленных ниже экспериментальных результатов показал, что в качестве базовых могут быть приняты зависимости (3.97) и (3.98) по определению $\mu_{bji}(t, t_0)$ и $\nu_{b3}(t, t_0)$. Однако входящие в эти зависимости переменные, они приведены в промежутке между формулами (3.97) — (3.105), следует корректировать с целью учета натекания деформаций ползучести во времени.

Значения $\nu_{b3}(t, t_0)$ вычисляются по формуле

$$\nu_{b3}(t, t_0) = \hat{\nu}_{b3}(t, t_0) + [\nu_{03}(t, t_0) - \hat{\nu}_{b3}(t, t_0)] \times \sqrt{1 - \omega_{13} \eta_3(t, t_0) - \omega_{23} \eta_3^2(t, t_0)}, \quad (4.39)$$

причем $\omega_{13} = \omega_{13}(t, t_0), \omega_{23} = \omega_{23}(t, t_0)$.

В формуле (4.39) $\hat{\nu}_{b3}(t, t_0)$ — значение $\nu_{b3}(t, t_0)$ в вершине изохроны трехосного сжатия при достижении напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ своих предельных значений, т.е. при «выходе» на поверхность прочности.

Между значениями $\hat{\nu}_{b3}(t, t_0)$ и аналогичными значениями $\hat{\nu}_b(t, t_0)$ в вершинах диаграмм-изохрон одноосно сжимаемого образца имеется связь

$$\hat{v}_{b3}(t, t_0) = \hat{v}_b(t, t_0) \varphi_R(t, t_0), \quad (4.40)$$

где

$$\varphi_R(t, t_0) = \hat{\sigma}_3 / R_b(t, t_0), \quad (4.41)$$

$R_b(t, t_0)$ — длительная прочность бетонных образцов, нагруженных одноосным сжатием по жесткому режиму, вычисляется по формуле (4.1).

Функция $\hat{v}_b(t, t_0)$, определяется формулой (4.15), принимая $\alpha_E(t_0) \approx 1$ и $\varphi(t, t_0) = \varphi_1(t, t_0)$, где значения $\varphi_1(t, t_0)$ вычисляются по формуле (4.22) при $\bar{t}_1 = t_0$, в результате

$$\hat{v}_b(t, t_0) = \frac{\hat{v}_b}{1 + \hat{v}_b f_c \varphi(t, t_0)}. \quad (4.42)$$

В функцию $\varphi_1(t, t_0)$ входит множитель $\Delta(t, t_0)$, который можно более точно вычислить по формуле

$$\Delta(t, t_0) = \sqrt{1 + 0,314 \ln(t - t_0)} \quad (4.43)$$

(уточнение множителя вводится для более точного учета быстронатекающих деформаций ползучести).

Для функции f_c можно принимать несколько модифицированное выражение (4.16)

$$f_c = 1 + \frac{0,65 c}{\varphi_R(t_0) \sqrt{1 - 0,8 e^{-\gamma_1(t - t_0)}}}, \quad (4.44)$$

где

$$\varphi_R(t_0) = |R_b(t_0) / \hat{\sigma}_3|; \quad (4.45)$$

$\hat{\sigma}_3$ — предельное значение напряжения σ_3 ; $\hat{\sigma}_3$ определяют в предположении простого нагружения образца напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, за положительные принимаются растягивающие напряжения.

По аналогии с формулами (3.3), (3.4)

$$\omega_{13} = 2 - 2,5 \hat{v}_b(t, t_0); \quad \omega_{23} = 1 - \omega_{13}. \quad (4.46)$$

Кроме того, в формулу (4.31) входит начальный коэффициент изменения секущего модуля $\nu_{03}(t, t_0)$,

$$\nu_{03}(t, t_0) = \frac{(1 - c \sqrt[3]{\beta(t_0)}) \nu_{03}^0}{1 + \varphi(t, t_0)}$$

где

$$\beta(t_0) = |\sigma_3 / R_b(t_0)|, \quad (4.47)$$

ν_{03}^0, c — указаны в формуле (3.101), при их определении \hat{v}_{b3} заменяется на $\hat{v}_b(t, t_0)$, \hat{v}_b заменяется на $\hat{v}_b(t_0)$; $\eta_3(t, t_0)$ — уровень напряжений σ_3 в момент времени t ,

$$\eta_3(t, t_0) = \frac{\sigma_3}{R_b(t_0)} \frac{R_b(t_0)}{R_b(t, t_0)} = \eta_3(t_0) \frac{R_b(t_0)}{R_b(t, t_0)}. \quad (4.48)$$

Выдвигается предположение, что установленная в гл. 3 связь между коэффициентами поперечных деформаций μ_{bji} и коэффициентом ν_{b3} в случае кратковременного действия нагрузки может трансформироваться и на длительное действие, если соответствующие параметры будут определяться с учетом их изменения во времени, в результате

$$\mu_{bji}(t, t_0) = \hat{\mu}_{bji}(t, t_0) + [\mu_b^0 - \hat{\mu}_{bji}(t, t_0)] \times \sqrt{1 - \eta_3^2(t, t_0)}, \quad (4.49)$$

($ji = 12; 13; 23$)

где $\hat{\mu}_{bji}(t, t_0)$ — значение $\mu_{bji}(t, t_0)$ в вершине диаграмм-изохрон, причем

$$\hat{\mu}_{bji} = \mu_b^0 + (1 - \sqrt[3]{\hat{v}_{b3}(t, t_0)}) \chi_{ij} \quad (ji = 12; 13; 23) \quad (4.50)$$

где χ_{ij} — определяется по формуле (33.105) при $\varphi_R = \varphi_R(t_0)$.

Остановимся на некоторых результатах экспериментальной проверки представленных выше формул. Использовались опыты Б. Сабирова [148] и Ю.Н. Малашкина, И.М. Безгодова [117]. Характеристики опытных образцов-призм приведены в табл. 4.3 (М.Б. — образцы Б. Сабирова из мелкозернистого бетона; К.Б. — образцы из крупнозернистого бетона Ю.Н. Малашкина). Принятые для образцов характеристики функций ползучести приведены в табл. 4.4, причем значения φ^N и ν_c устанавливались по испытаниям призм на одноосное длительное сжатие.

Таблица 4.3

Вид бетона	R_b , МПа	E_b , МПа	μ_b^0	ϵ_R	Возраст, сут
М.Б.	26,6	17754	0,19	240×10^{-5}	334
К.Б.	20,0	31500	0,22	160×10^{-5}	150

Таблица 4.4

Вид бетона	φ^N	ν_c	ξ_1	ξ_2	γ_1	d
М.Б.	2,56	1,102	1,13	0,93	0,0074	0,7595
К.Б.	6,2	2,9	0,47	0,51	0,004	0,625

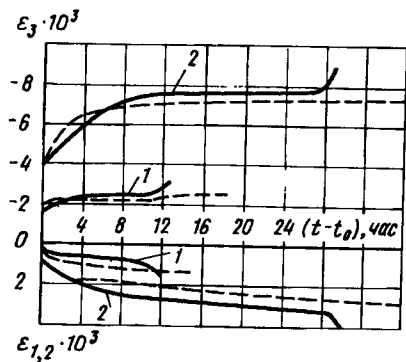


Рис. 4.8. Деформации мелкозернистого бетона при длительном одноосном (1) и трехосном (2) сжатиях (— опыт; - - - расчет)

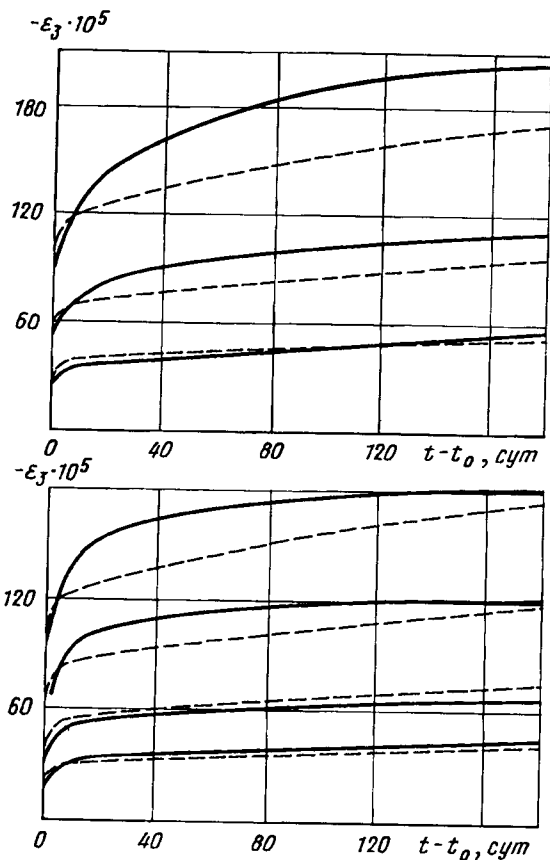


Рис. 4.9. Деформации крупнозернистого бетона при длительном одноосном (а) и трехосном (б) сжатии (— опыт; - - - расчет)

Призмы испытывались в условиях трехосного сжатия типа $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$; здесь, как и ранее, за положительные принимались напряжения растяжения, поэтому напряжение сжатия σ_3 по модулю выше напряжений σ_1 и σ_2 , т.е. $|\sigma_3| > |\sigma_1| = |\sigma_2|$. На примере образцов Б. Сабирова проверялся характер натекания быстرونатекающих деформаций ползучести. Эти образцы нагружались до уровней 0,7–0,8 от уровня кратковременной призмной прочности, выдерживались в пределах 1–1,5 сут, после чего догружались до разрушения. В опытах Ю.Н. Малашкина образцы выдерживались длительное время при некоторых средних уровнях трехосных напряжений. В различных образцах принимались неодинаковые значения боковых напряжений сжатия $\sigma_1 = \sigma_2$.

Сопоставление результатов расчета с данными опытов представлено на рис. 4.8, 4.9 (рис. 4.8: 1 — графики одноосного сжатия, 2 — графики трехосного сжатия из опытов Б. Сабирова; рис. 4.9, а — графики одноосного сжатия при уровнях $\eta(t_0) = 0,4; 0,6; 0,8$ и рис. 4.9, б — графики трехосного сжатия при уровнях $\eta_3(t_0) = 0,204; 0,306; 0,403; 0,511$ из опытов Ю.Н. Малашкина). Хотя совпадение теоретических и опытных значений деформаций можно считать удовлетворительным, тем не менее при высоких уровнях трехосного сжатия интенсивное начальное натекание деформаций ползучести происходит на большем отрезке времени, чем это дают подобранные функции. Учет этого фактора требует дополнительных исследований.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОНА СПОСОБОМ τ (ТРАНСФОРМИРОВАННОГО ВРЕМЕНИ НАГРУЖЕНИЯ)

Рассмотрим более универсальный по сравнению с изохронным способ определения деформаций ползучести бетона, ограничиваясь, однако, одноосным напряжением. Способ τ заслуживает внимания в связи с тем, что позволяет сравнительно просто рассматривать сложные режимы напряжения с учетом особенностей проявления нелинейной ползучести на ступенях разгрузки и повторной нагрузки. Кроме того, при этом отпадает необходимость в запоминании и хранении больших массивов данных об истории напряженного состояния в процессе расчетов. Это упрощает алгоритмы и программы расчет на ЭВМ. Способ τ разработан Н.И. Карпенко и А.Н. Петровым [66].

Полагаем, следуя [66], что деформации бетона состоят из двух компонент: линейной составляющей, для которой справедлив принцип наложения воздействий, и нелинейной составляющей, которая полностью необратима при разгрузке. Удельные относительные деформации бетона определяются функцией вида

$$\delta(t, \tau) = \delta_l(t, \tau) + \delta_n(\sigma, t, \tau), \quad (4.51)$$

где

$$\delta_l(t, \tau) = \frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau); \quad (4.52)$$

$$\delta_n(\sigma, t, \tau) = \frac{1}{E_b(\tau)} \left[\frac{1 - \nu_b(\tau)}{\nu_b(\tau)} \right] + \nu_c \eta^4(\tau) C(t, \tau); \quad (4.53)$$

входящие в формулы (4.52) и (4.53) значения рассмотрены в п. 4.1, здесь только t_0 заменяется на τ .

Режим нагружения общего вида (рис. 4.10, а) разделяется на две ветви только возрастающих напряжений $\{\sigma\}^+$ и только убывающих $\{\sigma\}^-$ так, как показано на рис. 4.10, б, в. Фактический режим нагружения равняется сумме его ветвей. Полные относительные деформации бетона в момент времени $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ определяются по формуле

$$\epsilon_b(t) = \sigma_k^+ \left[\frac{1}{E_b \tau_{Tk}^+} + C(t, \tau_{Tk}^+) \right] + \sigma_e^- \left[\frac{1}{E_b \tau_{Te}^-} + C(t, \tau_{Te}^-) \right] + \sigma_{\max} \left\{ \frac{1}{E_b(\tau_T)} \left[\frac{1 - \nu_b(\tau_T)}{\nu_b(\tau_T)} \right] + \nu_c \eta^4(\tau_T) C(t, \tau_T) \right\}, \quad (4.54)$$

где $\sigma_{\max} = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$ — максимальное значение из ряда напряжений на ступенях; i, k, e — номера ступеней соответственно на графиках рис. 4.10, а, б, в; $\sigma_i = \sigma_k + \sigma_e$; $\tau_{Tk}^+, \tau_{Te}^-, \tau_T$ — трансформируемое время нагружения соответственно напряжениями $\sigma_k^+, \sigma_e^-, \sigma_i$.

Если E_b является константой относительно τ , формула (4.54) преобразуется к виду

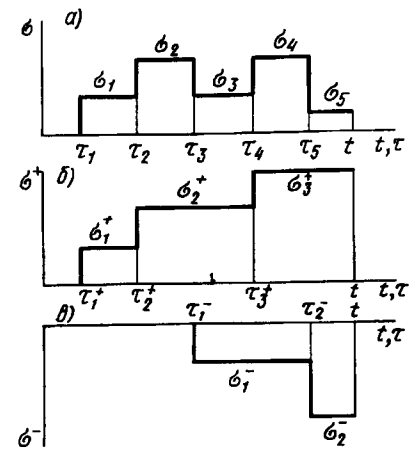


Рис. 4.10. Разделение сложного режима нагружения (а) на два графика (б, в)

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b}{E_b} + \sigma_k^+ C(t, \tau_{Tk}^+) + \sigma_e^- C(t, \tau_{Te}^-) + \sigma_{\max} \left\{ \frac{1}{E_b} \left[\frac{1 - \nu_b(\tau_T)}{\nu_b(\tau_T)} \right] + \nu_c \eta^4(\tau_T) C(t, \tau_T) \right\}. \quad (4.55)$$

Рассмотрим сначала определение трансформируемого времени τ_{Tk}^+, τ_{Te}^- в линейной области. Пусть τ_i — время приложения ступеней возрастающих напряжений σ_i^+ (см. рис. 4.10, а, здесь $\tau_i = \tau_k^+, \sigma_i = \sigma_k^+$). При $\tau_2 < t < \tau_3$ линейные деформации бетона вычисляются в виде суммы

$$\epsilon(t) = \sigma_1 \delta_l(t, \tau_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) \delta_l(t, \tau_2). \quad (4.56)$$

Строгое равенство (4.56) заменяется приближенным

$$\epsilon(t) = \sigma_2 \delta_l(t, \tau_2), \quad (4.57)$$

где τ_{T2} — определяется таким образом, чтобы невязка правой и левой частей приближенного равенства

$$\sigma_2 \delta_l(t, \tau_2) = \sigma_1 \delta_l(t, \tau_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) \delta_l(t, \tau_2) \quad (4.58)$$

была минимальной. Уравнение (4.58) относительно τ_{T2} решается один раз для $t = \tau_2 + 1$ сут, при этом требование минимальной невязки соблюдается для $t \geq \tau_2 + 1$ сут. Для последующих этапов нагружения уравнение трансформирования записывается в виде

$$\sigma_3 \delta_l(t, \tau_3) = \sigma_2 \delta_l(t, \tau_2) + (\sigma_3 - \sigma_2) \delta_l(t, \tau_3) \quad (4.59)$$

и так далее. После трансформирования времени нагружения на этапе i линейные деформации бетона для $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ сут определяют по формуле

$$\epsilon_i(t) = \sigma_i \delta_l(t, \tau_i). \quad (4.60)$$

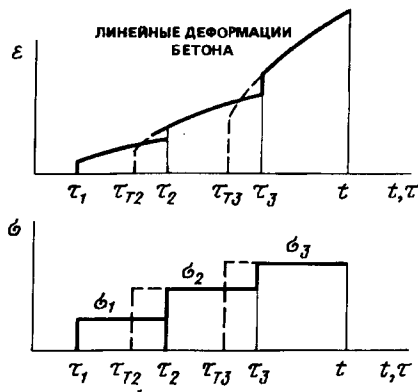


Рис. 4.11. К определению τ_i в линейной области

Последовательность трансформирования времени нагружения показана на рис. 4.11. Если режим нагружения включает этапы разгрузки, то он разделяется на две ветви только возрастающих напряжений σ_k^* и убывающих σ_l^- . Трансформирование времени нагружения на каждой ветви ведется отдельно.

Решение уравнений трансформирования типа (4.59) с целью упрощения вычислений можно заменить определением по формуле

$$\tau_{ii} = [\sigma_{i-1} \tau_{\tau, i-1} + (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \tau_i] / \sigma_i \quad (4.61)$$

При этом возможно незначительное (до 10%) отклонение от результатов, полученных на основе численного решения уравнений трансформирования.

Трансформирование характеристик нелинейных деформаций бетона рассматривается на примере нагружения, показанного на рис. 4.12. При $\tau_2 < t < \tau_3$ двухступенчатый режим нагружения условно разделяется на три одноступенчатых (рис. 4.13, б, в, г). Нелинейные деформации вычисляются для каждой ступени, а результаты суммируются

$$\varepsilon_n(t) = \sigma_1 \delta_n(\sigma_1, t, \tau_1) + \sigma_2 \delta_n(\sigma_2, t, \tau_2) - \sigma_1 \delta_n(\sigma_1, t, \tau_2) \quad (4.62)$$

Строгое равенство (4.62) заменяется приближенным

$$\varepsilon_n(t) = \sigma_2 \delta_n(\sigma_2, t, \tau_2), \quad (4.63)$$

где τ_{i2} определяется таким образом, чтобы невязка правой и левой частей приближенного равенства

$$\begin{aligned} \sigma_2 \delta_n(\sigma_2, t, \tau_{i2}) &= \sigma_1 \delta_n(\sigma_1, t, \tau_1) \\ + \sigma_2 \delta_n(\sigma_2, t, \tau_2) &- \sigma_1 \delta_n(\sigma_1, t, \tau_2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

была минимальной. Уравнение (4.64) относительно τ_{i2} решается один раз для $t = \tau_2 + 1$ сут, при этом требование минимальной невязки, как и при трансформировании линейных характеристик бетона соблюда-

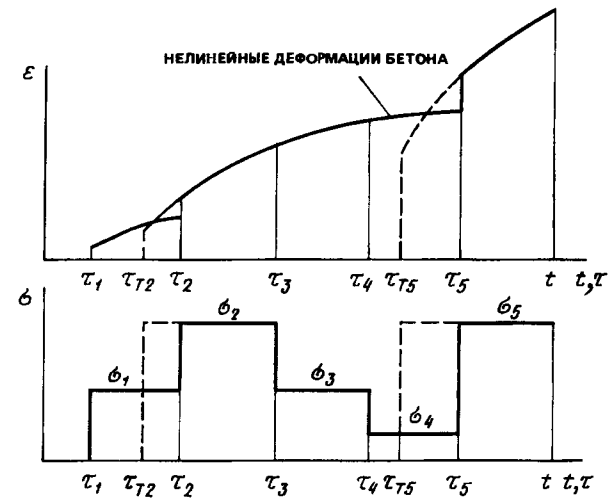


Рис. 4.12. К определению τ_i в нелинейной области

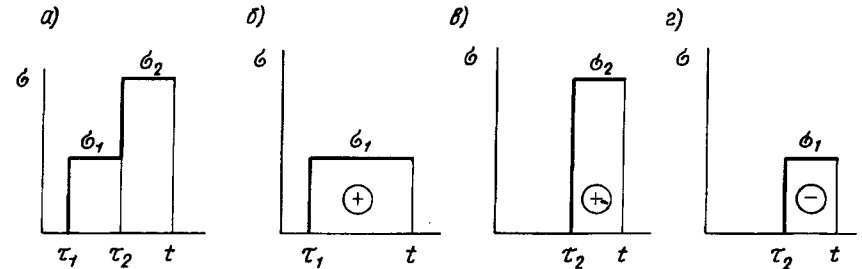


Рис. 4.13. Разделение двухступенчатой нагрузки (а) на три графика (б - д)

ется для $t \geq \tau_2 + 1$ сут. Для возрастающего ступенчатого режима нагружения уравнение трансформирования записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_i \delta_n(\sigma_i, t, \tau_{ii}) &= \sigma_{i-1} \delta_n(\sigma_{i-1}, t, \tau_{i-1}) + \\ + \sigma_i \delta_n(\sigma_i, t, \tau_i) &- \sigma_{i-1} \delta_n(\sigma_{i-1}, t, \tau_i). \end{aligned} \quad (4.65)$$

После трансформирования времени нагружения на этапе i нелинейные деформации бетона для $\tau_{i-1} + 1 \leq t \leq \tau_{i+1}$ сут определяют по формуле

$$\varepsilon_n(t) = \sigma_i \delta_n(\sigma_i, t, \tau_{ii}). \quad (4.66)$$

Для $\tau_3 \leq t \leq \tau_4$ (первая ступень разгрузки) нелинейные деформации бетона равны

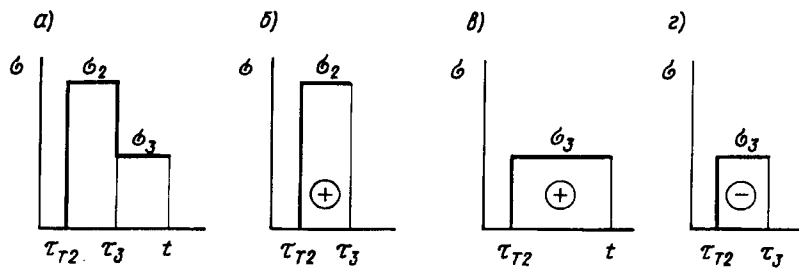


Рис. 4.14. Разделение двухступенчатой нагрузки с разгрузкой (а) на три графика (б - д)

$$\varepsilon_n(t) = \varepsilon_n(\tau_3) + \sigma_3 \delta_n(\sigma_3, t, \tau_2) - \sigma_3 \delta_n(\sigma_3, \tau_3, \tau_2), \quad (4.67)$$

где $\varepsilon_n(\tau_3)$ вычисляются по формуле (4.66) при $t = \tau_3$.

Схема построения зависимости (4.67) показана на рис. 4.14, где двухступенчатый режим разгрузки (рис. 4.14, а) условно разделяется на три одноступенчатых режима (рис. 4.1, б, в, г). Три члена правой части формулы (4.67) выражают соответственно деформации для этих трех составляющих. Для $\tau_4 < t \leq \tau_5$ схема вычисления нелинейных деформаций бетона (см. рис. 4.14) сохраняется. Формула имеет вид

$$\varepsilon_n(t) = \varepsilon_n(\tau_4) + \sigma_4 \delta_n(\sigma_4, t, \tau_2) - \sigma_4 \delta_n(\sigma_4, \tau_4, \tau_2), \quad (4.68)$$

где $\varepsilon_n(\tau_4)$ находится по формуле (4.67) при $t = \tau_4$.

Трансформированное время, входящее в зависимости (4.67) и (4.68), остается одинаковым. Оно определяется для этапа, предшествовавшего первой ступени разгрузки — в нашем примере для этапа $j = 2; \tau_j = \tau_2$. Таким образом на ступенях разгрузки необходимость в трансформировании времени нагружения отпадает. При этом лишь увеличивается слагаемое $\tilde{\varepsilon}_n(\tau_i)$, которое выполняет роль накопителя деформаций, и уменьшается уровень напряжений.

Когда за разгрузкой следует этап догружения (см. пятый этап на рис. 4.12), уравнение трансформирования имеет вид

$$\sigma_{\max} \delta_n(\sigma_{\max}, \tau_5, \tau_5) - \varepsilon_n(\tau_5) = 0, \quad (4.69)$$

где σ_{\max} — максимальные напряжения, достигнутые на предшествующих этапах нагружения; в нашем случае $\sigma_{\max} = \sigma_2$.

После трансформирования времени нагружения по указанию (4.69) приходим к двухступенчатому режиму. Если $\sigma_{\max} < \sigma_5$, то имеет место схема, показанная на рис. 4.13; если $\sigma_{\max} > \sigma_5$ — то схема, показанная на рис. 4.14. В таком алгоритме учитывается то обстоятельство, что накопление необратимых деформаций на повторных нагрузках зависит от того, как соотносится уровень повторной нагрузки с максимальным уровнем предшествовавших нагрузок.

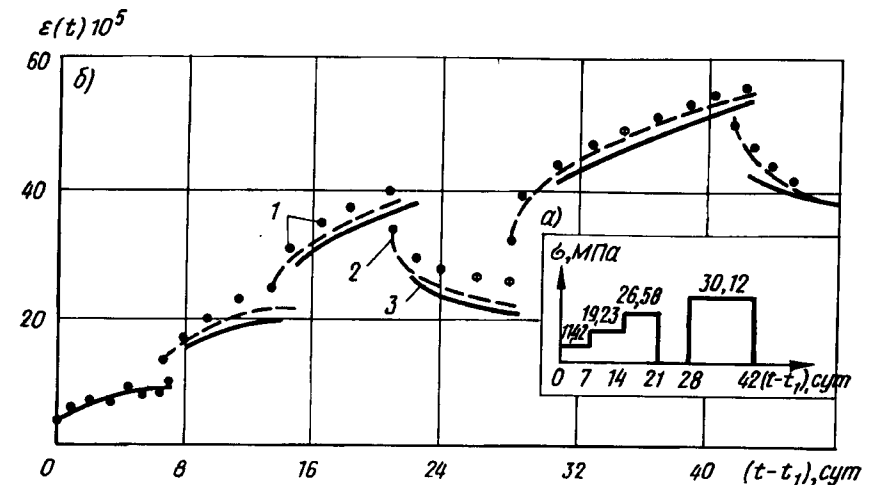


Рис. 4.15. Сопоставление опытных и теоретических деформаций ползучести бетона при сложном режиме нагружения

С целью упрощения вычислений решение уравнений трансформирования (4.65) можно заменить вычислением по формуле

$$\tau_{ti} = [\sigma_{i-1}^5 \tau_{t,i-1} + (\sigma_i^5 + \sigma_{i-1}^5) \tau_i] / \sigma_i^5. \quad (4.70)$$

При этом, как и в случае трансформирования линейных характеристик, возможно незначительное (до 10%) отклонение от результатов, полученных на основе численного решения уравнений трансформирования.

В некоторых случаях — при расчете быстроснатекающих деформаций бетона, а также при загрузении бетона в возрасте до 28 сут необходимо решать уравнения трансформирования (4.58) и (4.66) при $t = \tau_i + \Delta t$, где $t < 1$ сут. В первом случае принимают $\Delta t = \tau_{i+1} - \tau_i < 1$ сут. Во втором случае значение t вычисляют по формуле

$$\Delta t = e^{-0,075(28 - \psi)} - 0,122 < 1 \text{ сут.} \quad (4.71)$$

Если оба фактора действуют одновременно, то Δt принимают равным меньшему значению.

С целью проверки соответствия выдвинутых расчетных положений опытным данным по способу τ_t были просчитаны деформации ползучести для сложных режимов из опытов различных авторов, и получено хорошее согласование расчета с опытом; в полном объеме сопоставление приведено в работе [66]. Кроме того, наносились теоретические кривые, полученные по двухкомпонентной теории П.И. Васильева [30], А.А. Гвоздева, К.З. Галустова, А.В. Яшина [32, 35]. Способ τ_t дает точность не ниже точности указанных теорий.

Для примера на рис. 4.15, а представлен график режима нагружения из опытов С.В. Александровского и Н.А. Колесникова (возраст бетона к началу загрузки $\tau_1 = 85$ сут, $R_b^{см} = 40,5 \dots 44,2$ МПа). На рис. 4.15, б показаны: точками 1 — экспериментальная кривая, пунктирной линией 2 — теоретическая кривая по двухкомпонентной теории [32]; сплошной линией 3 — кривая, построенная по способу τ_1 . Способ τ_1 дает такие же результаты, что и двухкомпонентная теория, однако решение достигается более простым способом.

4.4. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ УСАДКИ БЕТОНА

При нарушении влажностного равновесия внешней среды и бетона в последнем проявляются деформации усадки, которые сопровождают процесс высыхания бетона на различных структурных уровнях в среде с более низкой влажностью, или набухания — в среде с избыточной влажностью. Проблемой усадки (набухания) бетона занимались многие исследователи; ей посвящена значительная часть монографии С.В. Александровского [1], где также представлен обзор различных работ; рассмотрение этого вопроса можно встретить в монографиях [26, 27, 140, 163, 164 и др.] Большая работа по нормированию деформаций усадки была выполнена О.Я. Бергом, Е.Н. Щербаковым, И.Е. Прокоповичем, М.М. Заставой [18, 120, 121, 139]; деформации набухания в последнее время обобщались Р.Л. Серых, их причины рассмотрены в [96].

Ниже приведем лишь формулы по определению деформаций усадки, представленные в пособии [139] (они подготовлены И.Е. Прокоповичем и М.М. Заставой). Значения деформаций усадки бетона к моменту времени t определяются по зависимости

$$\varepsilon_{bs}(t, t_w) = \varepsilon_{bs}(t = \infty, t_w) [1 - e^{-\alpha(t-t_w)}], \quad (4.72)$$

где t_w — возраст бетона в момент окончания влажностного хранения, сут; α — коэффициент, принимаемый по табл. 4.5; $\varepsilon_{bs}(t = \infty, t_w)$ — предельное значение усадки тяжелого бетона в форме О.Я. Берга [15].

$$\varepsilon_{bs}(\infty, t_w) = \varepsilon_{bs}^N(\infty, 7) \xi_1 \xi_2 \xi_3, \quad (4.73)$$

где ε_{bs}^N — предельные значения деформаций усадки в эталонных условиях; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — характеристики, учитывающие влажность среды и условия влагообмена бетона со средой.

Параметры $\varepsilon_{bs}^N, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ принимаются по табл. 4.5 с учетом следующих корректив:

для бетонных смесей, имеющих осадку конуса 1 — 2 см или жесткость 15 — 40 с, табличные значения $\varepsilon_{bs}^N(\infty, 7)$ умножаются на коэффициент 0,85;

для конструкций, эксплуатируемых на открытом воздухе в районах, относящихся к IV климатической зоне, указанные в табл. 4.5

Характеристики	Класс обычного тяжелого бетона						
	B12,5	B15	B20	B30	B40	B50	B60
$\varepsilon_{bs}^N(\infty, 7) \times 10^6$	350	350	400	400	400	400	400
Возраст бетона t_w , сут							
	7 и менее	28	60	90	180	360 и более	
ξ_1	1	0,95	0,93	0,92	0,91	0,90	
Относительная влажность среды W , %							
	40 и менее	50	60	70	80	90	
ξ_3	1,25	1,14	1	0,87	0,73	0,56	
Модуль открытой поверхности образца $M_0, м^{-1}$							
	0	5	10	20	40	60	80 и более
ξ_2	0,22	0,65	0,83	0,95	1,09	1,13	1,15
α	0,004	0,004	0,004	0,008	0,016	0,025	0,033

значения α относятся к началу усадки в осенний и весенний периоды года (октябрь, апрель); значения параметров α увеличивается на 30%, если усадка начинается в летнее время года (июнь), и уменьшается на 50% при усадке в зимнее время года (январь), в промежуточных случаях применяют линейную интерполяцию;

для мелкозернистого бетона табличные значения $\varepsilon_{bs}^N(\infty, 7)$ умножают на коэффициент 1,6;

для бетонных смесей с пластифицирующими добавками табличные значения $\varepsilon_{bs}^N(\infty, 7)$ умножают на коэффициент 1,15;

деформации усадки суммируются (с учетом знаков) с деформациями от действия напряжений.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУР

Здесь абстрагируемся от составляющих деформаций, связанных с температурными удлинениями и усадкой (их значения приведены в п. 3.3) и рассмотрим отдельно способы определения деформаций ползучести в условиях повышенных температур совместно с деформациями кратковременного нелинейного деформирования в момент приложения нагрузки (или только деформаций ползучести). Укажем на несколько способов.

Способ диаграмм-изохрон. Он представляет собой развитие рассмотренного в п. 4.1 способа определения деформаций бетона в условиях обычных температур на условия с повышенными температурами. Прежде чем переходить к рассмотрению изохрон, поясним некоторые характерные точки и интервалы на оси времени:

${}^{\circ}t_0, {}^{\circ}t$ — время начала нагрева (возраст бетона к началу нагрева) и рассматриваемое время t в условиях действия температуры (${}^{\circ}t = t$);

$t_{i,0}$ — фактическое время действия температуры,

$t_{i,0} = ({}^{\circ}t - {}^{\circ}t_0)$;

t^* — приведенное время действия температуры определяется по формуле (3.71);

${}^{\circ}\tau$ — время приложения напряжений в условиях действия температуры (${}^{\circ}t_0 \leq {}^{\circ}\tau \leq {}^{\circ}t$);

$\tau_{i,0}$ — время действия температуры до приложения напряжений

$\tau_{i,0} = ({}^{\circ}\tau - {}^{\circ}t_0)$,

τ^* — приведенное время действия температуры до приложения напряжений

$\tau^* = \tau_{i,0} F(t^*)$,

$F(t^*)$ — функция приведения, вычисляемая по формуле (3.72);

t^0 — температура ($\tilde{t}^0 = t^0 / 20^{\circ}\text{C}$);

τ — время приложения напряжений, если они прикладываются до приложения температуры (в случае жесткого режима нагружения τ обозначается t_0 ; при этом $\tau^* = 0$).

Деформации бетона в способе изохрон после приложения температуры вычисляются по формуле типа (4.5),

$$\epsilon({}^{\circ}t) = \frac{\sigma_b({}^{\circ}t)}{{}^{\circ}E_b \nu_b(t^*, \tau^*)} \quad (4.74)$$

где $\sigma_b({}^{\circ}t)$ — напряжение в момент времени $t = {}^{\circ}t$; ${}^{\circ}E_b$ — модуль деформации, определяемый по формуле (3.69), где вместо E_b^0 вводится модуль бетона $E_b({}^{\circ}t_0)$, соответствующий началу нагрева (если ${}^{\circ}t_0 > 28$ сут); $\nu_b(t^*, \tau^*)$ — коэффициент изменения модуля в диаграмме-изохронс (4.74).

Параметр $\nu_b(t^*, \tau^*)$ вычисляется по формулам (3.2) — (3.5), где ν_0 заменяется на $\nu_0(t^*, \tau^*)$, $\hat{\nu}_b$ на $\hat{\nu}_b(t^*, \tau^*)$ и η на

$${}^{\circ}\eta = \frac{\sigma_b({}^{\circ}t)}{R_b({}^{\circ}t)},$$

где $R({}^{\circ}t) = R_b(t^*, \tau^*)$ — прочность бетона в возрасте ${}^{\circ}t$ в условиях действия повышенных температур.

Параметры $\nu_0(\tau^*, t^*)$, $\hat{\nu}_b(\tau^*, t^*)$ определяются формулами типа (4.14) и (4.15),

$$\nu_0(t^*, \tau^*) = \frac{1}{1 + \beta \varphi(t^*, \tau^*)}; \quad (4.75)$$

$$\nu_b(t^*, \tau^*) = \frac{{}^{\circ}\hat{\nu}_b}{1 + {}^{\circ}\hat{\nu}_b \beta \hat{f}_{ct,0} \varphi(t^*, \tau^*)}, \quad (4.75)$$

где параметр ${}^{\circ}\hat{\nu}_b$ — указан в п. 3.3; определение остальных величин рассмотрим ниже (они были установлены А.П. Кричевским).

Следуя [97], можно записать

$$\varphi(t^*, \tau^*) = C(t^*, \tau^*) {}^{\circ}E_b, \quad (4.76)$$

где $C(t^*, \tau^*)$ — мера ползучести в условиях действия повышенной температуры.

$$C(t^*, \tau^*) = C_{i,0}(t^*, \tau^*) - \Delta C(t^*, t_0) - \sum \Delta C_V(t^*, \tau^*). \quad (4.77)$$

В формуле (4.77) $C_{i,0}(t^*, \tau^*)$ — линейная мера ползучести при одноступенчатом режиме нагрева (повышение температуры до некоторой величины плюс длительная выдержка при постоянной температуре — изотермический режим нагрева)

$$C_{i,0}(t^*, \tau^*) = C_{i,0}(t^* = \sim; \tau^* = 0) \Omega_{i,0}(\tau^*) f_{i,0}(t^* - \tau^*), \quad (4.78)$$

где $C_{i,0}(t^* = \sim; \tau^* = 0)$ — предельное значение меры ползучести бетона при изотермическом нагреве

$$C_{i,0}(t^* = \sim, \tau^* = 0) = [12,7 + D(\tilde{t}^0 - 1) - 9,3 e^{-0,2(\tilde{t}^0 - 1)}] \times 10^5, \quad (4.79)$$

здесь $D = 50 / (M_0^2 + 50)$ — для высыхающего бетона (M_0 — модуль открытой поверхности); $D = 3$ — для невысыхающего бетона; $\Omega_{i,0}(\tau^*)$ — функция температурного старения, которая для высыхающего бетона определяется по формуле

$$\Omega_{i,0}(\tau^*) = a + (1 - a) e^{-(0,08 + 0,012\tilde{t}^0)\tau^*}, \quad (4.80)$$

здесь $a = 0,07 + 0,02\tilde{t}^0$; для невысыхающего бетона при модуле открытой поверхности $M_0 = 0$ функция $\Omega_{i,0}(\tau^*)$ находится также, как и при нормальной температуре [см. пояснение к формуле (4.11)], $f_{i,0}(t^* - \tau^*)$ — функция, учитывающая развитие деформаций ползучести во времени,

$$f_{i,0}(t^* - \tau^*) = [1 - \beta(t^0) e^{-0,05(t^* - \tau^*)}] [1 - e^{-2(t^* - \tau^*)}], \quad (4.81)$$

здесь $\beta(t^0)$ — коэффициент, характеризующий быстронатекающую деформацию температурной ползучести

$$\beta(t^0) = 0,85 [1 - 0,054(\tilde{t}^0 - 1)].$$

Если напряжения прикладываются до нагрева (при $t_0 < {}^{\circ}t_0$ и $\tau^* = 0$), следует учитывать влияние удельных деформаций ползучести, которые проявились до нагрева. Однако, как показывают исследования, представленные в [97], влияние предшествовавших деформаций ползучести после приложения температуры уменьшается. Например, деформации ползучести образцов, загруженных непосредственно перед нагревом (до 120°C) и образцов, имевших значительные деформации при нормальной температуре до этого нагрева, оказались практически одинаковыми. С учетом этого фактора влияние удельных деформаций предшествовавшей ползучести в [97] рекомендуется определять по формуле (при $t \geq {}^{\circ}t_0$),

$$\Delta C(t^*, t_0) = C({}^{\circ}t_0, t_0) [1 - f_{c0}(t^*, \tau^* = 0)e^{-0,72(\tilde{t}^0 - 1)^2}], \quad (4.82)$$

где $C({}^{\circ}t_0, t_0)$ — удельные деформации линейной ползучести, натекающие к $t = {}^{\circ}t_0$ в условиях нормальной температуры, вычисляются по формуле (4.7) при $f_c = 1$.

Слагаемое $\sum \Delta C_{\nu}(t^*, \tau^*)$ вводится в том случае, если режим температурного нагрева не остается одноступенчатым, а сопровождается дополнительными ступенями возрастающего температурного нагрева. Приращение меры ползучести после каждой температурной ступени определяется по формуле

$$\Delta C_{\nu}(t^*, \tau^*) = {}^{\circ}F_{\nu}(t^*) 20 (\tilde{t}^0 - 1) f_{c0}(t^*, \tau^*), \quad (4.83)$$

где \tilde{t}^0 — общая температура к заданному времени t^* , вычисленная с учетом дополнительного нагрева; ${}^{\circ}F_{\nu}(t^*)$ — приращение меры ползучести, отнесенное к 1°C ;

$${}^{\circ}F_{\nu}(t^*) = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} (\tilde{t}^0 - 1)}{\bar{\nu}} {}^{\circ}\Omega(t^*),$$

здесь $\bar{\nu}$ — средняя скорость увеличения температуры,

$$\bar{\nu} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{\tau^*}} \Delta t_j^{\circ}}{\sum_{j=1}^{n_{\tau^*}} \Delta t_j^*},$$

где Δt_j° — значения температурных ступеней; Δt_j^* — приведенное время действия ступеней, причем приведенное время действия ступеней Δt_j^* должно приниматься не больше величины $t_{\max, j}^*$, где

$$t_{\max, j}^* = \frac{360}{\tilde{t}_j^0} F(t_j^{\circ})$$

($F(t_j^{\circ})$ — функция приведения); величина $t_{\max, j}^*$ характеризует предельное значение времени затухания деформаций ползучести на j -й ступени.

В функции $f_{c0}(t^*, \tau^*)$, входящей в зависимость (4.83), приведенное время t^* вычисляется с учетом полной температуры к рассматриваемому времени.

Общая мера ползучести определяется с учетом физической нелинейности

$$C(t^*, \tau^*, \sigma) = C(t^*, \tau^*) f_{c\sigma}, \quad (4.84)$$

где $f_{c\sigma}$ — функция нелинейности,

$$f_{c\sigma} = \hat{f}_{c\sigma} \eta^4(\tau^*); \quad (4.85)$$

$\eta(\tau^*)$ — уровень напряжений ($0 < \eta(\tau^*) < 1$); $\hat{f}_{c\sigma}$ — максимальное значение функции нелинейности. — оно вводится в формулу (4.52),

$$\hat{f}_{c\sigma} = 1 + \frac{(k_{\sigma c} + k_{t\sigma})}{\sqrt{f_{t\sigma}(t^*, \tau^*)}}, \quad (4.86)$$

здесь

$$k_{t\sigma} = 0,26 (\tilde{t}^0 - 1) \eta^{(5 - 0,07R_b) + 0,02(\tilde{t}^0 - 1)},$$

η — уровень напряжений, определяемый для нормальной температуры ($t^{\circ} = 20^{\circ}\text{C}$) по формуле (3.4); $R_b = R_{b,ser}$; $k = 0,65$ — для жесткого режима нагружения (см. п. 4.1);

$$k = [0,74 + 0,18 \left(\frac{\tau^*}{t^*} \right)^2]^4$$

— для мягкого режима.

Параметр β в формулах (4.75) также учитывает влияние режима нагружения; $\beta = 1$ — для жесткого режима,

$$\beta = 0,5 [1 + e^{-2 \eta t^*} + A(t^{\circ})]$$

— для мягкого режима нагружения при

$$A(t^{\circ}) = 1,5 - 0,14(\tilde{t}^0 - 1) \ln [1/F(t^{\circ})],$$

Остановимся еще на определении уровня напряжений η . Этот уровень зависит, как указано в начале рассмотрения, от прочности бетона $R_b(t^*, \tau^*)$. Эту прочность, следуя [97], можно определить по формуле

$$R_b(t^*, \tau^*) = R_b({}^{\circ}t_0) \gamma_b(t^* - \tau^*) \alpha_{\gamma_b} \quad (4.87)$$

где $R_b({}^{\circ}t_0)$ — прочность бетона при нормальной температуре к началу нагрева; $R_b({}^{\circ}t_0)$ заменяется на $R_b(t_0, {}^{\circ}t_0)$, если нагружение образца происходит до начала нагрева при $t_0 < {}^{\circ}t_0$; $R_b({}^{\circ}t_0)$ — определяется по формуле (4.4), а $R_b(t_0, {}^{\circ}t_0)$ — по формуле (4.1); α_{γ_b} — определяется по формуле (3.70):

$$\gamma_b(t^* - \tau^*) = [0,95 - 1,57 \cdot 10^{-2} \ln(t^* - \tau^*)] B(\tau^*), \quad (4.88)$$

где $B(\tau^*) = 1 - 0,05(4 - \tau^*) \leq 1$.

Построение единой меры ползучести бетона при нагреве.

Сопоставляя меру ползучести, представленную выше, с мерой ползучести бетона в условиях нормальной температуры (она рассмотрена в п. 4.1), можно заметить, что эти меры не стыкуются — мера ползучести нагретого бетона не переходит в меру ползучести обычного бетона, когда температура приближается к 20°C . В работе [91], которой мы следуем далее, сделана попытка единообразного описания ползучести обоих видов бетона. Сначала рассмотрим деформации простой ползучести нагретого бетона.

В основу рассмотрения положен учет таких наиболее существенных, по мнению авторов [29], [97], [122] и других, факторов, влияющих на ползучесть нагретого бетона, как влагосодержание и скорость удаления влаги. Влагодобмен с окружающей средой характеризуем, как это и принято, при помощи так называемого модуля открытой поверхности $M_0 \text{ м}^{-1}$, представляющего собой отношение площади открытой поверхности образца к его объему (модуль использовался уже в построениях п. 4.1 и п. 4.5). Заметим, что по этому параметру все бетоны делятся на гидроизолированные ($M_0 = 0$) и высыхающие ($M_0 > 0$). Изучению термползучести гидроизолированного бетона посвящены исследования [29, 125, 186, 189 и др.], высыхающего — [97, 122, 196 и др.]. Для обоих типов бетона составлены единые интерполяционные зависимости.

Нагрев сопровождается образованием и развитием микротрещин в бетоне, которые приводят к нелинейной ползучести и существенно ограничивают область условно нелинейных деформаций ползучести. Как и ранее, этот фактор учитывается при помощи функции нелинейности.

Переход к описаниям ползучести при режимных воздействиях как силовых, так и термосиловых осуществляется по принципу наложения воздействий при некоторой модификации его на ветвях разгрузок (здесь влияние функции нелинейности не учитывается). Допустимость использования этого принципа для приближенного описания термползучести бетона обосновывается в [97].

Перейдем к построению единой меры в условиях простой ползучести и термползучести. Удельные деформации ползучести нагретого до температуры $t^\circ\text{C}$ бетона в условно линейной области представим в традиционной форме [97, 140, 142 и др.]:

$$C_{i,0}(t, \tau) = \theta_{i,0}(\tau) f_{i,0}(t - \tau), \quad (4.89)$$

где t, τ — время наблюдения и приложения нагрузки; $\theta_{i,0}(\tau)$ — предельная мера ползучести; $f_{i,0}(t - \tau)$ — функция продолжительности действия нагрузки.

Рассмотрим отдельно каждую из входящих в выражение (4.89) функций. Функция продолжительности действия нагрузки записывается так [140, 142]:

$$f_{i,0}(t - \tau) = 1 - \beta_{i,0} e^{-\gamma(t - \tau)} - (1 - \beta_{i,0}) e^{-b(t - \tau)}. \quad (4.90)$$

Здесь последнее слагаемое характеризует быстроснабегающую часть деформаций ползучести. При $b \approx 0,6$, как это принято [142], оно затухает достаточно быстро ($\gamma = \gamma_1$, где γ_1 см. табл. 4.1). Изменение скорости натекания деформаций ползучести в результате нагрева характеризуется приведенным временем t^* и τ^* соответственно равным

$$t^* = \Phi_{i,0} t; \quad \tau^* = \Phi_{i,0} \tau, \quad (4.91)$$

где $\Phi_{i,0}$ — функция приведения.

Предельная мера ползучести представляется в виде

$$\theta_{i,0}(\tau) = C(\sim, 28) \varphi_{i,0} \Omega_{i,0}(\tau), \quad (4.92)$$

где $C(\sim, 28)$ — предельная мера ползучести бетона, твердеющего при нормальной температуре в возрасте 28 сут, определяемая либо по [142], либо по опытным данным; $\varphi_{i,0}$ — функция влияния температуры на предельную ползучесть; $\Omega_{i,0}(\tau)$ — функция старения.

Рекомендации по нормированию основных параметров уравнений (4.89)–(4.92) даны в работах [96, 142], однако только для высыхающих бетонов. Между тем анализ кривых, полученных в экспериментально-теоретических исследованиях [29, 125, 189], свидетельствует о том, что, несмотря на существенные количественные отличия, деформации термползучести гидроизолированных бетонов, так же как и высыхающих, могут быть определены по той же формуле (4.89). Естественно, что функции, входящие в эту формулу, будут

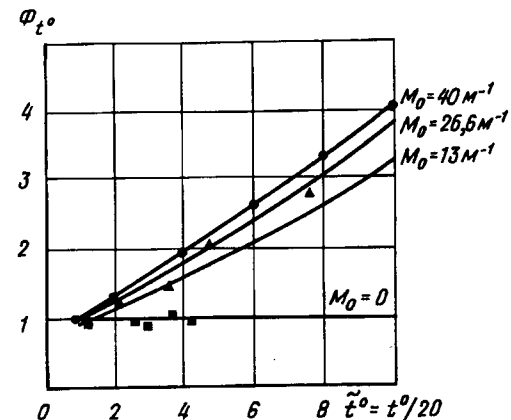


Рис. 4.16. К построению функции приведения
 ----- теория; опыт:
 Δ - $M_0 = 20 \text{ м}^{-1}$ [196];
 • - $M_0 = 40 \text{ м}^{-1}$ [97];
 ■ - $M_0 = 0$ [189]

зависеть не только от температуры, но и от условий высыхания бетона при нагреве, которые характеризуются M_0 .

Скорость натекания деформаций ползучести, согласно экспериментальным данным по гидроизолированным бетонам [189], с увеличением температуры меняется незначительно, однако в высыхающих бетонах при длительном изотермическом нагреве [97, 196] она увеличивается в 3,5–4 раза. На рис. 4.16 представлены экспериментальные значения функции $\Phi_{i,0}$, полученные при различных значениях M_0 , которые можно удовлетворительно аппроксимировать выражением

$$\Phi_{i,0} = 1 + \omega \left[1 - \left(\frac{\beta_1 q(t^0)}{\omega} \right)^{\beta_2 M_0} \right], \quad (4.93)$$

где $q(t^0) = 1 + a_1(\tilde{t}^0 - 1) + a_2(\tilde{t}^0 - 1)^2$; $\tilde{t}^0 = t^0/20^\circ\text{C}$.

При этом $a_1 = 0,308$; $a_2 = 0,004$; $\beta_2 = 0,0376$; $\beta_1 = 0,02$; $\omega = (1 + \beta_1)q(t^0) - 1$.

Влияние температуры на предельную ползучесть, которое характеризуется функцией $\varphi_{i,0}$, изучалось в [97, 122, 125, 189, 196]. Результаты исследований, приведенные в этих работах, показаны на рис. 4.17. Видно, что с уменьшением M_0 предельные деформации возрастают. Данные, представленные на этом рисунке, аппроксимируем выражением, рекомендованным в [2],

$$\varphi_{i,0} = 1 + \alpha_1 [1 - e^{-\alpha_2(\tilde{t}^0 - 1)}]. \quad (4.94)$$

При этом наилучшее совпадение с опытом достигается при следующих значениях коэффициентов: $\alpha_1 = b_1(1 + b_2 e^{-\alpha_3 M_0})$; $\alpha_2 = 0,2$; $b_1 = 3,802$; $b_2 = 1,496$.

Функция старения представляется в виде [122]

$$\Omega_{i,0}(\tau) = d_{i,0} + (1 - d_{i,0}) e^{-\gamma_1 \tau^*} \quad (4.95)$$

Параметр $d_{i,0}$, входящий в выражение (4.95), будем принимать

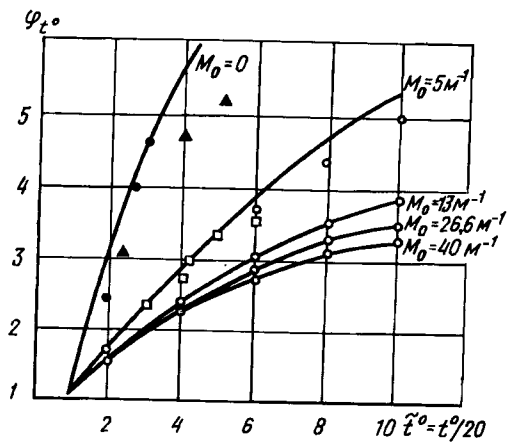


Рис. 4.17. К построению функций влияния температуры на предельную ползучесть
 --- теория; опыт:
 ○ - $M_0 = 5-40 \text{ м}^{-1}$ [196];
 □ - $M_0 = 30 \text{ м}^{-1}$ [187];
 ● - $M_0 = 0$ [189];
 Δ - $M_0 = 0$ [196]

зависящим не только от температуры нагрева, но и от M_0 . Предполагая, как и в [97], что нагрев гидроизолированного бетона мало влияет на его старение, поскольку оно обусловлено в основном влагообменом с окружающей средой, а также учитывая результаты исследований по высыхающим бетонам [97, 122], представим параметр $d_{t^{\circ}}$ в виде

$$d_{t^{\circ}} = d_0 \left\{ 1 - \omega_1 \left[1 - \frac{\beta_1 p(t^{\circ})}{\omega_1} \right] \beta_2 M_0 \right\}, \quad (4.96)$$

где $p(t^{\circ}) = 1 + c_1(\tilde{t}^{\circ} - 1) - c_2 \ln \tilde{t}^{\circ}$; $\tilde{t}^{\circ} = t^{\circ}/20^{\circ}$;
 $\omega_1 = 1 - (1 - \delta_1) p(t^{\circ})$; $d_0 = 0,5$.

При $c_1 = 0,157$; $c_2 = 0,858$; $\delta_1 = 2\delta$; $\beta_1 = 0,02$; $\beta_2 = 0,0376$ зависимости (4.95), (4.96) удовлетворительно описывают опытные данные (рис. 4.18).

Коэффициент β_2 в формуле (4.90) по данным [97] принимается зависящим только от температуры нагрева и может быть таким же, как и в формуле (4.81).

Общепринятым при описании ползучести бетона с учетом нелинейных составляющих является предположение об аффинности кривых линейных и полных деформаций, т.е.

$$C_{t^{\circ}}(t, \tau, \sigma) = f_{ct^{\circ}}(\sigma) C_{t^{\circ}}(t, \tau). \quad (4.97)$$

Функция нелинейности по аналогии с [142] может быть представлена в виде

$$f_{ct^{\circ}}(\sigma) = 1 + \nu_{ct^{\circ}} \left(\frac{\sigma}{R_{b, ser}} \right)^{m_{ct^{\circ}}}. \quad (4.98)$$

Параметры $\nu_{ct^{\circ}}$ и $m_{ct^{\circ}}$ зависят от температуры нагрева и определяются на основе опытных данных [97] по формулам:

$$\nu_{ct^{\circ}} = \nu_c + 0,26(\tilde{t}^{\circ} - 1); m_{ct^{\circ}} = m_c + 0,2(\tilde{t}^{\circ} - 1), \quad (4.99)$$

где ν_c , m_c — аналогичные параметрам при нормальной температуре (ν_c см. табл. 4.1; $m_c = 4$).

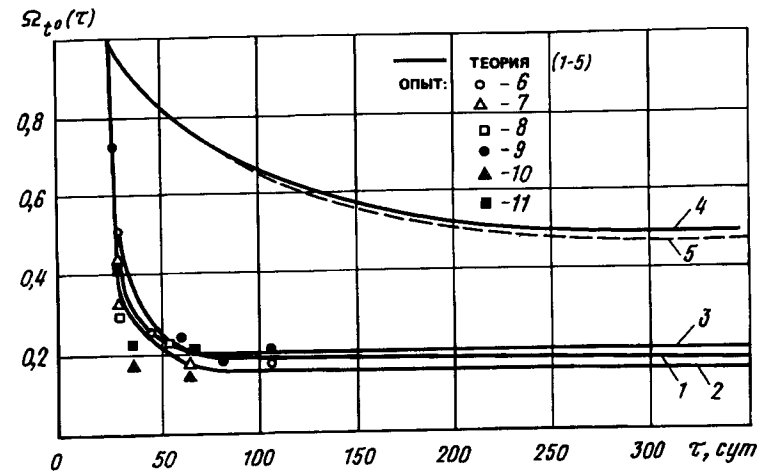


Рис. 4.18. К построению функции старения
 1 - $t^{\circ} = 60^{\circ}\text{C}$; 2 - $t^{\circ} = 120^{\circ}\text{C}$; 3 - $t^{\circ} = 200^{\circ}\text{C}$; 4 - $t^{\circ} = 20^{\circ}\text{C}$; 5 - $t^{\circ} = 20^{\circ}\text{C}$ по [142] — все при $M_0 = 40 \text{ м}^{-1}$; 6 - $t^{\circ} = 60^{\circ}\text{C}$; 7 - $t^{\circ} = 120^{\circ}\text{C}$; 8 - $t^{\circ} = 200^{\circ}\text{C}$ — все при $M_0 = 40 \text{ м}^{-1}$ из [97]; 9 - $t^{\circ} = 60^{\circ}\text{C}$; $M_0 = 26,6 \text{ м}^{-1}$ [122]; 10 - $t^{\circ} = 120^{\circ}\text{C}$; $M_0 = 26,6 \text{ м}^{-1}$ [97]; 11 - $t^{\circ} = 200^{\circ}\text{C}$; $M_0 = 26,6 \text{ м}^{-1}$ [122]

Известно [2], что использование принципа аффинности приводит к отклонениям от опытных данных в начальный период после загрузки, особенно для интенсивно стареющих бетонов. Сопоставимость теоретических результатов с опытными можно улучшить с помощью функции, регулирующей скорость натекания деформаций ползучести. Эта функция Φ_{σ} вводится в выражение для приведенного времени (4.91), т.е.

$$t^* = \Phi_{t^{\circ}} \Phi_{\sigma} t; \tau^* = \Phi_{t^{\circ}} \Phi_{\sigma} \tau, \quad (4.100)$$

и может быть представлена в виде

$$\Phi_{\sigma} = 1 + A(\tau) (\sigma/R_{b, ser})^l; A(\tau) = e^{p\tau}. \quad (4.101)$$

При этом рекомендуемые значения коэффициентов $l = 0,775$; $p = 0,0666$.

Вычисленные удельные деформации ползучести сопоставлялись с опытными данными [97, 189] для обычного тяжелого бетона в зрелом возрасте с модулем открытой поверхности $M_0 = 0 \dots 40 \text{ м}^{-1}$. На рис. 4.19, а приведены расчетные и опытные [97] деформации при $M_0 = 13 \text{ м}^{-1}$ и $M_0 = 26,6 \text{ м}^{-1}$. На рис. 4.19, б представлены теоретические и опытные [189] кривые для гидроизолированного бетона. Видно удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Описание термползучести интенсивно стареющего бетона можно улучшить, используя рекомендации [122], где предлагается определять линейные деформации ползучести по следующей зависимости [1]:

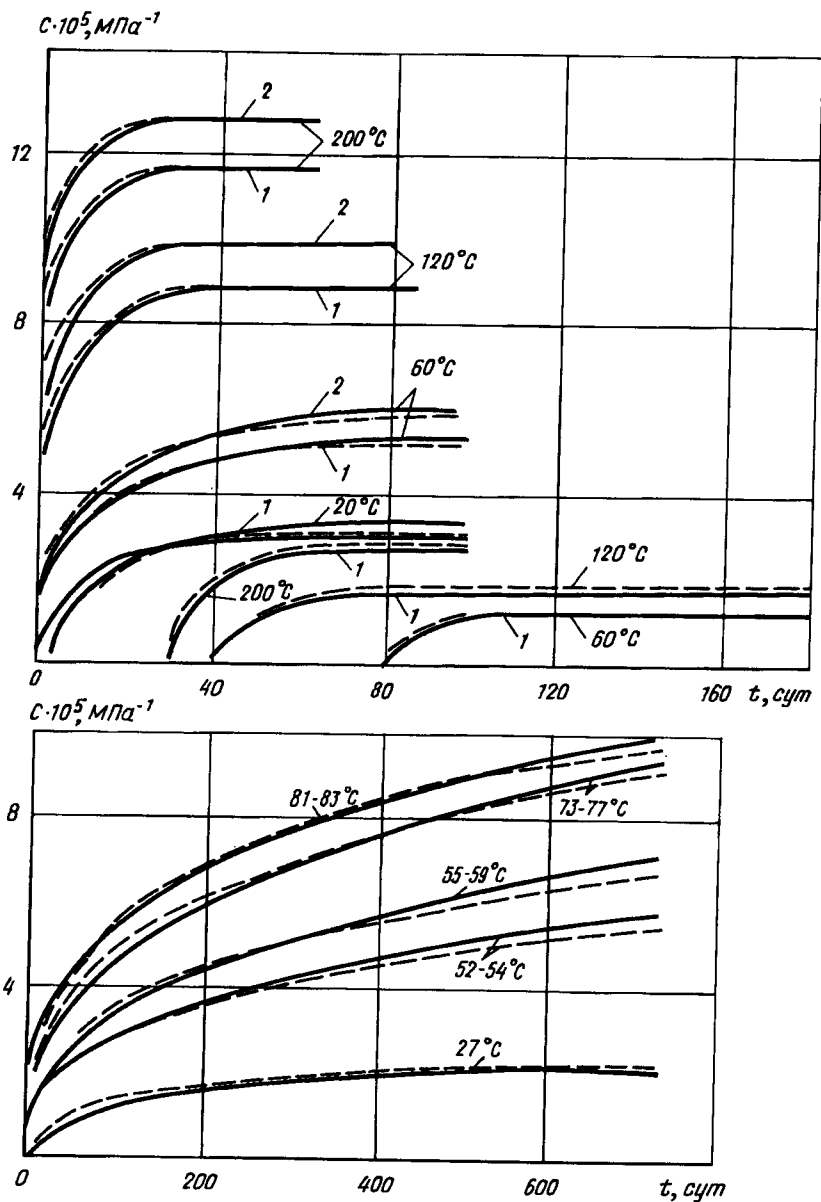


Рис. 4.19. Удельные деформации ползучести $C_t(t, \tau)$ а — высыхающего бетона при 1 — $M^0 = 26,6 \text{ м}^{-1}$; 2 — $M^0 = 13 \text{ м}^{-1}$ [97]; б — гидроизолированного бетона [189]. — — теория; --- опыт

$$C_{t^0}(t, \tau) = \theta_{t^0}(\tau) - \psi_{t^0}(t) \frac{e^{\gamma \tau^*} - A_t}{e^{\gamma t^*} - A_t} - \Delta_{t^0}(\tau) e^{-b(t^* - \tau^*)}, \quad (4.102)$$

$\Delta_{t^0}(\tau)$ — предельная мера быстронатекающих деформаций ползучести, $\psi_{t^0}(\tau) = \Theta_{t^0}(\tau) - \Delta_{t^0}(\tau)$; A_t — опытный коэффициент. Остальные параметры уравнения (4.102) те же, что и в формуле (4.89).

При этом $\Delta_{t^0}(\tau)$ может быть определена так:

$$\Delta_{t^0}(\tau) = (1 - \beta_{t^0}) \theta_{t^0}(\tau). \quad (4.103)$$

Приведенное время вновь находится по формуле (4.91). Отсутствие же аффинности кривых линейной и нелинейной ползучести моделируется функцией нелинейности типа (4.16)

$$f_{ct^0}(\sigma) = 1 + \frac{\nu_{ct^0}}{\sqrt{1 - 0,8 e^{-0,04(t^* - \tau^*)}}} (\sigma/R_{bc})^{m_{ct^0}} \quad (4.104)$$

(при расчете по второй группе предельных состояний $R_{bc} = R_{b,ser}$).

Ползучесть при переменных напряжениях. Воспользуемся принципом наложения воздействий. Для этого разобьем весь интервал нагрузки на малые участки, границы которых обозначим $t_1, t_2, \dots, t - \Delta t, t, t + \Delta t, \dots$. Будем полагать, что начало каждого участка совпадает с приложением очередной ступени напряжений, приращения которых равны $\Delta^1 \sigma, \Delta^2 \sigma, \dots, \Delta^t - \Delta^t \sigma, \Delta^t \sigma, \Delta^t + \Delta^t \sigma, \dots$. Полные напряжения в момент $t + \Delta t$ равны $\epsilon^{t+\Delta t} \sigma = \epsilon^t \sigma + \Delta^t \sigma$. Определим приращения деформаций ползучести за время Δt как разность между $\epsilon^{t+\Delta t} \epsilon_b$ и $\epsilon^t \epsilon_b$

$$\Delta^t \epsilon_b = \Delta^t \sigma [C_{t^0}(t + \Delta t, t_1) - C_{t^0}(t, t_1)] + \Delta^2 \sigma [C_{t^0}(t + \Delta t, t_2) - C_{t^0}(t, t_2)] + \dots + \Delta^t - \Delta^t \sigma [C_{t^0}(t + \Delta t, t - \Delta t) - C_{t^0}(t, t - \Delta t)] + \Delta^t \sigma C_{t^0}(t + \Delta t, t). \quad (4.105)$$

В данное соотношение подставим зависимость (4.97), предварительно преобразованную к виду

$$C_{t^0}(t, \tau) = f_{ct^0}(\sigma) \sum_{n=1}^3 F_n(t) H_n(\tau), \quad (4.106)$$

где $F_1(t) = 1$; $F_2(t) = e^{-\gamma t^*}$; $F_3(t) = e^{-bt}$;

$H_1(\tau) = \Theta_{t^0}(\tau)$; $H_2(\tau) = \Theta_{t^0}(\tau) \beta_{t^0} e^{\gamma \tau^*}$; $H_3(\tau) = \Theta_{t^0}(\tau) (1 - \beta_{t^0}) e^{b \tau^*}$.

В результате $\Delta^t \epsilon_b$ представляется суммой трех слагаемых $\Delta^t \epsilon_b^n$ ($n = 1, 2, 3$), каждое из которых после некоторых преобразований может быть определено по рекуррентной формуле

$$\Delta^t \epsilon_b^n = \Delta^t \sigma f_{ct^0}(\sigma) F_n(t + \Delta t) H_n(t) + \frac{F_n(t + \Delta t) - F_n(t)}{F_n(t) - F_n(t - \Delta t)} \times [\Delta^{t-\Delta t} \epsilon_b^n - \Delta^{t-\Delta t} \sigma f_{ct^0}(\sigma) F_n(t - \Delta t) H_n(t - \Delta t)] \times F_n(t - \Delta t) H_n(t - \Delta t). \quad (4.107)$$

Полные деформации могут быть установлены с помощью шаговой процедуры

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_b = {}^t\varepsilon_b + \Delta{}^t\varepsilon_b \quad (4.108)$$

При этом отпадает необходимость хранения информации о своей предыстории нагружения (на это обращено внимание в [202], [132], [91]). Достаточно располагать сведениями лишь о предшествующей ступени.

Формула (4.107) может быть использована и применительно к зависимостям (4.102), (4.103), которые в данном случае также необходимо представить в виде (4.106), где, однако,

$$F_1(t) = 1; F_2(t) = \frac{\psi_f \bar{\sigma}(t)}{e^{\gamma t^*} - A_f}; F_3(t) = -e^{-bt^*};$$

$$H_1(\tau) = \Theta_f(\tau); H_2(\tau) = e^{-\tau^*} - A_f; H_3(\tau) = \Delta_{\sigma}(\tau)e^{bt^*} \quad (4.109)$$

Зависимость (4.107) можно использовать не только для ступенчато возрастающих режимов, но и когда в процессе нагружения имеются разгрузочные ступени. На этих ступенях следует принять $f_{\sigma}(\sigma) = 1$.

Ползучесть при переменных температурах и напряжениях.

Меру ползучести, являющуюся функцией четырех величин (σ , t^* , τ^* и t^0) ниже обозначим

$$C_{\sigma}(\sigma, t, \tau) = C(\sigma, t^*, \tau^*, t^0) \quad (4.110)$$

Пусть задан двухступенчатый режим приложения напряжений и температуры (τ_1^* , τ_2^*) -- приведенные значения времени приложения ступеней напряжений $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ и ступеней температуры Δt_1^0 , Δt_2^0 . Для определения ползучести в этих условиях может быть использован принцип, заложенный в формуле (4.62). При $t^* > \tau_2$

$$\varepsilon_2(t^*) = \Delta\sigma_1^* C(\Delta\sigma_1, t^*, \tau_1^*, \Delta t_1^0) + (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2) * C(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2, t^*, \tau_2^*, \Delta t_2^0) - \Delta\sigma_1^* C(\Delta\sigma_1, t^*, \tau_2^*, \Delta t_1^0) \quad (4.111)$$

Аналогично для трехступенчатого режима

$$\varepsilon_3(t^*) = \varepsilon_2(t^*) + (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3) * C(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3, t^*, \tau_3^*, \Delta t_3^0 + \Delta t_2^0 + \Delta t_1^0) - (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2) * C(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2, t^*, \tau_3^*, \Delta t_1^0 + \Delta t_2^0) \quad (4.112)$$

Приращения деформаций при $t^* > \tau_3$ составляет

$$\Delta\varepsilon_3(t^*) = \varepsilon_3(t^*) - \varepsilon_2(\tau_3) \quad (4.113)$$

Формулы (4.112) - (4.113) еще не удобны для использования, поскольку требуют хранения всей информации о ступенях нагружения. Этот недостаток можно устранить, используя разложения (4.109) и сводя задачу к задаче типа (4.107). Существенно уменьшить объем хранимой информации можно также на основе трансформирования (см. п. 4.3).

Результаты расчетов. Вычислим деформации ползучести при

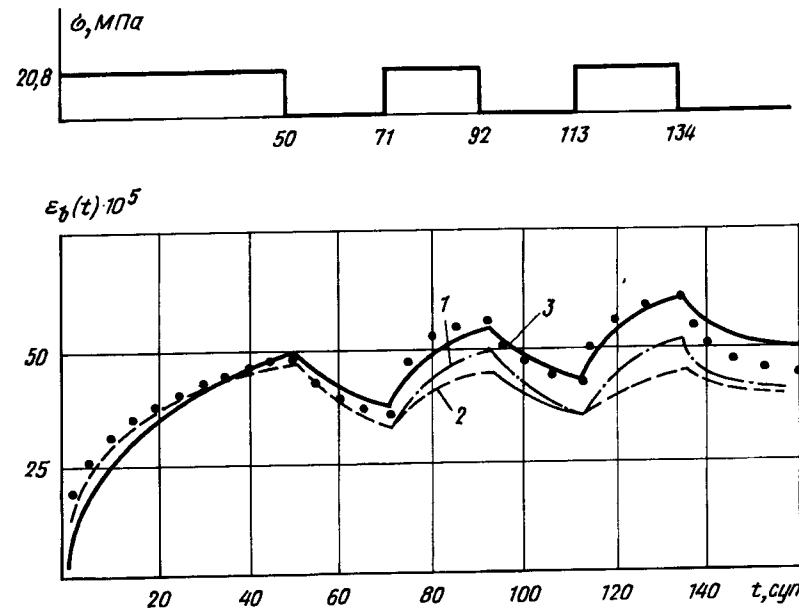


Рис. 4.20. Деформации ползучести бетона при сложном режиме нагружения ● — опыт [171]; 1 — расчет по [66]; 2 — расчет по [140]; 3 — расчет по предлагаемым зависимостям [89]

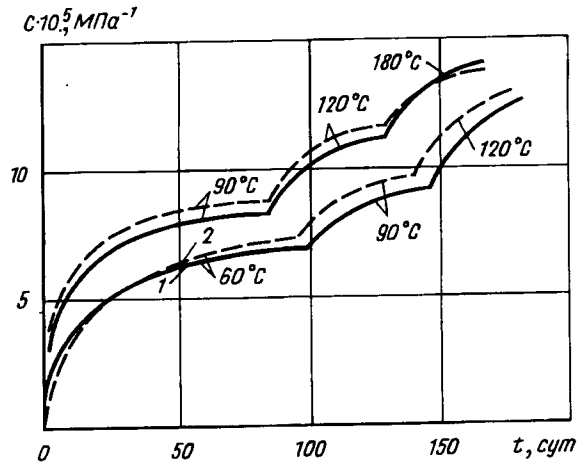


Рис. 4.21. Деформации ползучести высыхающего бетона при ступенчато-возрастающем температурном режиме 1 — расчет; 2 — опыт [97]

некоторых режимах нагружения и нагрева и сопоставим их с опытными данными. В первом примере рассмотрим случай ступенчатого приложения нагрузки к зрелому бетону при $t = 20^\circ\text{C}$ (рис. 4.20). Кроме расчетных значений, найденных по формуле (4.107), на том же рисунке показаны деформации ползучести, вычисленные по методикам [66, 140], а также опытные данные из опытов А.В. Яшина и др. Видим, что предлагаемая методика лучше отражает реальный процесс. Имеющиеся отклонения находятся в пределах погрешностей принципа наложения. Во втором примере (рис. 4.21) определялись удельные деформации ползучести высыхающего бетона при ступенчато возрастающем температурном режиме, вычисленные по формуле (4.111). На рисунке приведены также опытные данные [97]. Видим, что использование соотношений (4.111) приводит к достаточно надежным результатам.

4.6. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ТРЕЩИНОВАТОГО БЕТОНА

В п. 3.8 уже рассматривался вывод физических соотношений для модели трещиноватого бетона при трехосном растяжении. Однако этот вывод относился к кратковременному действию напряжений. Повторим этот вывод следуя [91] с учетом деформаций ползучести бетона (случай одноосного растяжения уже рассматривался в п. 1.2). Примем, что трещины образуются по схеме рис. 3.16, и представим сначала, что бетонный элемент на указанном рисунке нагружается во времени двумя ступенями возрастающих трехосных напряжений, где $\sigma_1(\tau_1), \sigma_2(\tau_1), \sigma_3(\tau_1)$ — первая ступень; $\sigma_1(\tau_2), \sigma_2(\tau_2), \sigma_3(\tau_2)$ — вторая ступень [сокращенно $\sigma_e(\tau_j)$, где здесь и ниже $e = 1, 2, 3$ — номера главных напряжений, τ_j — время приложения ступеней, в нашем случае $i = 1, 2$]. Здесь $\sigma_e(\tau_j)$ — общие напряжения; приращение напряжений на второй ступени составит

$$\Delta \sigma_e(\tau_2) = \sigma_e(\tau_2) - \sigma_e(\tau_1).$$

Напряжения $\sigma_e(\tau)$ являются сглаженными. Им соответствуют, как это подробно рассмотрено в п. 3.8, реальные напряжения $\sigma_e^*(\tau_j)$ в сплошных частях сечений (см. рис. 3.16). Предположим сначала, что реализуется синхронизированное (с приложением напряжений) подрастание трещин. тогда ступени $\sigma_e(\tau_1)$ будут соответствовать размеры b_1^*, h_1^*, d_1^* , а ступени $\sigma_e(\tau_2)$ аналогичные размеры b_2^*, h_2^*, d_2^* (сокращенно b^*, h^*, d^*). Этими размерами характеризуются сплошные, еще не пронизанные трещинами, части общего объема элемента.

Связи между сглаженными и реальными напряжениями следуют из проекций сил, приложенных к граням элемента (см. рис. 3.16), на оси главных напряжений 1, 2, 3. По аналогии с (3.140) эти связи можно записать в виде:

$$\sigma_1^*(\tau_j) = \frac{\sigma_1(\tau_j)}{\nu_{b1}(\tau_j)}; \quad \sigma_2^*(\tau_j) = \frac{\sigma_2(\tau_j)}{\nu_{b2}(\tau_j)}$$

$$\sigma_3^*(\tau_j) = \frac{\sigma_3(\tau_j)}{\nu_{b3}(\tau_j)}$$

$$\text{(сокращенно } \sigma_e^*(\tau_j) = \frac{\sigma_e(\tau_j)}{\nu_{be}(\tau_j)},$$

$$\nu_{b1}(\tau_j) = \frac{b_j^* h_j^*}{bh}; \quad \nu_{b2}(\tau_j) = \frac{d_j^* h_j^*}{dh};$$

$$\nu_{b3}(\tau_j) = \frac{b_j^* d_j^*}{bd}$$

Приращения реальных напряжений на второй ступени составят

$$\Delta \sigma_e^*(\tau_2) = \sigma_e^*(\tau_2) - \sigma_e^*(\tau_1)$$

или, внося значения (4.114),

$$\Delta \sigma_e^*(\tau_2) = \frac{\sigma_e(\tau_2)}{\nu_{be}(\tau_2)} - \frac{\sigma_e(\tau_1)}{\nu_{be}(\tau_1)}. \quad (4.116)$$

Приращение напряжений на любой (j) ступени ($e = 1, 2, 3$) составит

$$\Delta \sigma_e^*(\tau_j) = \frac{\sigma_e(\tau_j)}{\nu_{be}(\tau_j)} - \frac{\sigma_e(\tau_{j-1})}{\nu_{be}(\tau_{j-1})}. \quad (4.117)$$

Перейдем к определению деформаций. Предположим, что соотношения между реальными $\sigma_e^*(\tau)$ напряжениями и относительными деформациями можно представить в виде соотношений наследственной теории старения Г.Н. Маслова — Н.Х. Арутюняна. Например, деформации вдоль действия главных напряжений $\sigma_1(\tau)$ в момент времени t составят

$$\varepsilon_1^*(t) = [\sigma_1^*(\tau_1) - \mu_b(\tau_1)(\sigma_2^*(\tau_1) + \sigma_3^*(\tau_1))] \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \{d\sigma_1^*(\tau) / d\tau - \mu_b(\tau)d/d\tau [(\sigma_2^*(\tau) + \sigma_3^*(\tau))]\} \delta(t, \tau) d\tau; \quad (4.118)$$

остальные деформации ($\varepsilon_2^*(t), \varepsilon_3^*(t)$) получают круговой перестановкой индексов 1, 2, 3: при определении $\varepsilon_2^*(t)$ индексы 1, 2, 3 заменяются на 2, 3, 1, а при вычислении $\varepsilon_3^*(t)$ индексы 2, 3, 1 (или 1, 2, 3) заменяются на 3, 1, 2; $\mu_b(\tau)$ — коэффициент поперечной деформации; $\delta(t, \tau)$ — мера полной относительной деформации; она

указана, например, в п. 4.3; τ — время приложения приращений $\Delta \sigma_e(\tau)$.

В основу вывода уравнений (4.118) положен принцип наложения воздействий. Согласно этому принципу каждому приращению (импульсу) напряжений $\Delta \sigma_e^*(\tau_j)$ соответствуют свои переменные во времени приращения деформаций $\Delta \epsilon_e^*(t, \tau_j)$, а общие деформации $\epsilon_e^*(t)$ получают в виде суммы приращений $\Delta \epsilon_e^*(t, \tau_j)$. Например, приращения деформаций вдоль действия $\Delta \sigma_1^*(\tau_j)$ составят

$$\Delta \epsilon_1^*(t, \tau_j) = [\Delta \sigma_1^*(\tau_j) - \mu_b(\tau_j)(\Delta \sigma_2^*(\tau_j) + \Delta \sigma_3^*(\tau_j))] \delta(t, \tau_j) \quad (4.119)$$

(остальные приращения $\Delta \epsilon_2^*(t, \tau_j)$, $\Delta \epsilon_3^*(t, \tau_j)$ получают круговой перестановкой индексов 1, 2, 3).

Соотношения (4.119) относятся к частям элемента без трещин. Изрезанные прорезами части элемента можно разделить на две области. Одна область в виде столбиков (см. рис. 3.16, а, г) может воспринимать только одноосные напряжения, тогда как по двум боковым граням — берегам трещин каждого столбика напряжения обращаются в нуль; происходит их мгновенная разгрузка в результате трещинообразования.

Во второй области напряжения обращаются в нуль на всех гранях из-за образования трещин по трем ортогональным направлениям. Рассмотрим области в виде столбиков. Например, в столбике направления 1 (условно в столбиках 1) остаются напряжения $\sigma_1(\tau)$ и их приращения $\Delta \sigma_1(\tau_j)$, а напряжения $\sigma_2(\tau)$, $\sigma_3(\tau)$ обращаются в нуль. Разгрузка напряжений $\sigma_2(\tau)$, $\sigma_3(\tau)$ через коэффициенты поперечной деформации оказывает влияние на деформации вдоль напряжения 1. Сначала уменьшаются до нуля поперечные упругомгновенные деформации, а затем (во времени) уменьшаются поперечные деформации ползучести, вследствие упругого последствия. Однако такой сложной картиной уменьшения поперечных деформаций пренебрегаем, полагая что в столбиках типа 1 приращения деформаций вдоль оси 1 (эти приращения обозначаем $\Delta \tilde{\epsilon}_1^*(t, \tau_j)$) можно определить по формуле

$$\Delta \tilde{\epsilon}_1^*(t, \tau_j) = \Delta \sigma_1^*(\tau_j) \delta(t, \tau_j); \quad (4.120)$$

заменяя индекс 1 на 2 или 3 получим

$$\Delta \tilde{\epsilon}_2^*(t, \tau_j) \text{ или } \Delta \tilde{\epsilon}_3^*(t, \tau_j).$$

Величины $\Delta \epsilon_e^*(t, \tau_j)$ и $\Delta \tilde{\epsilon}_e^*(t, \tau_j)$ представляют относительные деформации в отдельных частях элемента. Приращения деформаций всего элемента на j -й ступени определяются по формулам типа (3.142),

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_1(t, \tau_j)d &= \Delta \epsilon_1^*(t, \tau_j)d_j^* + \Delta \tilde{\epsilon}_1^*(t, \tau_j)(d - d_j^*); \\ \Delta \epsilon_2(t, \tau_j)b &= \Delta \epsilon_2^*(t, \tau_j)b_j^* + \Delta \tilde{\epsilon}_2^*(t, \tau_j)(b - b_j^*); \\ \Delta \epsilon_3(t, \tau_j)h &= \Delta \epsilon_3^*(t, \tau_j)h_j^* + \Delta \tilde{\epsilon}_3^*(t, \tau_j)(h - h_j^*). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Если внести в (4.119) и (4.120) значения $\Delta \sigma_e^*(\tau_j)$ из (4.116), а затем полученные выражения для $\Delta \epsilon_e^*(t, \tau_j)$ и $\Delta \tilde{\epsilon}_e^*(t, \tau_j)$ подставив в (4.121), можно получить:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_1(t, \tau_j) &= \left\{ \frac{\sigma_1(\tau_j)}{\nu_{b1}(\tau_j)} - \frac{\sigma_1(\tau_{j-1})}{\nu_{b1}(\tau_{j-1})} - \mu_b(\tau_j) \times \right. \\ &\times \left[\left(\frac{\sigma_2(\tau_j)}{\nu_{b12}(\tau_j)} - \frac{\sigma_2(\tau_{j-1})}{\nu_{b12}(\tau_{j-1})} \right) + \left(\frac{\sigma_3(\tau_j)}{\nu_{b13}(\tau_j)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\sigma_3(\tau_{j-1})}{\nu_{b13}(\tau_{j-1})} \right) \right] \delta(t, \tau_j); \end{aligned} \quad (4.122)$$

остальные деформации $\Delta \epsilon_2(t, \tau_j)$, $\Delta \epsilon_3(t, \tau_j)$ получают круговой перестановкой индексов: в первом случае индексы 1, 2, 3 заменяются соответственно на 2, 3, 1, а во втором — на 3, 1, 2.

В (4.122) введены обозначения:

$$\begin{aligned} \nu_{b12}(\tau_j) &= \nu_{b21}(\tau_j) = h_j^*/h; \\ \nu_{b13}(\tau_j) &= \nu_{b31}(\tau_j) = b_j^*/b; \\ \nu_{b23}(\tau_j) &= \nu_{b32}(\tau_j) = d_j^*/d, \end{aligned} \quad (4.123)$$

кроме того, при записи параметров $\nu_{bij}(\tau_{j-1})$ при $i \neq j$ полагали $d_{j-1}^*/d_{j-1}^* \approx b_{j-1}^*/b_{j-1}^* \approx h_{j-1}^*/h_{j-1}^* \approx 1$.

Суммируя деформации $\Delta \epsilon_e(t, \tau_j)$, приходим к общим деформациям $\epsilon_e(t)$. В интегральной форме эти деформации представляются

$$\begin{aligned} \epsilon_1(t) &= \left[\frac{\sigma_1(\tau_1)}{\nu_{b1}(\tau_1)} - \mu_b(\tau) \left(\frac{\sigma_2(\tau_1)}{\nu_{b2}(\tau_1)} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_3(\tau_1)}{\nu_{b3}(\tau_1)} \right) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sigma_1(\tau)}{\nu_{b1}(\tau)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \mu_b(\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\sigma_2(\tau)}{\nu_{b12}(\tau)} + \frac{\sigma_3(\tau)}{\nu_{b13}(\tau)} \right] \right\} \delta(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.124)$$

(значения $\epsilon_e(t)$ и $\epsilon_3(t)$ получают круговой перестановкой индексов 1, 2, 3). В принципе, кроме $\mu_b(\tau)$ можно вводить меру поперечных деформаций $\mu_b(t, \tau)$, однако более приемлемым является упрощение типа $\mu_b(\tau) \approx \mu_b^* \approx \text{const}$.

Как уже было показано в п. 3.8, соотношения (4.122), (4.124) не изменяются, если предположить, что напряжения $\sigma_e(\tau)$ не являются главными. Важно только, чтобы они совпадали с направлениями микротрещин. Однако при этом соотношения (4.124) дополняются тремя новыми зависимостями. По аналогии с (3.146) можно установить, что

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}(t) = & \left(\frac{\tau_{ij}(\tau_1)}{\nu_{bi}(\tau_1)} + \frac{\tau_{ij}(\tau_1)}{\nu_{bj}(\tau_1)} \right) \times \\ & \times [1 - \mu_b(\tau_1)] \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t [1 - \mu_b(\tau)] \times \\ & \times \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\tau_{ij}(\tau)}{\nu_{bi}(\tau)} + \frac{\tau_{ij}(\tau)}{\nu_{bj}(\tau)} \right] \delta(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.125)$$

где τ_{ij} — касательные напряжения ($ij = 12, 23, 31$); $\gamma_{ij}(t)$ — относительные сдвиги.

Таким образом приходим к ортотропной модели деформирования бетона в условиях ползучести. Если проанализировать более общую схему трещинообразования, представленную на рис. 3.18, то можно прийти к соотношениям типа (4.124), (4.125), но с несколькими иными параметрами.

Уравнения (4.124), (4.125) — нелинейные, поскольку параметры нарушения сплошности предполагались зависимыми от уровня напряжений (условно от $\sigma(\tau)$; т.е. $\nu_{be}(\tau) = \nu_{be}[\sigma(\tau)]$; $\nu_{bek}(\tau) = \nu_{bek}[\sigma(\tau)]$). Такой случай развития внутренних трещин в п. 3.8 относился к синхронизированному. Применительно к одноосному растяжению этот случай рассмотрен в п. 1.5. Ему соответствует схема изменения сплошности во времени, показанная на рис. 1.13, а. Однако возможна и более сложная схема изменения сплошности во времени, представленная в частном случае одноосного растяжения на рис. 1.13, б. Такая схема уже не является синхронизированной. Согласно этой схеме в момент τ нарушение сплошности зависит не только от напряжений или их уровней, соответствующих времени τ , но и от напряжений, предшествовавших τ , а также режима их приложения (реализуется некоторая более общая схема накопления нарушений сплошности).

Полагаем, что указанные факторы отражаются в зависимости

$$\begin{aligned} \nu_{be}(\tau) &= \nu_{be}[\sigma(\tau - \tau_1), (\tau - \tau_1)]; \\ \nu_{bek} &= \nu_{bek}[\sigma(\tau - \tau_1), (\tau - \tau_1)]. \end{aligned}$$

Конкретные значения этих параметров еще требуют исследования. Что касается уравнений (4.124), (4.125), то они по форме не изменяются. Рассмотренные схемы трещинообразования позволяют более осмысленно подходить к построению реальных физических соотношений для бетона с учетом деформаций ползучести.

Рассмотрим вывод связей между напряжениями и деформациями для трехмерных железобетонных элементов до появления в них трещин. Физические соотношения для железобетонных элементов без трещин устанавливались в работах Ф. Флюге [158], Г.А. Гениева, В.Н. Киссюка, Г.А. Тюпина [41], Н.И. Карпенко [56, 64], В.А. Носарева [129], В.М. Круглова [102] и в других работах. Способы учета распределенного армирования на жесткость железобетонных элементов до появления в них трещин по исходным предположениям приближаются к некоторым способам определения эффективных механических характеристик композитных материалов; в первую очередь способом, рассмотренным в работах В.В. Болотина [24, 25].

Во всех построениях моделей деформирования железобетонных элементов без трещин принимается условие совместности осевых деформаций арматуры и соответствующих линейных деформаций бетона. Особенности данного построения заключаются в способах учета таких факторов, как: влияние арматуры на жесткость железобетона при сдвиге, влияние арматуры на жесткость элементов в направлениях, поперечных к направлениям стержней, влияние ослаблений бетона каналами арматуры, влияние дополнительной косо устанавливаемой арматуры.

В связи с введением в модели тех или иных факторов меняются и способы вывода физических соотношений. При выводе соотношений здесь в основном следуем статьям [56, 64].

5.1. АРМИРОВАНИЕ. ИСХОДНЫЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМАТУРЫ

Характеристики армирования. Выделим две общие схемы армирования в виде некоторых объемных каркасов (рис. 5.1, а) и в виде «потока» стержней, наклонно расположенных к координатам x, y, z (рис. 5.1, б). В объемных каркасах стержни располагаются с определенными шагами a_x, a_y, a_z соответственно вдоль координат x, y, z (это армирование еще называют ортотропным). Расстояния между наклонными стержнями обозначаются a_1, a_2 . Каждое направление стержней ($i = x, y, z, j$) характеризуется коэффициентом армирования μ_{si} , который равен площади стержней, приходящейся на единицу площади площадки, проведенной нормально к направлению i . Согласно рис. 5.1, а

$$\mu_{sx} = \frac{A_x}{a_y a_z}; \quad \mu_{sy} = \frac{A_y}{a_x a_z}; \quad \mu_{sz} = \frac{A_z}{a_x a_y}, \quad (5.1)$$

согласно рис. 5.1, б

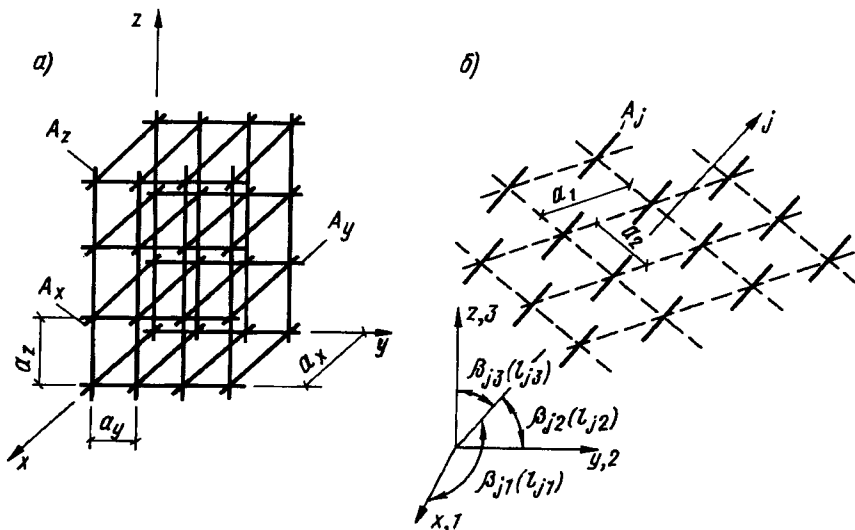


Рис. 5.1. Схемы армирования а — ортотропное; б — наклонное (произвольно-ориентированное)

$$\mu_{sj} = \frac{A_j}{a_1 a_2}, \quad (5.2)$$

где A_i — площади отдельных стержней соответствующего i -го направления.

Наклонные стержни характеризуются еще тремя углами их наклона к выбранным осям $i = x, y, z$ или их косинусами l_{ji} — направляющими косинусами (см. табл. 1.4). Указанные два вида армирования могут применяться раздельно и совмещаться один с другим. В принципе все виды армирования можно получать, построив соотношения для потока наклонных стержней. Однако ортотропное армирование наиболее распространенное, поэтому выделено отдельно.

К отдельным направлениям указанного выше некоторого регулярного армирования могут добавляться отдельные дискретно устанавливаемые стержни арматуры. Такая арматура может учитываться двумя способами: введением специального конечного элемента, включающего дискретный стержень, введением добавок $\Delta \mu_{si}$ к соответствующим коэффициентам армирования μ_{si} ,

$$\text{где } \Delta \mu_{si} = A_i^{(n)}/s_i^{(n)} \text{ или } \Delta \mu_{si} = V_{si}^{(n)}/V_s, \quad (5.3)$$

где A_i — площадь одиночного стержня i -го направления; s_i — максимальное сечение конечного элемента, нормальное к i ; V_{si} — объем дискретных стержней в конечном элементе; V_s — объем конечного элемента.

Исходные механические характеристики арматуры. Исходя из некоторых особенностей представления механических характеристик

тик и последующего описания диаграмм связи между напряжениями и деформациями арматурные стали могут быть разделены на два вида: без физической площадки текучести (класс А-IIIв, А-IV и выше и проволочная арматура), с физической площадкой текучести (стержневая классов А-I, А-II, А-III).

Арматура обоих видов характеризуется следующими исходными механическими величинами: E_s — модулем упругости (начальным модулем деформации); $\sigma_{s,el}$ — напряжением предела упругости; $\sigma_{0,2} = (R_s, R_{s,ser})$ — напряжением условного предела текучести (соответствует остаточным деформациям после линейной разгрузки, равным 0,2% или $2 \cdot 10^{-3}$); $\sigma_{su} = (R_{su,ser}, R_{su})$ — напряжением при разрыве, σ_{su} еще обозначим $\hat{\sigma}_s$. В скобках приводятся величины, которые используются в расчетах конструкций: $R_{s,ser}, R_{su,ser}$ — по второй группе предельных состояний; R_s, R_{su} — по первой группе. Значения $E_s, R_s, R_{s,ser}$ — указаны в СНиП 2.03.01-84 ($R_{s,ser} = R_{s,n} \gamma_{si}$, где $R_{s,n}$ — нормативное сопротивление арматуры, γ_{si} — коэффициент условия работы арматуры; как правило, для арматуры $\gamma_{si} = 1$, поэтому $R_{s,ser} = R_{sn}; R_s = R_{sn}/\gamma_s$, где γ_s — коэффициент надежности по арматуре, принимаемый согласно табл. 21 СНиП 2.03.01-84; по аналогии $R_{su} = R_{su,n}/\gamma_s$, где $R_{su,n}$ — нормативное сопротивление при разрыве; $R_{su} = R_{su,n}$. Нормативные величины R_{sn} определяются с обеспеченностью 2σ , где σ — среднеквадратичные отклонения (их значения приведены в ГОСТах по арматуре). Отсюда связь средних значений $\sigma_{0,2}$ с нормативными осуществляется по формуле

$$\sigma_{0,2} = R_{sn} + 2\sigma. \quad (5.4)$$

Эта же формула используется при установлении связи между величинами $\hat{\sigma}_s$ и $R_{su,n} = R_{s,ser}$. Модуль E_s во всех расчетах принимается без изменения. Его значения приведены в табл. 29 СНиП 2.03.01-84.

Связь между пределом упругости и пределом пластичности осуществляется через параметр $\eta_{s,el}$

$$\sigma_{s,el} = \sigma_{s,02} \eta_{s,el}. \quad (5.5)$$

В расчетах ($\sigma_{s,el} = R_{s,ser} \eta_{s,el}$ или $\sigma_{s,el} = R_s \eta_{s,el}$, параметр $\eta_{s,el}$ при этом не меняется).

Важной характеристикой арматуры является величина $\epsilon_{su,n}$ — нормативное относительное удлинение при разрыве, расчетное значение $\epsilon_{su} = \epsilon_{su,n} - (R_{su,n} - R_{su})/E_s$; среднее значение $\epsilon_{su} = \epsilon_{su,n} + (\sigma_{su,n} - R_{su,n})/E_s$ (ϵ_{su} еще обозначим $\hat{\epsilon}_s$).

Величины $\eta_{s,el}, R_{su,n}, \epsilon_{su,n}$ определяются по табл. 5.1 и 5.2 (таблицы составлены по данным С.А. Мадатяна, Т.И. Мамедова и Н.М. Мулина). Для арматуры с физической площадкой текучести вводятся дополнительные характеристики, соответствующие концу площадки текучести, и характеристики промежуточной точки на ветви упрочнения, которые указаны ниже.

Таблица 5.1

Вид и класс арматуры	Дополнительная характеристика стержневой арматуры		
	Уровень предела упругости $\eta_{s,el}$	Нормативное сопротивление разрыву $R_{su,n}$ и расчетное сопротивление разрыву $R_{su,ser}$ для предельных состояний второй группы, МПа	Относительное удлинение при разрыве $\epsilon_{su,n}$
1	2	3	4
Стержневая горячекатаная: круглая класса А-1 периодического профиля классов:	—	373	0,25
А-П	—	490	0,19
А-Ш	—	590	0,14
А-1У	0,4*	883	0,06
А-У	0,5	1030	0,07
А-У1	0,6	1230	0,06
Стержневая термически упрочненная классов:			
Ат-1У	0,65**	785**	0,1
Ат-У	0,65	980	0,08
Ат-У1:			
диаметром, мм:			
10–14	0,6	1230	0,06
16–32	0,6	1180	0,07
Стержневая упрочненная вытяжкой класса:			
А-Шв	0,75	590	0,1

* для стали марки 80С (А-1У) $\eta_{s,el} = 0,74$.

** для стали марки 25Г2с (А-1У) $\eta_{s,el} = 0,74$; $R_{su,n} = 834$ МПа.

Примечание: В месте сварных соединений диаграммы деформирования арматуры разрешается использовать только до деформаций $\epsilon_s \leq 10^{-2}$.

Таблица 5.2

Вид и класс арматуры	Дополнительная характеристика проволочной арматуры		
	Уровень предела упругости $\eta_{s,el}$	Нормативное сопротивление разрыву $R_{su,n}$ и расчетное сопротивление разрыву $R_{su,ser}$ для предельных состояний второй группы, МПа	Относительное удлинение при разрыве $\epsilon_{su,n}$
1	2	3	4
Обыкновенная арматурная проволока Вр-1 диаметром, мм:			
3	0,6	545	0,02
4	0,6	540	0,025
5	0,6	525	0,03

Продолжение табл. 5.2

1	2	3	4
Высокопрочная арматурная проволока: гладкая класса В-П диаметром, мм:			
3	0,8	1860	0,04
4	0,8	1760	0,04
5	0,8	1665	0,04
6	0,8	1565	0,05
7	0,8	1470	0,06
8	0,8	1370	0,06
периодического профиля класса Вр-П диаметром, мм:			
3	0,8	1815	0,04
4	0,8	1715	0,04
5	0,8	1570	0,04
6	0,8	1470	0,05
7	0,8	1370	0,06
8	0,8	1275	0,06
арматурные канаты К-7 диаметром, мм:			
6	0,65	1810	0,03
9	0,65	1715	0,03
12	0,65	1660	0,04
15	0,65	1620	0,04

Диаграммы деформирования арматуры без физической площадки текучести. Диаграммы деформирования арматуры, как и бетона, являются исходной базой для построения общих моделей и методов расчета железобетонных конструкций. В настоящее время в литературе приводится много предложений по построению диаграмм. Обзор соответствующих предположений можно встретить в работах [74, 113, 124]. В данной работе используются зависимости, разработанные в [74]. Согласно этому предположению связь между напряжениями σ_s и деформациями ϵ_s арматурных стержней при одноосном растяжении осуществляется по формулам:

$$\epsilon_s = \sigma_s / E_s \nu_s \quad (5.6)$$

ИЛИ

$$d \epsilon_s = d \sigma_s / E_s \nu_s^k \quad (5.7)$$

где ν_s — коэффициент изменения секущего модуля; ν_s^k — коэффициент изменения касательного модуля,

$$\nu_s = \hat{\nu}_s + (\nu_0 - \hat{\nu}_s) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}, \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{\nu_s^k} = \frac{1}{\nu_s} + \frac{\sigma_s (\nu_0 - \hat{\nu}_s) (\omega_1 + 2 \omega_2 \eta)}{2 \nu_s^2 (\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}} \quad (5.9)$$

здесь $\nu_0 = \nu_s$ в начале диаграммы, $\nu = \hat{\nu}_s$ — в вершине диаграммы,

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= 1; \quad \hat{\sigma}_s = \sigma_{su}; \quad \hat{\varepsilon}_s = \varepsilon_{su}, \\ \hat{\nu}_s &= \hat{\sigma}_s / E_s \hat{\varepsilon}_s, \\ \eta & - \text{уровень напряжений; при } \sigma_s < \sigma_{s,el} \eta = 0, \text{ при } \sigma_s > \sigma_{s,el} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$\eta = (\sigma_s - \sigma_{s,el}) / (\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el}); \quad (5.11)$$

параметр ω_1 подробно рассмотрен в [80],

$$\omega_1 = \frac{(\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 (\eta_{02} - 1) + (\nu_{02} - \hat{\nu}_s)^2}{\eta_{02} (\eta_{02} - 1) (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2}, \quad (5.12)$$

$\omega_1 \leq 2$, в случае $\omega_1 > 2$ следует учитывать дополнительные рекомендации, изложенные выше; $\eta_{0,2}$ и $\nu_{0,2}$ уровни напряжений и коэффициенты секущего модуля, соответствующие условным пределам текучести (точка a на линиях рис. 5.2):

$$\left. \begin{aligned} \eta_{02} &= \frac{\sigma_{02} - \sigma_{s,el}}{\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el}}; \\ \nu_{02} &= \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{02} + 0,002 E_s} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Уровни напряжений η и $\eta_{0,2}$ отсчитывают от напряжений предела упругости. Относительные деформации арматуры, соответствующие пределу текучести,

$$\varepsilon_{0,2} = \sigma_{0,2} / E_s \nu_{0,2}. \quad (5.14)$$

Коэффициент ν_s с использованием уровня относительных деформаций определяют из решения квадратного уравнения

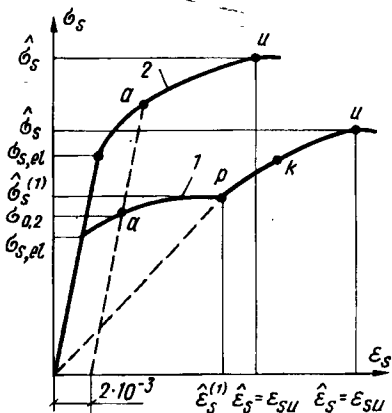


Рис. 5.2. Диаграммы деформирования арматуры 1 — с физической площадкой текучести; 2 — без физической площадки текучести

$$\begin{aligned} & \nu_s^2 \left[1 + \frac{\omega_2 (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \eta_d^2 \hat{\sigma}_s^2}{\hat{\nu}_s^2 (\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el})^2} \right] - \nu_s \left[2 \hat{\nu}_s - \frac{\eta_d (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \hat{\sigma}_s}{\hat{\nu}_s (\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el})} \right] \\ & \times \left(\omega_1 - \frac{2 \omega_2 \sigma_{s,el}}{\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el}} \right) + \hat{\nu}_s^2 - (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \\ & \times \left[1 + \frac{\omega_1 \sigma_{s,el}}{\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el}} - \frac{\omega_2 \sigma_{s,el}^2}{(\hat{\sigma}_s - \sigma_{s,el})^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Вывод уравнения (5.15) приведен в [74]; $\eta_d = \varepsilon_s / \hat{\varepsilon}_s$. При решении уравнения (5.15) перед квадратным корнем принимается знак плюс.

Для арматуры с физической площадкой текучести полная диаграмма растяжения разделяется на два участка, границей которых является точка $[\hat{\sigma}'_s, \hat{\varepsilon}'_s]$, соответствующая концу площадки текучести (точка p на линии 2 рис. 5.2). Координаты точки p

$$\hat{\sigma}_s \approx 1,01 \sigma_{0,2}; \quad \hat{\varepsilon}_s \approx \lambda_s + 1,01 \sigma_{0,2} / E_s, \quad (5.16)$$

здесь λ_s — относительная длина физической площадки текучести ($\lambda_s = 0,015$ — для арматуры класса А-I; $\lambda_s = 0,012$ — для арматуры класса А-II; $\lambda_s = 0,008$ — для арматуры класса А-III). До точки p диаграмма описывается с использованием формул (5.6)–(5.12), в которых $\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_s^{(1)}$, $\hat{\varepsilon}_s = \hat{\varepsilon}_s^{(1)}$. Кроме того,

$$\sigma_{s,el} \approx 0,97 \sigma_{0,2}.$$

В данном случае $\eta_{s,el} \approx 0,97$.

Второй участок диаграммы (см. рис. 5.1, $p - k - u$ продолжаетея от точки $p [\hat{\sigma}_s^{(1)}, \hat{\varepsilon}_s^{(1)}]$ до реальной вершины диаграммы u с координатами $\hat{\sigma}_s = \sigma_{su}$, $\hat{\varepsilon}_s = \varepsilon_{su}$, соответствующей разрыву арматуры (величины $\sigma_{su} = R_{su,n}$, $\hat{\varepsilon}_s = \varepsilon_{su,n}$ назначаются по табл. 5.1). На втором отрезке диаграммы вводится дополнительная точка k с координатами

$$\sigma_{s(k)} = 1,2 \sigma_{0,2}; \quad \varepsilon_{s(k)} = 1,6 \lambda_s + \sigma_{s(k)} / E_s. \quad (5.17)$$

Второй участок диаграммы описывается также с использованием зависимостей, указанных выше, где следует заменить

$$\left. \begin{aligned} \eta_{0,2} \text{ на } \eta_{(k)} &= (\sigma_{s(k)} - \hat{\sigma}_s^{(1)}) / (\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_s^{(1)}); \\ \nu_{0,2} \text{ на } \nu_{s(k)} &= \sigma_{s(k)} / E_s \varepsilon_{s(k)} \\ \text{и принять } \nu_0 &= \hat{\sigma}_s^{(1)} / E_s \hat{\varepsilon}_s^{(1)}; \\ \eta &= (\sigma_s - \hat{\sigma}_s^{(1)}) / (\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_s^{(1)}); \quad \eta_d = \varepsilon_s / \hat{\varepsilon}_s^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Заметим, что если для параметра ω_1 , вычисленного по формуле (5.12), нарушается условие $\omega_1 \leq 2$, то зависимость (5.8) становится справедливой только до уровня напряжений $\eta \leq \bar{\eta}$, где согласно [74]

$$\bar{\eta} = 0,92 (\omega_1 - 1).$$

Выше уровня \bar{z} вплоть до вершины можно вводить линейный отрезок диаграммы. Практически условие $\omega_1 \leq 2$ может нарушаться для арматуры 80С из класса А-IV.

Объемное напряженное состояние арматуры. В общем случае (в объемных железобетонных элементах) в арматурных стержнях может возникать напряженное состояние, которое будет характеризоваться шестью компонентами напряжения. Например, для арматурных стержней, расположенных вдоль оси z , компоненты объемного напряжения в декартовых осях x, y, z составят: $\sigma_{sx}^z, \sigma_{sy}^z, \sigma_{sz}^z$ (σ_{sz}^z), $\tau_{sxy}^z = \tau_{syz}^z, \tau_{szy}^z = \tau_{syz}^z, \tau_{syz}^z = \tau_{syz}^z$ (рис. 5.3, а); верхний индекс, в данном случае z , указывает на координатную ось, вдоль которой расположен арматурный стержень; при основном — осевом напряжении σ_{sz}^z верхний индекс опускается.

Напряженное состояние арматуры также может характеризоваться в цилиндрической системе координат z, r, θ (рис. 5.3, б). В этом случае в представленных выше обозначениях индекс x заменяется на индекс r , а y на θ .

Упругая стадия деформирования арматуры характеризуется традиционными связями между напряжениями и деформациями — в виде закона Гука для изотропных материалов:

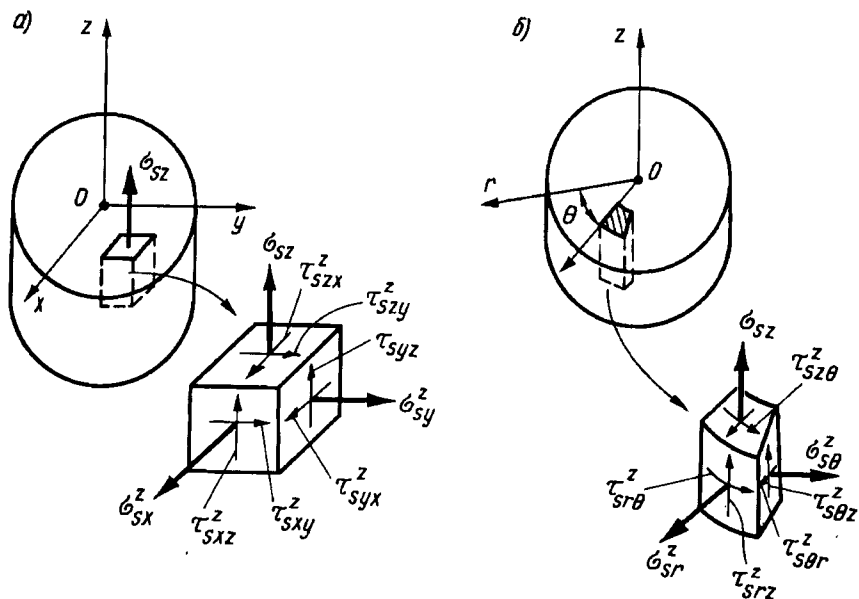


Рис. 5.3. Напряженное состояние арматуры

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{sx}^i &= -\frac{1}{E_{si}^0} [\sigma_{sx}^i - \nu_{s\pi i}^0 (\sigma_{sz}^i + \sigma_{sy}^i)]; \\ \epsilon_{sy}^i &= -\frac{1}{E_{si}^0} [\sigma_{sy}^i - \nu_{s\pi i}^0 (\sigma_{sx}^i + \sigma_{sz}^i)]; \\ \epsilon_{sz}^i &= -\frac{1}{E_{si}^0} [\sigma_{sz}^i - \nu_{s\pi i}^0 (\sigma_{sx}^i + \sigma_{sy}^i)]; \\ \gamma_{sxy}^i &= \frac{\tau_{sxy}^i}{G_{si}^0}, \quad \gamma_{syz}^i = \frac{\tau_{syz}^i}{G_{si}^0}; \quad \gamma_{szx}^i = -\frac{\tau_{zxx}^i}{G_{si}^0}. \end{aligned} \right\} (5.19)$$

Здесь $i = x, y, z, j$ — направления установки арматуры; если верхний и нижний индексы при ϵ или σ совпадают, то, как указывалось выше, верхний индекс опускается: $\epsilon_{si}^i = \epsilon_{si}^i, \sigma_{si}^i = \sigma_{si}^i, E_{si}^0, G_{si}^0, \nu_{s\pi i}^0$ — соответственно модуль упругости (начальный модуль деформации), модуль сдвига и коэффициент поперечной деформации арматурных стержней i -го направления.

Соотношения, записанные в виде (5.19), распростираются и на упругопластическую стадию деформирования арматуры; в этом случае однако константы $E_{si}^0, \nu_{s\pi i}^0$ и G_{si}^0 заменяются на переменные величины $E_{si}, \nu_{s\pi i}, G_{si}$. Известно, что в деформационной теории пластичности модуль E_{si} представляет собой отношение интенсивности напряжений $\sigma_{si(i)}$ к интенсивности деформаций $\epsilon_{si(i)}$, т.е.

$$E_{si} = \sigma_{si(i)} / \epsilon_{si(i)}; \quad (5.20)$$

интенсивность здесь обозначается вторым индексом i в скобках, а первый индекс i указывает на направление стержней, причем (см., например [13], с. 120):

$$\sigma_{si(i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{sx}^i - \sigma_{sy}^i)^2 + (\sigma_{sy}^i - \sigma_{sz}^i)^2 + (\sigma_{sz}^i - \sigma_{sx}^i)^2} + 6 [(\tau_{sxy}^i)^2 + (\tau_{syz}^i)^2 + (\tau_{szx}^i)^2]; \quad (5.21)$$

$$\epsilon_{si(i)} = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \nu_{s\pi i})} \sqrt{(\epsilon_{sx}^i - \epsilon_{sy}^i)^2 + (\epsilon_{sy}^i - \epsilon_{sz}^i)^2 + (\epsilon_{sz}^i - \epsilon_{sx}^i)^2} + \frac{3}{2} [(\gamma_{sxy}^i)^2 + (\gamma_{syz}^i)^2 + (\gamma_{szx}^i)^2]$$

Зависимости (5.21) удобны тем, что в случае одноосного растяжения стержней интенсивность напряжения совпадает с осевым напряжением ($\sigma_{si}^i = \sigma_{si}^i$), а интенсивность деформации с осевой деформацией ($\epsilon_{si}^i = \epsilon_{si}^i$). При этом исходят из гипотезы единой

кривой [51]. Согласно этой гипотезе соотношения (5.6)–(5.18) по определению модуля $E_{si} = E_{si}^0 \nu_{si}$ считаются справедливыми для всех напряженных состояний, где лишь при определении ν_{si} текущие напряжения σ_{si} и текущие деформации ϵ_{si} необходимо заменять соответственно на интенсивности текущих напряжений и интенсивности текущих деформаций $\epsilon_{si(i)}$.

Применительно к арматуре во многих случаях может быть использован приближенный подход, упрощающий вычисление деформаций. Согласно этому подходу модуль деформации E_{si} и в случае объемного напряженного состояния продолжает определяться через связь между напряжениями σ_{si} и осевыми деформациями ϵ_{si} без учета влияния остальных компонент напряжений и деформаций на вид этой диаграммы. Эта предпосылка связана с преобладающим влиянием осевых компонент σ_{si} , ϵ_{si} над другими компонентами (обычно они на порядок и больше превышают остальные компоненты). Коэффициент поперечной деформации арматуры можно принять константой $\nu_{\sigma_{si}} \approx \nu_{\epsilon_{si}}^0 \approx 0,25 - 0,4$. Модуль сдвига G_{si} определяется по формуле

$$G_{si} = \frac{E_{si}}{2(1 + \nu_{\sigma_{si}})} \approx \frac{E_{si}^0 \nu_{si}}{2(1 + \nu_{\sigma_{si}}^0)} \approx (0,4 - 0,35) E_{si}^0 \nu_{si}. \quad (5.22)$$

В представленном приближенном подходе соотношения (5.19) считаются справедливыми, пока осевые напряжения σ_{si} возрастают. Разгрузка следует по линейному закону (при $E_{si} = E_{si}^0$). Сложный режим нагружения и разгрузки описывается по методике конечных приращений (см. 3.2).

В некоторых случаях, в основном при высоких уровнях трехосного сжатия железобетонных образцов, побочные напряжения могут становиться уже существенными. Тогда ν_{si} следует определять по формулам (5.6)–(5.18), заменяя осевые напряжения и деформации на интенсивности напряжений и деформаций. Запись физических соотношений в виде (5.19) не является единственной. Так, в упругопластической стадии деформирования соотношения (5.19) обычно представляют в виде [57]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{sk}^i - \epsilon_{s0}^i &= \frac{1}{2 G_{si}} (\sigma_{sk}^i - \sigma_{s0}^k); \\ \gamma_{skj}^i &= \tau_{skj}^i / G_{si} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

где $k = x, y, z$; $kj = xy, yz, zx$; $i = x, y, z$ — направления стержней; σ_{s0}^i — средние напряжения; ϵ_{s0}^i — средние деформации.

$$\epsilon_{s0}^i = \frac{\epsilon_{sx}^i + \epsilon_{sy}^i + \epsilon_{sz}^i}{3} \quad \sigma_{s0}^i = \frac{\sigma_{sx}^i + \sigma_{sy}^i + \sigma_{sz}^i}{3} \quad (5.24)$$

Часто коэффициенты поперечной деформации $\nu_{\sigma_{si}}$ принимают равными 0,5, при этом $\epsilon_{s0}^i = 0$.

Соотношения (5.23) справедливы на ветви нагрузки — в случае возрастания интенсивности напряжений $\sigma_{si(i)}$. Разгрузка осуществляется по линейному закону (при $G_{si} = G_{si}^0$). Сложный режим описывается по методике конечных приращений, используя нелинейную диаграмму $\epsilon_{si(i)} - \sigma_{si(i)}$ на ветви нагрузки и линейную диаграмму на ветви разгрузки.

5.2. ВЫВОД ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ОРТОТРОПНОМ АРМИРОВАНИИ

Приведенные напряжения. Связь общих напряжений с напряжениями в компонентах. Приведенные напряжения относятся к единице площадки, нормальной к данному направлению стержней:

$$\sigma_{si}^m = \sigma_{si} \mu_{si}; \quad \sigma_{bi}^m = \sigma_{bi} (1 - \mu_{si}), \quad (5.25)$$

где σ_{si}^m — приведенные (осредненные) напряжения арматуры; σ_{bi}^m — приведенные напряжения бетона — индекс m означает осреднение; σ_{si} — реальные осевые напряжения в арматуре; σ_{bi} — реальные нормальные напряжения в бетоне.

Общие напряжения

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$$

связываются с напряжениями в компонентах исходя из следующих предпосылок:

нормальные напряжения представляются в виде суммы соответствующих приведенных напряжений арматуры и бетона

$$\sigma_i = \sigma_{si}^m + \sigma_{bi}^m = \sigma_{si} \mu_{si} + \sigma_{bi} (1 - \mu_{si}); \quad (5.26)$$

($i = x, y, z$)

касательные напряжения в арматуре и бетоне принимаются одинаковыми и равными общим касательным напряжениям (рис. 5.4, а):

$$\tau_{bij} = \tau_{sij} = \tau_{ij} \quad (ij = xy, yz, zx), \quad (5.27)$$

при этом верхний индекс $i = x, y, z$, указывающий на направления стержней, не имеет значения; равенства принимаются для всех касательных компонент, имеющих одинаковые нижние индексы;

поперечные (не осевые) напряжения в арматуре равны соответствующим нормальным напряжениям в бетоне (рис. 5.4, б)

$$\sigma_{sj}^i = \sigma_{bj} = \sigma_{bj}^m / (1 - \mu_{sj}), \quad (i, j = x, y, z; i = j). \quad (5.28)$$

Здесь также равенства осуществляются по нижним одинаковым индексам, однако при $i \neq j$, т.е. для осевых напряжений.

Модифицированный бетон. Первый этап вывода матрицы жесткости. Вывод матрицы жесткости железобетона осуществляется в два этапа. На первом этапе устанавливается матрица жесткости модифицированного бетона или начального железобетона, в которую вводится влияние дополнительных (второстепенных) факторов армирования. К дополнительным факторам относятся отверстия (каналы) от арматуры, влияние арматуры на жесткость элемента в

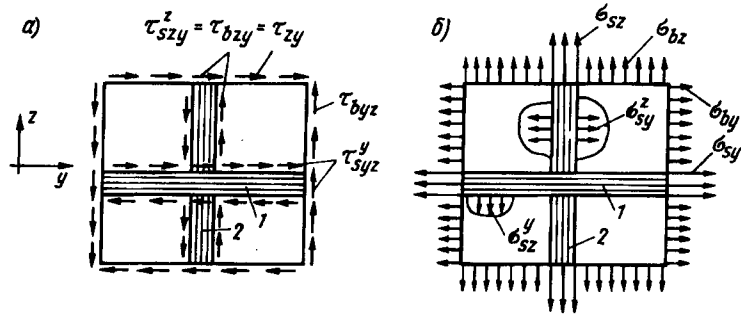


Рис. 5.4. Касательные (а) и нормальные (б) напряжения в арматуре и бетоне до появления трещин 1, 2 — арматурные стержни, расположенные соответственно вдоль осей y и z

направлениях, нормальных к направлениям стержней (влияние жесткости стержней в поперечном направлении), и влияние арматуры на сдвиговую жесткость.

В качестве напряжений модифицированного бетона выступают приведенные напряжения в бетоне

$$\{\sigma_b^m\}_x = \{\sigma_{bx}^m, \sigma_{by}^m, \sigma_{bz}^m, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (5.29)$$

и приведенные относительные деформации элемента

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \quad (5.30)$$

между которыми и устанавливаются связи.

В силу (5.27) приведенные касательные напряжения равны общим напряжениям, поэтому индекс m у них опущен.

Относительные деформации (5.30) модифицированного бетона состояются из относительных деформаций бетона (ϵ_{bi} , γ_{bij}) и относительных деформаций арматуры (ϵ_{sj}^i , γ_{sji}^i , $i, j = x, y, z$), исходя из объемных содержаний материалов в единичном объеме. На данном этапе из рассмотрения исключаются лишь осевые деформации арматуры и вместо нее вводятся пустые каналы, что уменьшается объем, к которому относятся деформации $\{\epsilon\}$.

Исходя из этого относительные удлинения вдоль, например, оси x составят

$$\epsilon_x(1 - \mu_{sx}) = \epsilon_{bx}(1 - \mu_s) + \epsilon_{sx}^y \mu_{sy} + \epsilon_{sx}^z \mu_{sz}, \quad (5.31)$$

$$\text{где } \mu_s = \mu_{sx} + \mu_{sy} + \mu_{sz}, \quad (5.32)$$

остальные две зависимости получают круговой перестановкой индексов, т.е. сначала x заменяется на y , y на z , z на x , затем, при записи третьей зависимости, y заменяется на z , z на x , x на y .

Соотношение (5.31) преобразовываем к виду

$$\epsilon_x = \frac{1}{(1 - \mu_{sx})} [\epsilon_{bx}(1 - \mu_s) + \epsilon_{sx}^y \mu_{sy} + \epsilon_{sx}^z \mu_{sz}]. \quad (5.33)$$

Аналогично записываются и два других выражения для ϵ_y и ϵ_z . Зависимости для общих углов сдвига также устанавливаются исходя из объемного содержания арматуры и бетона в элементе

$$\gamma_{ij} = \gamma_{bij}(1 - \mu_s) + \gamma_{sij}^x \mu_{sx} + \gamma_{sij}^y \mu_{sy} + \gamma_{sij}^z \mu_{sz}. \quad (5.34)$$

Выразим деформации в соотношениях (5.33) и (5.34) через напряжения.

Как уже указывалось (см. гл. 3), бетон деформируется как ортотропный материал, оси ортотропии которого совпадают с направлениями главных напряжений в бетоне. Эти зависимости преобразовываются к осям x, y, z ; преобразования выполняются по формулам (161) — (176). Применительно к последующим выкладкам преобразованные к осям x, y, z физические зависимости для бетона удобно записывать в развернутом виде:

$$\epsilon_{bi} = c_{bi1} \sigma_{bx} + c_{bi2} \sigma_{by} + c_{bi3} \sigma_{bz} + c_{bi4} \tau_{xy} + c_{bi5} \tau_{yz} + c_{bi6} \tau_{zx}, \quad (5.35)$$

полагая поочередно для получения шести зависимостей, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, причем $\epsilon_{b1} = \epsilon_{bx}$; $\epsilon_{b2} = \epsilon_{by}$; $\epsilon_{b3} = \epsilon_{bz}$; $\epsilon_{b4} = \gamma_{bxy}$; $\epsilon_{b5} = \gamma_{byz}$; $\epsilon_{b6} = \gamma_{bzx}$; c_{bij} — коэффициенты симметричной матрицы податливости бетона $[c_b]_x$.

Относительные деформации арматуры в поперечном направлении вычисляем без учета коэффициентов поперечной деформации, хотя это не обязательно,

$$\epsilon_{sj}^i = \sigma_{sj}^i / E_{sj}, \quad (i, j = x, y, z; i \neq j); \quad (5.35)$$

Эти зависимости, учитывая (5.28), преобразовываются

$$\epsilon_{sj}^i = \frac{\sigma_{bj}^i}{E_{sj}} = \frac{\sigma_{bi}^m}{E_{sj}(1 - \mu_{sj})}. \quad (5.37)$$

Сдвиги арматуры вычисляются

$$\gamma_{sij} = \tau_{ij} / G_{sij} \quad (ij = xy, yz, zx). \quad (5.38)$$

Внося значения ϵ_{bx} из (5.35) и $\epsilon_{sx}^y, \epsilon_{sx}^z$ из (5.37) в (5.33) и выражая затем σ_{bi} через σ_{bi}^m по формуле (5.25), находим

$$\epsilon_x = c_{b11}^m \sigma_{bx} + c_{b12}^m \sigma_{by} + c_{b13}^m \sigma_{bz} + c_{b14}^m \tau_{xy} + c_{b15}^m \tau_{yz} + c_{b16}^m \tau_{zx}, \quad (5.39)$$

где

$$c_{b11}^m = \frac{1}{(1 - \mu_{sx})^2} [c_{b11}(1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sy}}{E_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{E_{sz}}]; \quad (5.40)$$

$$c_{b12}^m = \frac{c_{b12}(1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sx})(1 - \mu_{sy})}; \quad c_{b13}^m = \frac{c_{b13}(1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sx})(1 - \mu_{sz})};$$

$$c_{b14}^m = \frac{c_{b14} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sx})}; \quad c_{b15}^m = \frac{c_{b15} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sx})};$$

$$c_{b16}^m = \frac{c_{b16} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sx})}.$$

Аналогичным образом определяются и значения ε_y и ε_z . Соотношение (5.34) при $ij = xy$, учитывая зависимости (5.27), можно представить так:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{bxy} (1 - \mu_s) + \tau_{xy} \left(-\frac{\mu_{sx}}{G_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{G_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{G_{sz}} \right). \quad (5.41)$$

Подставляя в (5.41) значение γ_{bxy} из (5.35) и заменяя σ_{bi} на σ_{bi}^m по формуле (5.25), получим

$$\gamma_{xy} = c_{b41}^m \sigma_{bx}^m + c_{b42}^m \sigma_{by}^m + c_{b43}^m \sigma_{bz}^m + c_{b44}^m \tau_{xy} + c_{b45}^m \tau_{yz} + c_{b46}^m \tau_{zx}, \quad (5.42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{b41}^m &= c_{b14}^m; & c_{b42}^m &= c_{b24}^m = \frac{c_{b24} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sy})}; \\ c_{b43}^m &= c_{b34}^m = \frac{c_{b34} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sz})}; \\ c_{b44}^m &= c_{b44} (1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sx}}{G_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{G_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{G_{sz}}; \\ c_{b45}^m &= c_{b45} (1 - \mu_s); & c_{b46}^m &= c_{b46} (1 - \mu_s). \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Полностью связи между напряжениями и деформациями, установленные на основе указанных предпосылок, образуют систему из шести уравнений

$$\{\varepsilon\}_x = [c_b^m] \{\sigma_b^m\}_x, \quad (5.44)$$

где $[c_b^m]_x$ — матрица податливости модифицированного бетона размером 6×6 с указанными выше коэффициентами c_{bij}^m , причем $c_{bij}^m = c_{bji}^m$ при $i = j$ (т.е. матрица является симметричной). В элементах c_{bij}^m индекс i указывает на номер строки в матрице, а j — на номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Частично элементы c_{bij}^m указаны выше, остальные элементы имеют вид:

$$c_{b22}^m = \frac{1}{(1 - \mu_{sy})^2} \left[c_{b22} (1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sx}}{E_{sx}} + \frac{\mu_{sz}}{E_{sz}} \right];$$

$$c_{b23}^m = \frac{c_{b23} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sy}) (1 - \mu_{sz})}; \quad c_{b24}^m = \frac{c_{b24} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sy})};$$

$$c_{b25}^m = \frac{c_{b25} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sy})}; \quad c_{b26}^m = \frac{c_{b26} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sy})};$$

$$c_{b33}^m = \frac{1}{(1 - \mu_{sz})^2} \left[c_{b33} (1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sx}}{E_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{E_{sy}} \right];$$

$$c_{b34}^m = \frac{c_{b34} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sz})}; \quad c_{b35}^m = \frac{c_{b35} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sz})};$$

$$c_{b36}^m = \frac{c_{b36} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{sz})};$$

$$c_{b55}^m = c_{b55} (1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sx}}{G_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{G_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{G_{sz}}; \quad (5.45)$$

$$c_{b56}^m = c_{b56} (1 - \mu_s);$$

$$c_{b66}^m = c_{b66} (1 - \mu_s) + \frac{\mu_{sx}}{G_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{G_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{G_{sz}}.$$

Зависимости для c_{bij} можно упростить, приняв с некоторым приближением

$$(1 - \mu_s) \approx (1 - \mu_x)(1 - \mu_y)(1 - \mu_z).$$

Второй этап вывода матрицы жесткости. Устанавливается матрица жесткости железобетона, в которой учитывается влияние нормальных (осевых) напряжений и деформаций арматуры — основного фактора со стороны армирования. Нормальные напряжения арматуры σ_{sx} , σ_{sy} , σ_{sz} трех направлений, умноженные на коэффициенты армирования, объединяются в один вектор-столбец

$$\{\sigma_s\}_x = \{(\sigma_{sx} \mu_{sx}), (\sigma_{sy} \mu_{sy}), (\sigma_{sz} \mu_{sz}), 0, 0, 0\}^T.$$

Вводится условие совместности осевых деформаций арматуры и модифицированного бетона. Связи между приведенными напряжениями арматуры и деформациями элемента представляются

$$\{\sigma_s\}_x = [d_s]_x \{\varepsilon\}_x, \quad (5.46)$$

где $[d_s]_x$ — матрица осевой жесткости арматуры,

8*

$$[d_s]_x = \begin{bmatrix} E_{sx} \mu_{sx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{sy} \mu_{sy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{sz} \mu_{sz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Общие напряжения элемента $\{\sigma\}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ суммируются из приведенных напряжений условного бетона и приведенных напряжений арматуры

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma_b^m\}_x + \{\sigma_s\}_x. \quad (5.48)$$

Внося в зависимости (5.48) значения напряжений $\{\sigma_b^m\}_x$ и $\{\sigma_s\}_x$ из (5.44) и (5.46) и учитывая принятое равенство относительных деформаций, приходим к общим связям между напряжениями и деформациями железобетона

$$\{\sigma\}_x = ([c_b^m]^{-1} + [d_s]_x) \{\epsilon\}_x = [d]_x \{\epsilon\}_x, \quad (5.50)$$

где $[d]_x = ([c_b^m]^{-1} + [d_s]_x)$ — матрица жесткости железобетона.

Заметим, что вычисление коэффициентов c_{bij}^m матрицы $[c_b^m]_x$ можно упростить, представляя их в виде сумм

$$c_{bij}^m = \tilde{c}_{bij}^m + \tilde{c}_{sij}^m, \quad (5.50)$$

$$\tilde{c}_{bij}^m = \frac{c_{bij} (1 - \mu_s)}{(1 - \mu_{si})(1 - \mu_{sj})}, \quad (5.51)$$

причем $\mu_{s1} = \mu_{sx}; \mu_{s2} = \mu_{sy}; \mu_{s3} = \mu_{sz}; \mu_{s4} = \mu_{s5} = \mu_{s6} = 0$.

Среди коэффициентов \tilde{c}_{sij}^m ненулевыми будут только коэффициенты \tilde{c}_{sii}^m , где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{s11}^m &= \frac{1}{(1 - \mu_{sx})^2} \left[-\frac{\mu_{sy}}{E_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{E_{sz}} \right]; \\ \tilde{c}_{s22}^m &= \frac{1}{(1 - \mu_{sy})^2} \left[-\frac{\mu_{sx}}{E_{sx}} + \frac{\mu_{sz}}{E_{sz}} \right], \\ \tilde{c}_{s33}^m &= \frac{1}{(1 - \mu_{sz})^2} \left[-\frac{\mu_{sx}}{E_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{E_{sy}} \right], \\ \tilde{c}_{s44}^m &= \tilde{c}_{s55}^m = \tilde{c}_{s66}^m = \frac{\mu_{sx}}{G_{sx}} + \frac{\mu_{sy}}{G_{sy}} + \frac{\mu_{sz}}{G_{sz}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

5.3. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Обозначим: t_Δ^0 — приращение температуры по отношению к некоторой температуре, принятой за нормальную; α_s^0 — коэффициент температурной деформации арматуры; α_b^0 — коэффициент температурной деформации бетона.

На первом этапе вывода физических соотношений влияние температуры сказывается на зависимостях (5.33), которые с учетом (5.37) преобразовываются к виду

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{(1 - \mu_x)} \left[(\sigma_x + \alpha_b^0 t_\Delta^0) (1 - \mu_s) + \right. \\ &+ \left. \left(-\frac{\sigma_{bx}}{E_{sy}} + \alpha_s^0 t_\Delta^0 \right) \mu_{sy} + \left(-\frac{\sigma_{bx}}{E_{sz}} + \alpha_s^0 t_\Delta^0 \right) \mu_{sz} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 - \mu_x)} \left[\epsilon_{bx} (1 - \mu_s) + \frac{\sigma_{bx}}{E_{sy}} \mu_{sy} + \frac{\sigma_{bx}}{E_{sz}} \mu_{sz} \right] + \\ &+ \tilde{\alpha}_{sx}^0 t_\Delta^0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{sx}^0 = \frac{1}{(1 - \mu_{sx})} \left[\alpha_b^0 (1 - \mu_s) + \alpha_s^0 (\mu_{sy} + \mu_{sz}) \right]. \quad (5.54)$$

Аналогично в выражениях для ϵ_y, ϵ_z появятся слагаемые $\tilde{\alpha}_{sy}^0, \tilde{\alpha}_{sz}^0$,

$$\tilde{\alpha}_{sy}^0 = \frac{1}{(1 - \mu_{sy})} \left[\alpha_b^0 (1 - \mu_s) + \alpha_s^0 (\mu_{sx} + \mu_{sz}) \right]; \quad (5.55)$$

$$\tilde{\alpha}_{sz}^0 = \frac{1}{(1 - \mu_{sz})} \left[\alpha_b^0 (1 - \mu_s) + \alpha_s^0 (\mu_{sx} + \mu_{sy}) \right].$$

Обобщенные коэффициенты температурной деформации образуют вектор-столбец

$$\{\tilde{\alpha}^0\}_x = \{\tilde{\alpha}_{sx}^0, \tilde{\alpha}_{sy}^0, \tilde{\alpha}_{sz}^0, 0, 0, 0\}. \quad (5.56)$$

В остальном вывод физических соотношений повторяет вывод, представленный в п. 5.2.

Окончательно вместо соотношений (5.43) получим

$$\{\epsilon\}_x = [c_b^m]_x \{\sigma_b^m\}_x + \{\tilde{\alpha}^0\}_x t_\Delta^0. \quad (5.57)$$

Соотношения (5.57) преобразовываем к виду

$$\{\sigma_b^m\}_x = [c_b^m]_x^{-1} \{\epsilon\}_x - \{\tilde{\alpha}^0\}_x t_\Delta^0. \quad (5.58)$$

или

$$\{\sigma_b^m\}_x = [c_b^m]_x \{\varepsilon\}_x - \{\tilde{\beta}^0\}_x t_\Delta^0, \quad (5.59)$$

где

$$\{\tilde{\beta}^0\}_x = [c_b^m]_x \{\tilde{\alpha}^0\}_x, \quad (5.60)$$

$\{\tilde{\beta}^0\}_x$ — вектор-столбец коэффициентов температурных напряжений в осях x, y, z .

Учтем дополнительно приведенные осевые напряжения в арматуре исходя из выполнения условия совместности осевых деформаций. Зависимости типа (5.36) с учетом влияния температуры записываются

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} + \alpha_s^0 t_\Delta^0, \quad (i = x, y, z) \quad (5.61)$$

Умножая правую и левую части на μ_{si} , преобразовываем (5.61) к виду

$$\sigma_{si} \mu_{si} = \varepsilon_i E_{si} \mu_{si} - \beta_{si}^0 t_\Delta^0, \quad (5.62)$$

где

$$\beta_{si}^0 = \alpha_s^0 E_{si} \mu_{si}. \quad (5.63)$$

Коэффициенты температурных напряжений β_{si}^0 образуют вектор-столбец

$$\{\beta_s^0\}_x = \{\beta_{sx}^0, \beta_{sy}^0, \beta_{sz}^0, 0, 0, 0\}^T. \quad (5.64)$$

Учитывая (5.64), вместо (5.46) получим

$$\{\sigma_s\}_x = [d_s]_x \{\varepsilon\}_x - \{\beta_s^0\}_x t_\Delta^0. \quad (5.65)$$

Внося (5.59) и (5.65) в (5.48), находим, что

$$\{\sigma\}_x = [c_b^m]_x \{\varepsilon\}_x - \{\tilde{\beta}^0\}_x t_\Delta^0 + [d_s]_x \{\varepsilon\}_x - \{\beta_s^0\}_x t_\Delta^0. \quad (5.66)$$

Обозначим

$$[d]_x = [c_b^m]_x + [d_s]_x; \quad (5.67)$$

$$\{\beta^0\}_x = \{\tilde{\beta}^0\}_x + \{\beta_s^0\}_x,$$

где $[d]_x$ — матрица жесткости железобетона.

Окончательно связи (5.66) между напряжениями и деформациями железобетона до появления трещин с учетом обозначений (5.67) принимают вид

$$\{\sigma\}_x = [d]_x \{\varepsilon\}_x - \{\beta^0\}_x t_\Delta^0. \quad (5.68)$$

5.4. УЧЕТ НАКЛОННО РАСПОЛОЖЕННОЙ АРМАТУРЫ

Ранее рассматривались арматурные стержни, расположенные вдоль координатных осей x, y, z . Пусть к этим стержням (к ортотропному армированию) добавляются еще стержни четвертого j -го направления (см. рис. 5.1, б). Введем для арматуры j -го направления следующие обозначения: σ_{sj}^j — осевые напряжения, $\sigma_{sj}^j = \sigma_{sj} \mu_{sj}^j$ — приведенные напряжения; ε_j — относительные деформации. Таким образом из шести возможным компонент напряжений и относительных деформаций будут ненулевыми только по одной компоненте ($\sigma_{sj}^j, \varepsilon_j$). Приведенные напряжения преобразуются к осям x, y, z по тем же формулам, что и компоненты напряжений (это будет показано в следующей главе, сами формулы преобразования компонент напряжений при повороте осей координат приведены в п. 1.3).

Преобразованное к осям x, y, z напряжение σ_{sj}^j даст уже шесть составляющих

$$\{\sigma_s^j\} = \{\sigma_{sx}^j, \sigma_{xy}^j, \sigma_{sz}^j, \tau_{sxy}^j = \tau_{syx}^j; \tau_{syz}^j = \tau_{szy}^j; \tau_{szz}^j = \tau_{szz}^j\}^T. \quad (5.69)$$

Эти составляющие будут равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{sx}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j1}^2; & \sigma_{sy}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j2}^2; \\ \sigma_{sz}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j3}^2; & \tau_{sxy}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j1} l_{j2}; \\ \tau_{syz}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j2} l_{j3}; & \tau_{szz}^j &= \sigma_{sj} \mu_{sj}^j l_{j3} l_{j1}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Напряжения σ_{sj}^j можно выразить через относительные деформации, используя формулу типа (5.61)

$$\sigma_{sj}^j = \varepsilon_j E_{sj} - \alpha_s^0 t_\Delta^0 E_{sj}. \quad (5.71)$$

Относительные деформации ε_j выражаются через относительные деформации в осях x, y, z по формуле преобразования относительных деформаций при повороте осей координат

$$\varepsilon_j = \varepsilon_x l_{j1}^2 + \varepsilon_y l_{j2}^2 + \varepsilon_z l_{j3}^2 + \gamma_{xy} l_{j1} l_{j2} + \gamma_{yz} l_{j2} l_{j3} + \gamma_{zx} l_{j1} l_{j3}, \quad (5.72)$$

где l_{j1} — направляющие косинусы (см. рис. 5.1, б и табл. 1.1), которые преобразуются по (1.60) — (1.76).

Внося значение ε_j в (5.71), а затем σ_{sj}^j в (5.70), приходим к зависимостям между напряжениями $\{\sigma_s^j\}$ и общими относительными деформациями $\{\varepsilon\}_x$. Эти зависимости в матричной форме записываются

$$\{\sigma_s^j\} = [d_s^j]_x \{\varepsilon\}_x - t_\Delta^0 \{\beta_s^{0j}\}_x, \quad (5.73)$$

где

$$\{\beta_s^{0j}\}_x = \alpha_s^0 [d_s^j]_x, \quad (5.74)$$

$$[d_s^j]_x = E_{sj} \mu_{sj}$$

l_{j1}^4	l_{j2}^2	l_{j1}^2	l_{j3}^2	l_{j1}^2	l_{j2}^2	l_{j1}^2	$l_{j2}^2 l_{j3}$	l_{j1}^3	l_{j3}	
	l_{j2}^4	l_{j2}^2	l_{j3}^2	l_{j1}	l_{j2}^3	l_{j2}^3	l_{j3}	l_{j1}	l_{j2}^2	l_{j3}
		l_{j3}^4	l_{j1}	l_{j2}	l_{j3}^2	l_{j2}	l_{j3}^3	l_{j1}	l_{j3}^3	
Симметрично			l_{j1}^2	l_{j2}^2	l_{j1}	l_{j2}^2	l_{j3}	l_{j1}^2	l_{j2}	l_{j3}
					l_{j2}^2	l_{j3}^2	l_{j1}	l_{j2}	l_{j3}^2	
							l_{j1}^2	l_{j2}^2	l_{j3}^2	

Напряжения $\{\sigma_s^j\}_x$ добавляются к общим напряжениям, в результате формула (5.48) представляется так:

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma_b^m\}_x + \{\sigma_s\}_x + \{\sigma_s^j\}_x. \quad (5.76)$$

Внося в эту формулу значения компонентов напряжений (повторяя вывод, представленный в предыдущем пункте), приходим к зависимостям (5.58), где следует принимать

$$[d]_x = [c_b^m]_x^{-1} + [d_s]_x + [d_s^j]_x, \quad (5.77)$$

$$\{\beta^0\}_x = \{\tilde{\beta}^0\}_x + \{\beta_s^1\}_x + \{\beta_s^0\}_x.$$

В представленном выводе влиянием армирования μ_{sj} на коэффициенты матрицы $[c_b^m]_x$ пренебрегаем; матрица $[d_s]_x$ должна приниматься без учета μ_{sj} , поскольку влияние μ_{sj} учитывается в дополнительной матрице $[d_s^j]_x$.

Рассмотрен вывод связей между напряжениями и деформациями (общих физических соотношений) для железобетонных элементов с трещинами при объемном напряженном состоянии. Эти соотношения были установлены в работах Н.И. Карпенко [63, 64].

Представленный здесь общий случай напряженно-деформированного состояния железобетона с трещинами затрагивался в работах исследователей в малой степени. Можно указать на одно из предложений Г.А. Гениева и Г.А. Тюпина [41] по построению трансверсально-изотропной модели железобетона. В этой модели бетон после появления трещин считается трансверсально-изотропным материалом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин. Модуль деформации бетона в направлении нормали к трещине вычисляется как функция армирования и коэффициента ψ_s В.И. Мурашева. Модуль деформации вдоль трещин принимается равным упругому. В работах ряда авторов (из обзор можно встретить в [11, 49]) получила развитие давняя идея непрерывного железобетона с трещинами с повышенной податливостью бетона вдоль нормали к трещинам (текучего бетона). Такие модели исходят из условия совместности осевых деформаций арматуры и бетона как до, так и после появления трещин, что не соответствует реальной картине деформирования железобетона с трещинами. Большое количество работ посвящено рассмотрению плоского и одноосного напряженных состояний. Некоторые из этих работ укажем отдельно, рассматривая частные случаи общей модели. Рассматриваемая здесь модель вначале была предложена автором в некотором варианте для плоского напряженного состояния в [53], затем развивалась в [33, 58, 60].

Большое влияние на построение моделей деформирования железобетонных элементов с трещинами в нашей стране оказали пионерные работы В.И. Мурашева [127], который впервые удачно смоделировал одноосное напряженное состояние арматуры и бетона в железобетонных балках и стержнях с трещинами.

6.1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ

Пусть задана некоторая произвольная железобетонная массивная конструкция, которая в силу приложенных к ней внешних нагрузок и воздействий деформируется в условиях объемного напряженного состояния. Требуется установить связи между напряжениями и деформациями для областей конструкции, в которых возникли трещины. Физические соотношения, связывающие напряжения с относительными деформациями, устанавливаются на основании

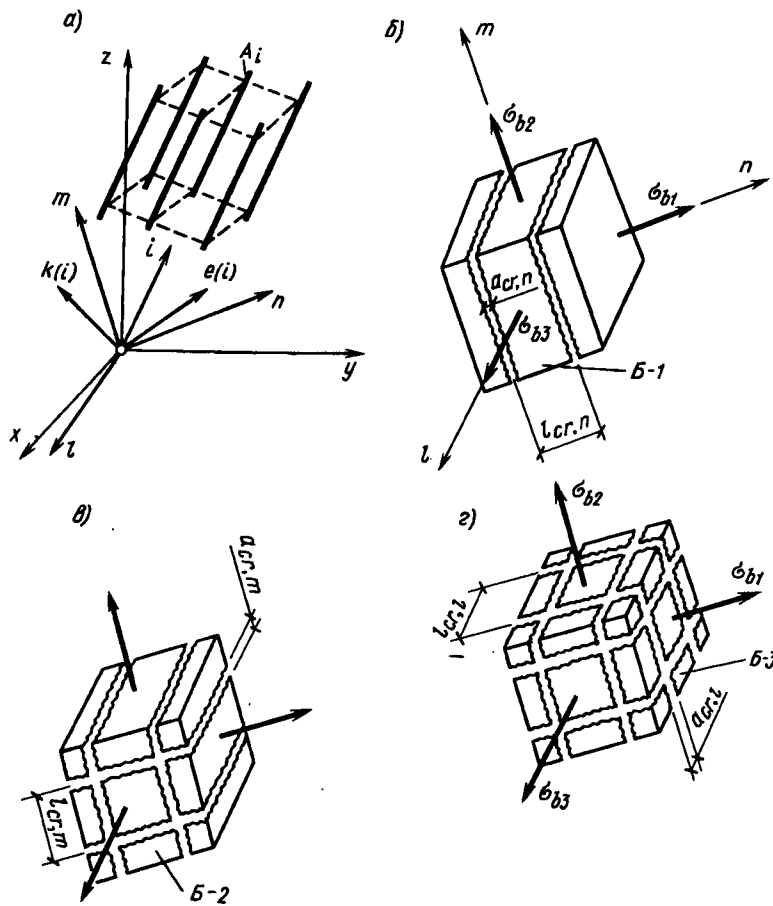


Рис. 6.1. Общая схема армирования и схемы трещин а — наклонное (произвольно-ориентированное) армирование; б-г — три схемы трещин (1-3); А₁ — арматурные стержни. Б-1, Б-2, Б-3 — блоки бетона между трещинами

структурного анализа и моделирования напряженно-деформированного состояния некоторых малых объемных элементов, выделяемых из железобетонного массива. Такой подход позволяет учесть то обстоятельство, что в силу физической нелинейности физические соотношения для различных малых областей конструкции могут быть различными.

Общая схема армирования. Характер деформирования железобетонных элементов с трещинами в значительной степени зависит от схемы армирования. Для рассматриваемых малых локальных областей массива принимается общая схема армирования в виде одной

или нескольких групп (потоков) стержней, произвольно-ориентированных относительно выбранной декоративной системы координат x, y, z (рис. 6.1, а, где показана одна группа наклонных стержней, более подробно такая группа характеризуется на рис. 5.1, б). К каждой группе (потоку) стержней прикрепляется своя декоративная система координат $i, k(i), e(i)$, где ось i направлена вдоль стержней, а оси $k(i)$ и $e(i)$ могут поворачиваться вокруг оси i произвольно. Связь между системами координат x, y, z и $i, k(i), e(i)$ задается табл. 6.1 направляющих косинусов. Ниже вводятся и другие системы фиксации, однако табл. 6.1 остается исходной. Из общей схемы армирования получим в виде частного случая трехосно-ортогональное (ортотропное) армирование. Можно получить и другие возможные схемы установки арматуры.

Таблица 6.1

	x	y	z
i	i_x	i_y	i_z
$k(i)$	$k(i)_x$	$k(i)_y$	$k(i)_z$
$e(i)$	$e(i)_x$	$e(i)_y$	$e(i)_z$

Краткая физическая картина и основные физические предпосылки. Основные предпосылки модели с некоторой условностью можно разделить на две группы: физические (1ф — 9ф) и теоретические (1т — 4т). Остановимся сначала на физических предпосылках.

1ф. Характер деформирования малых железобетонных элементов зависит от схемы трещин — образования трещин по одной или нескольким пересекающимся площадкам. Рассматриваются трещины одного (рис. 6.1, б, схема 1), двух (рис. 6.1, в, схема 2) и трех (рис. 6.1, г, схема 3) взаимно ортогональных направлений; $l_{cr,n}, l_{cr,m}, l_{cr,l}$ — расстояния между трещинами по трем ортогональным направлениям; $a_{cr,n}, a_{cr,m}, a_{cr,l}$ — соответственно раскрытия трещин. Предпосылки рассматриваем на примере трещин одного направления (с учетом $l_{cr,n}$ и $a_{cr,n}$).

2ф. В расчетную модель вводятся трещины общего вида, характеризующиеся раздвижкой (раскрытием $a_{cr,n}$) и взаимными сдвигами Δ_{nm}, Δ_{nl} берегов (рис. 6.2, а, точки s, s', s'' до раскрытия трещин совмещались в одной точке, после раскрытия трещин точка s остается посередине трещины, а s' и s'' — оказываются на

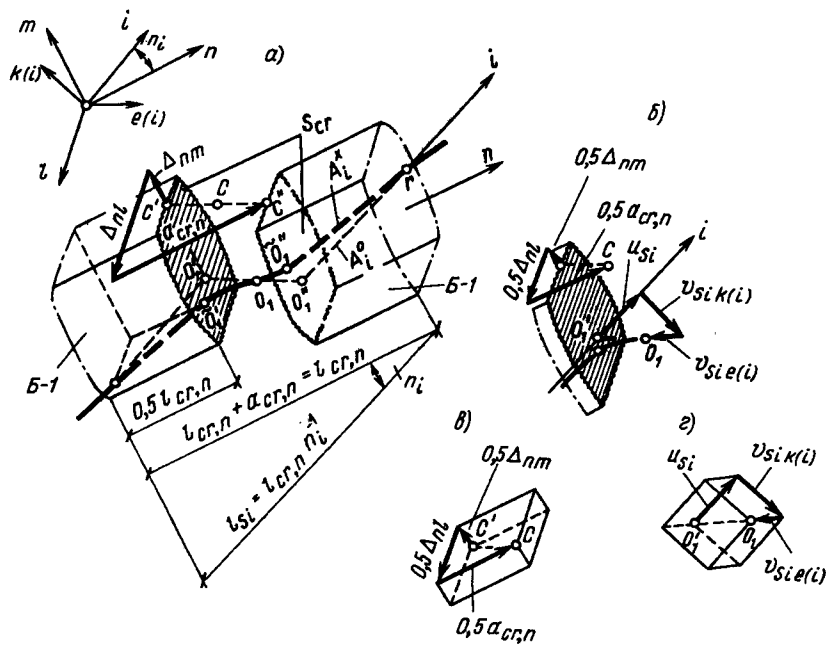


Рис. 6.2. Перемещения арматурного стержня в наклонной трещине (а-г) и на участках между трещинами (а)

противоположных берегах трещины). Площадку, проведенную посередине трещины через точки типа c , условно назовем площадкой трещины.

3ф. После образования трещин арматурные стержни в блоках бетона между трещинами и в самой трещине претерпевают сложные перемещения из положения A_i^0 — до деформации в положение A_i^* — после деформации (рис. 6.2, а, точки $O_1, O_1', O_1'', \bar{O}_1'$ и \bar{O}_1'' до деформации совмещались в одной точке, после деформации точка O_1 остается посередине трещины, точки \bar{O}_1' и \bar{O}_1'' фиксируют положение следа A_i^0 недеформированной арматуры на берегах трещины; точки \bar{O}_1' и \bar{O}_1'' — фиксируют положение реальной арматуры A_i^* на берегах трещины): l_{si} — длина стержня на участке между трещинами ($l_{si} = l_{cr,n} n_i$, где n_i — косинус угла между осями l и n).

В результате раскрытия трещины и сдвига ее берегов арматурные стержни выдвигаются из берегов трещины и испытывают тангенциальные перемещения в плоскости трещины (рис. 6.2, б, u_{si} — осевые смещения стержней относительно берега трещины, $v_{sik(i)}$, $v_{sie(i)}$ — тангенциальные перемещения вдоль выбранных осей $k(i)$ и $e(i)$). Поверхность трещины смещается относительно берега трещины

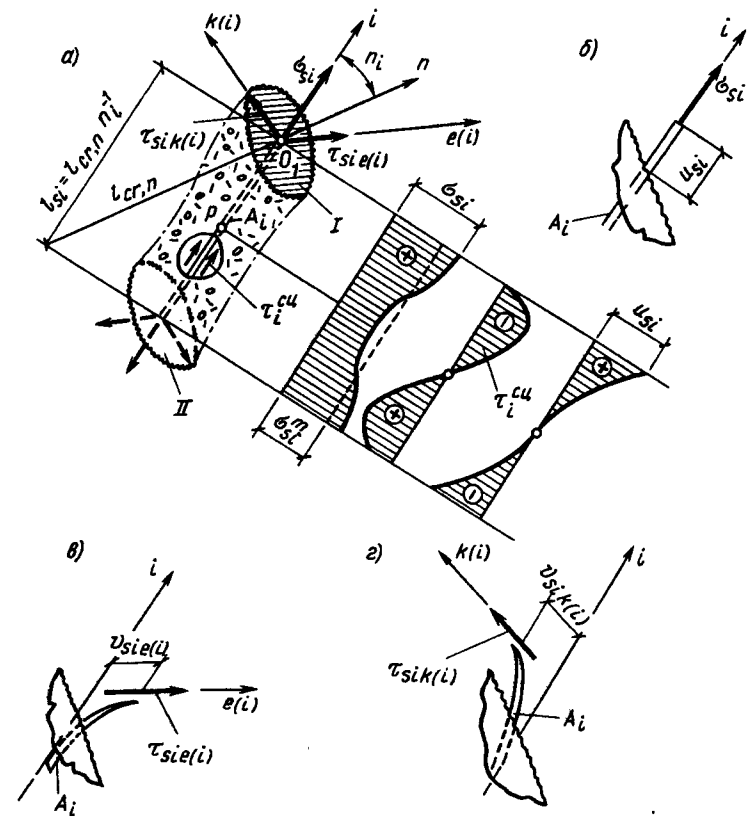


Рис. 6.3. Напряжения и перемещения арматурного стержня в трещине (а-г) и на участках между трещинами (а, б, в, г — смежные трещины)

на величину $c's$ (рис. 6.2, в, $c's$ — общий вектор смещения; $0,5 \Delta_{cr,n}$; $0,5 \Delta_{nl}$ — составляющие общего вектора). Общий вектор смещения арматурных стержней относительно берега трещины составляет $O_1' O_1$ (рис. 6.2, г; u_{si} , $v_{sik(i)}$, $v_{sie(i)}$ — составляющие общего вектора $O_1' O_1$). Соблюдается равенство векторов: $c's = O_1' O_1$, которое назовем условием совместности перемещений стержней в трещине. Согласно этому условию общие векторы смещений в трещине арматурных стержней различных направлений оказываются одинаковыми и равными смещению $c's$.

4ф. Арматурные стержни смещаются относительно бетона на участке l_{si} по косимметричной схеме (см. эпюру u_{si} на рис. 6.3, а). Согласно этой схеме смещения стержней относительно бетона проявляются на всем протяжении участка стержня между трещинами, за исключением точек совместности типа p и r , расположенных

посередине блоков бетона между трещинами (см. рис. 6.2, а, 6.3, а). Согласно этой схеме условие совместности относительных осевых деформаций арматуры и бетона, которое принималось до раскрытия трещин (см. гл. 5), здесь не выполняется и заменяется условием совместности перемещений стержней и блоков бетона в точках совместности типа p и r .

5ф. В трещинах практически все усилия передаются через арматуру, за исключением части усилий, которые передаются через остаточные связи по бетону в трещинах — через связи зацепления. Основными в арматуре являются осевые (нормальные) напряжения. В трещинах они достигают максимальных значений σ_{si} и затем постепенно затухают в блоках между трещинами по мере удаления от краев трещин; схема изменения эпюры напряжений в арматуре показана на рис. 6.3, а. Затухание происходит вследствие действия сил сцепления $\tau_{si}^{сн}$ по контакту арматуры с бетоном (эпюра изменения $\tau_{si}^{сн}$ на участке l_{si} носит кососимметричное очертание, рис. 6.3, а).

В модели вводятся два вида осевых напряжений: σ_{si}^m — максимальные в трещинах, которые ответственны за прочность арматуры) и $\sigma_{si}^с$ — средние на участках между трещинами, от которых зависят деформации. Связь между напряжениями осуществляется при помощи коэффициентов ψ_{si} , введенных В.И. Мурашевым [127]; $\sigma_{si}^с = \sigma_{si} \psi_{si}$. Этими коэффициентами учитывается влияние сцепления. Напряжения $\sigma_{si}^с$, как будет показано ниже, непосредственно связаны со смещениями u_{si} (рис. 6.3, б). Эта связь осуществляется на основе специальных диаграмм деформирования арматуры, связывающих напряжения в трещинах со средними ее деформациями на участках между трещинами (диаграммы конкретизированы далее).

6ф. Кроме σ_{si} в арматуре в трещинах возникают касательные напряжения $\tau_{sik(i)}$, $\tau_{sie(i)}$ (рис. 6.3, а). Касательные напряжения непосредственно связаны с тангенциальными смещениями стержней $v_{sik(i)}$ и $v_{sie(i)}$ (рис. 6.3, в, г). Вид связей устанавливается экспериментально или теоретически. В теоретическом подходе арматурные стержни представляются в виде некоторых микроблоков, заделанных в бетонное основание. Принятые связи конкретизированы ниже. Экспериментальные исследования показывают, что значимые тангенциальные смещения арматуры и касательные напряжения в ней возникают в трещине и в локальной части отрезка l_{si} , прилегающей к трещине. По этой причине они учитываются лишь при рассмотрении приведенных напряжений в трещинах.

7ф. Между берегами трещин при малой ширине их раскрытия могут сохраняться некоторые неразрушенные бетонные «мостики» — связи зацепления берегов трещин. Связи зацепления, как показывают некоторые эксперименты, могут в определенной степени сглаживать скачкообразное изменение деформаций вследствие трещинообразования. Более существенна их роль в виде препятствий

сдвигам берегов трещин. В модели вводятся сглаженные напряжения зацепления σ_{qn} , τ_{qnm} , τ_{qnl} , отнесенные к единице площади площадки трещины.

Нормальные напряжения σ_{qn} ставятся в зависимость от раскрытия трещин $a_{cr,n}$, а касательные напряжения τ_{qnm} , τ_{qnl} — дополнительно еще и в зависимость от сдвигов Δ_{nm} , Δ_{nl} берегов трещин. Связь осуществляется через секущие модули зацепления берегов трещин (они также рассмотрены отдельно).

8ф. Бетон в блоках между трещинами деформируется как особый ортотропный материал, который выключается из работы вдоль отдельных осей ортотропии n , m , l по мере образования трещин по той или иной схеме. Так, в случае схемы 1 такое выключение происходит вдоль оси n , в случае схемы 2 — вдоль осей n и m а в случае схемы 3 — вдоль всех трех осей n , m , l . По тем направлениям, которые еще не стали нормальными к трещинам (m , l — в случае схемы 1; l — в случае схемы 2), деформации элемента определяются деформациями бетона. Лишь после образования трещин по схеме 3 бетон полностью теряет свою самостоятельную роль и оказывает лишь влияние на средние напряжения и деформации арматуры через сцепление с блоками бетона между трещинами, которое учитывается в параметрах ψ_{si} .

9ф. Выше рассматривались деформации арматуры от действия напряжений в арматуре в трещинах. Деформации бетона в блоках между трещинами дополнительно влияют на эти деформации, а следовательно, и на средние напряжения арматуры, которые с учетом этого влияния составят $\tilde{\sigma}_{si}^с$, причем $\tilde{\sigma}_{si}^с$ определяется без учета указанного фактора. Степень влияния нормальных (линейных) деформаций бетона вдоль направлений армирования i на осевые деформации арматуры i оценивается множителем $(1 - \psi_{si})$. Такое моделирование допускает проскальзывание арматуры относительно бетона и одновременно приводит (пока единственным образом) к симметричной матрице физических соотношений. Совместность линейных деформаций восстанавливается лишь при $\psi_{si} = 0$.

Известно, что $0,15 \leq \psi_{si} \leq 1$. В начале образования трещин $\psi_{si} \approx 0,15 \dots 0,3$, поэтому множитель $(1 - \psi_{si})$ приводит к малому нарушению совместности. В стадиях, близких к разрушению, $\psi_{si} \rightarrow 1$. Это приводит к практически полному нарушению совместности линейных деформаций вдоль i . Заметим также, что вследствие несовместности деформаций арматуры и бетона одноименные напряжения и деформации в них могут качественно и существенно различаться и даже иметь неодинаковые знаки. Другие менее значимые предпосылки рассмотрены по ходу вывода физических соотношений.

Теоретические предпосылки 1г. Физические соотношения устанавливаются в локальной системе координат n , m , l , направленных по нормальным к трем ортогональным площадкам образования трещин (см. рис. 6.1, а–г), а затем переводятся в глобальную систему x , y ,

z , используя формулы преобразования. Связь между координатами x, y, z и n, m, l задается по таблице (см. п. 1.3) направляющих косинусов; там же указан способ вычисления направляющих косинусов исходя из развития трещин по площадкам главных напряжений в бетоне.

2т. В теоретических построениях оси координат $i, k(i)$ и $e(i)$ произвольно-ориентированного армирования фиксируются табл. 6.2 направляющих косинусов относительно осей n, m, l . Она не является самостоятельной. Ее можно заполнить, зная компоненты табл. 6.1 и 1.1. Например, направляющие косинусы оси i к осям x, y, z согласно табл. 6.1 составляют: i_x, i_y, i_z . Направляющие косинусы оси n к осям x, y, z согласно табл. 1.1 обозначаются n_x, n_y, n_z . Обозначим n_i — направляющий косинус между осью i и n , тогда $n_i = n_x i_x + n_y i_y + n_z i_z$. Аналогичным образом вычисляются и другие направляющие косинусы табл. 6.2.

Таблица 6.2

	i	$k(i)$	$e(i)$
n	n_i	$n_{k(i)}$	$n_{e(i)}$
m	m_i	$m_{k(i)}$	$m_{e(i)}$
l	l_i	$l_{k(i)}$	$l_{e(i)}$

3т. Выделяется малый прямоугольный параллелепипед так, чтобы отдельные его грани прошли по трещинам или параллельно им. При этом оси n, m, l совмещаются с ребрами элемента и представляют собой нормали к трещинам в такой последовательности: n — для схемы 1, n, m — для схемы 2 и n, m, l — для схемы 3. Усилия, приложенные к граням элемента, приводятся в соответствии с коэффициентами армирования и их проекциями на наклонные площадки к средним поверхностным нормальным и касательным напряжениям арматуры ($\sigma_{sr}, \tau_{srk}; r, k = n, m, l$) и бетона (σ_{br}, τ_{brk}). Последние на площадках трещин заменяются напряжениями зацепления σ_{qn}, τ_{qkr} . Общие напряжения элемента σ_r, τ_{kr} находятся путем суммирования приведенных напряжений арматуры и бетона.

4т. Относительные деформации малого элемента $\varepsilon_r, \gamma_{kr}^*, \gamma_{rk}^*$ складываются из двух частей: сглаженных на масштабе l_{cr} (l_{cr} — расстояние между трещинами) относительных деформаций $\varepsilon_{sr}, \gamma_{skr}^*, \gamma_{srk}^*$ от раскрытия трещин и сдвига их берегов и средних относительных деформаций бетонов между трещинами $\varepsilon_{br}, \gamma_{brk}^*, \gamma_{brk}^*$.

Одна из важных особенностей вывода физических соотношений заключается в том, что составляющие приведенных напряжений и относительных деформаций арматуры и бетона в элементах с трещинами образуют несимметричные тензоры. Заметим еще, что построение формул выполнено таким образом, что они описывают не только деформации элементов с трещинами, но и могут переходить при определенных условиях в соотношения, описывающие деформации элементов без трещин (условно схему 0).

6.2. НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ С ТРЕЩИНАМИ И ИХ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Напряжения определяются согласно предпосылке 3т. Конкретизируем эту предпосылку.

Компоненты приведенных напряжений арматуры. Выделим для рассмотрения одно направление армирования i . Если направлений армирования будет несколько, то следует использовать формальную процедуру суммирования членов, содержащих повторяющиеся индексы i .

Расположим в потоке стержней i площадку $F_v = 1$, наклоненную к i на угол φ (φ — угол между i и нормалью ν к площадке F_v ; см. 6.4, а). Площадь проекции этой площадки на плоскость, нормальную к i , составит $F_i = F_v \cos \varphi = 1 \cos \varphi$. Площадь арматуры, которая пересекает площадку F_i , а следовательно, и площадку $F_v =$

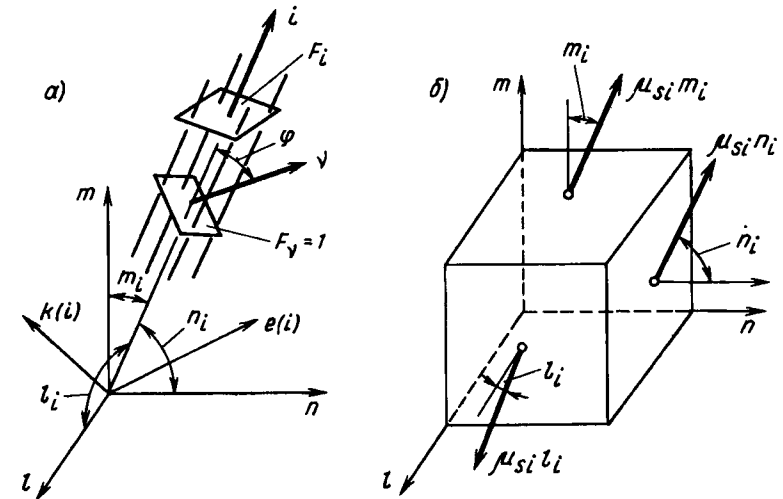


Рис. 6.4. К определению площади арматуры, пересекающей наклонные площадки

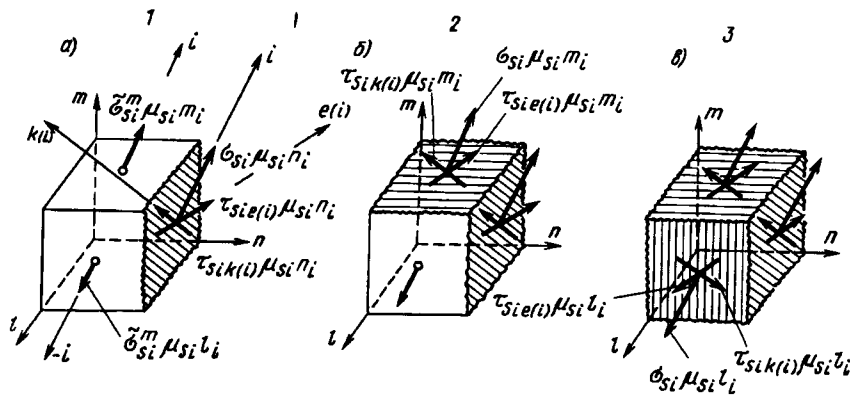


Рис. 6.5. Компоненты напряжений наклонной арматуры на площадках трещин (при схемах трещин 1—3)

$=1$, составит $F_{sv} = F_i \mu_{si} = 1 \mu_{si} \cos \varphi$. Исходя из этой зависимости площади арматуры, пересекающей грани куба единичной длины (рис. 6.4, б), будут равны $\mu_{si} n_i$, $\mu_{si} m_i$, $\mu_{si} l_i$ (n_i , m_i , l_i — направляющие косинусы согласно табл. 6.2). Умножая эти величины на нормальные σ_{si} и касательные $\tau_{sik}(i)$, $\tau_{sie}(i)$ напряжения в арматуре в трещинах или (на площадках, нормальных трещинам) на средние напряжения в арматуре $\tilde{\sigma}_{si}^m$ получим усилia в арматуре, пересекающей грани элемента при трех схемах трещин.

Значения этих усилia показаны на рис. 6.5, а, б, в, причем значения усилia, которые указаны на предыдущих схемах, на последующих уже не проставляются. Проецируя эти усилia на оси n , m , l — нормали и касательные к граням элементов, получим компоненты тензора приведенных напряжений арматуры (арматурные компоненты напряжений). Рассмотрим для примера элемент с трещинами схемы 1 (рис. 6.5, а). Проекция усилia арматуры, приложенных к заштрихованной грани элемента (к площадке трещины) на оси n , m , l , соответственно составят:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sn} &= \sigma_{si} \mu_{si} n_i^2 + \tau_{sik(i)} \mu_{si} n_i n_{k(i)} + \tau_{sie(i)} \mu_{si} n_i n_{e(i)}; \\ \tilde{\tau}_{snm} &= \sigma_{si} \mu_{si} n_i m_i + \tau_{sik(i)} \mu_{si} n_i m_{k(i)} + \tau_{sie(i)} \mu_{si} n_i m_{e(i)}; \\ \tilde{\tau}_{snl} &= \sigma_{si} \mu_{si} n_i l_i + \tau_{sik(i)} \mu_{si} n_i l_{k(i)} + \tau_{sie(i)} \mu_{si} n_i l_{e(i)}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Нетрудно заметить, что эти проекции получают, умножая усилia арматуры на направляющие косинусы, приведенные в табл. 6.2, между осью, вдоль которой направленно усилie на семе 1 рис. 6.5, а, и осью, на которую оно проецируется.

Рассмотрим вторую грань элемента, нормальную к оси m . Усилie на этой грани составляет $\tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i$. Проекция этого усилia на оси m , n , l будут равны:

$$\tilde{\sigma}_{sm} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i^2, \quad \tilde{\tau}_{smn} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i n_i; \quad (6.2)$$

$$\tilde{\tau}_{sml} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i l_i.$$

Усилie на грани, нормальной к оси l , согласно рис. 6.5, а равно $\tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i$. Проецируя это усилie на оси l , m , n , находим

$$\tilde{\sigma}_{sl} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i^2, \quad \tilde{\tau}_{slm} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i m_i; \quad (6.3)$$

$$\tilde{\tau}_{sln} = \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i n_i.$$

Компоненты напряжений арматуры (6.1)–(6.3) образуют девятикомпонентный вектор-столбец:

$$\{\sigma_{si}^m\}_n = \{\tilde{\sigma}_{sn}, \tilde{\sigma}_{sm}, \tilde{\sigma}_{sl}, \tilde{\tau}_{snm}, \tilde{\tau}_{sml}, \tilde{\tau}_{sln}, \tilde{\tau}_{smn}, \tilde{\tau}_{slm}, \tilde{\tau}_{sln}\}^T. \quad (6.4)$$

Не все касательные компоненты арматурных напряжений являются симметричными ($\tilde{\tau}_{smn} \neq \tilde{\tau}_{sml}$; $\tilde{\tau}_{sln} \neq \tilde{\tau}_{sln}$; $\tilde{\tau}_{sml} \neq \tilde{\tau}_{slm}$), поэтому компоненты приведенных напряжений арматуры образуют несимметричный тензор. Несимметричный тензор более информативен тем, что одновременно позволяет учесть как реальные напряжения в арматуре в трещинах, так и средние напряжения в блоках бетона между трещинами. Другими путями их совместить не удастся. Аналогичным образом формируются компоненты приведенных напряжений арматуры на гранях элементов со схемами трещин 2 и 3 (см. рис. 6.5, б, в).

Формально все компоненты напряжений вектор-столбца (6.4) для любой схемы трещин можно представить одной обобщенной формулой

$$\tilde{\sigma}_{srk} = \delta_r (\sigma_{si} \mu_{si} r k_i + \sum_j \tau_{sij} \mu_{si} r k_j) + (1 - \delta_r) \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} r k_i; \quad (6.5)$$

$$rk = n, m, l; j = k(i); e(i),$$

$$\text{где } \tilde{\sigma}_{snn} = \tilde{\sigma}_{sn}; \tilde{\sigma}_{smm} = \tilde{\sigma}_{sm}; \tilde{\sigma}_{sll} = \tilde{\sigma}_{sl}; \tilde{\sigma}_{smn} = \tilde{\tau}_{smn}; \tilde{\sigma}_{sml} = \tilde{\tau}_{sml} \text{ и так далее.}$$

Искусственно введенный множитель δ_r ($r = n, m, l$) для различных схем трещин принимает следующие значения:

$$\text{схема 1} - \delta_n = 1, \delta_m = \delta_l = 0;$$

$$\text{схема 2} - \delta_n = \delta_m = 1, \delta_l = 0;$$

$$\text{схема 3} - \delta_n = \delta_m = \delta_l = 1.$$

При отсутствии трещин (схема 0) в формуле (6.5) все множители δ_r следует положить равными нулю и принять $\tilde{\sigma}_{si}^m = \sigma_{si}$. При этом приходим к выражениям (5.70); различия в обозначениях носят чисто формальный характер.

Компоненты напряжений бетона. Общие напряжения. Компоненты напряжений бетона на гранях элемента при различных схемах трещин показаны на рис. 6.6, а, б, в. Как уже указывалось, на площадках трещин основными являются приведенные напряжения в

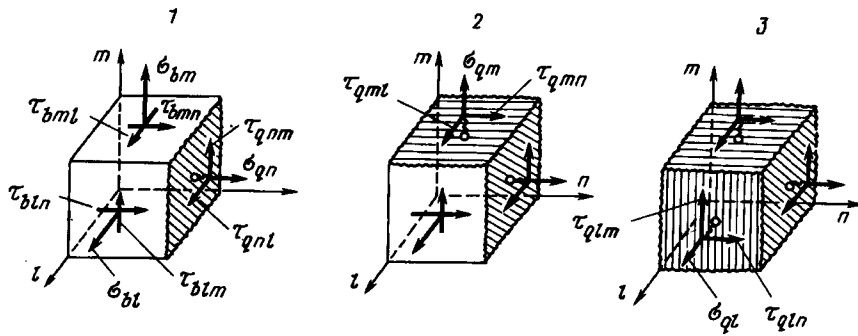


Рис. 6.6. Компоненты напряжений бетона на площадках, нормальных к площадкам трещин (при схемах трещин 1–3)

арматуре, а напряжения в бетоне, за исключением некоторых напряжений в связях зацепления, равны нулю. На площадках, нормальных к трещинам, уже более значимыми могут быть напряжения в бетоне или, по крайней мере, напряжения в бетоне и арматуре становятся равноценными. Чтобы учесть выключение бетона по тем или иным площадкам (в зависимости от схемы трещин) и включение связей зацепления компоненты напряжений бетона разделяются на две части: собственно напряжения в бетоне и напряжения связей зацепления.

Вектор-столбец напряжений бетона можно представить так:

$$\begin{aligned} \{\sigma_b^*\}_n &= \{(1 - \delta_n) \sigma_{bn}, (1 - \delta_m) \sigma_{bm}; (1 - \delta_l) \sigma_{bl}, \\ &(1 - \delta_n) \tau_{bnm}, (1 - \delta_m) \tau_{bml}; (1 - \delta_l) \tau_{bln}; \\ &(1 - \delta_m) \tau_{bmn}; (1 - \delta_l) \tau_{blm}; (1 - \delta_n) \tau_{bnl}\}^T \end{aligned} \quad (6.7)$$

Напряжения в связях зацепления группируются в другой вектор-столбец:

$$\begin{aligned} \{\sigma_q^*\}_n &= \{\delta_n \sigma_{qn}, \delta_m \sigma_{qm}, \delta_l \sigma_{ql}, \delta_n \tau_{qnm}, \\ &\delta_m \tau_{qml}, \delta_l \tau_{qln}, \delta_m \tau_{qmn}, \\ &\delta_l \tau_{qlm}, \delta_n \tau_{qnl}\}^T \end{aligned} \quad (6.8)$$

Множители δ_r ($r = n, m, l$) в столбцах (6.7) и (6.8) принимают значения (6.6) в зависимости от схемы трещин.

Общие напряжения

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \tau_{nm}^*, \tau_{ml}^*, \tau_{ln}^*, \tau_{mn}^*, \tau_{lm}^*, \tau_{nl}^*\}^T \quad (6.9)$$

суммируются из приведенных напряжений арматуры, напряжений бетона и напряжений связей зацепления:

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_s^*\}_n + \{\sigma_b^*\}_n + \{\sigma_q^*\}_n. \quad (6.10)$$

Процедура суммирования компонент напряжений для схемы

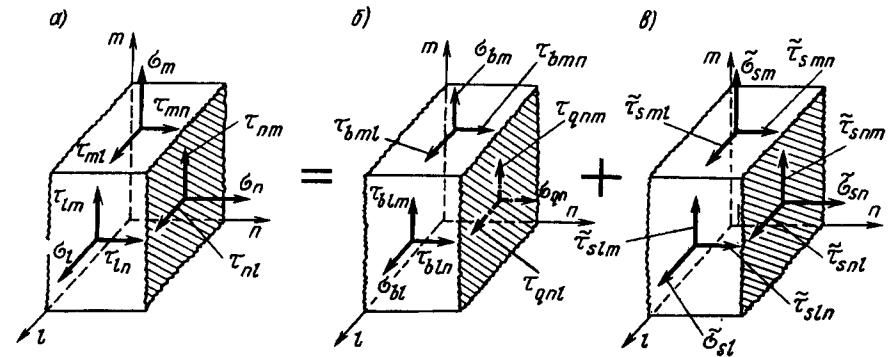


Рис. 6.7. К определению общих напряжений а — общие напряжения; б — напряжения бетона и приведенные напряжения связей зацепления; в — приведенные напряжения арматуры

трещин 1 показана графически на рис. 6.7, а, б, в (здесь компоненты напряжений бетона и зацепления объединены на одном элементе — рис. 6.7, б).

6.3. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТА С ТРЕЩИНАМИ

Относительные деформации определяются в соответствии с предпосылкой 4 т, причем их определение зависит от схемы трещин.

Схема 1 трещин (см. рис. 6.1, б). Выделим из массива в осях n, m, l прямоугольный элемент, включающий в себя одну трещину и полный блок бетона между трещинами — точнее две его половинки, прилегающие к трещине (рис. 6.8, а). Деформации такого элемента в полной мере характеризуют все виды деформаций железобетона с трещинами при объемном напряженном состоянии в случае образования трещин по схеме 1. Условно деформации можно разделить на две части. Первая (основная) часть деформаций связана с раскрытием трещины ($\Delta_{cr,n}$) и сдвигами ее берегов (Δ_{nm}, Δ_{ln}).

Относительные деформации, соответствующие этой части, определяются по схемам рис. 6.8, б, г и составляют

$$\epsilon_{sn} = \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}}; \gamma_{sm}^* = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}}; \gamma_{sl}^* = \frac{\Delta_{ln}}{l_{cr,n}}, \quad (6.11)$$

остальные шесть компонент с индексом s равны нулю ($\epsilon_{sm} = \epsilon_{sl} = \gamma_{sm}^* = \gamma_{sl}^* = \gamma_{sn}^* = \gamma_{sl}^* = 0$). Фактически в формулах (6.11) сосредоточенные деформации $a_{cr,n}, \Delta_{nm}, \Delta_{ln}$ сглаживаются на масштабе $l_{cr,n}$ — расстоянии между трещинами.

Деформации, связанные с раскрытием трещин, можно сгруппировать в один вектор-столбец

$$\{\epsilon_s^*\}_n = \{\epsilon_{sn}, 0, 0, \gamma_{sm}^*, 0, 0, 0, 0, \gamma_{sl}^*\}^T. \quad (6.12)$$

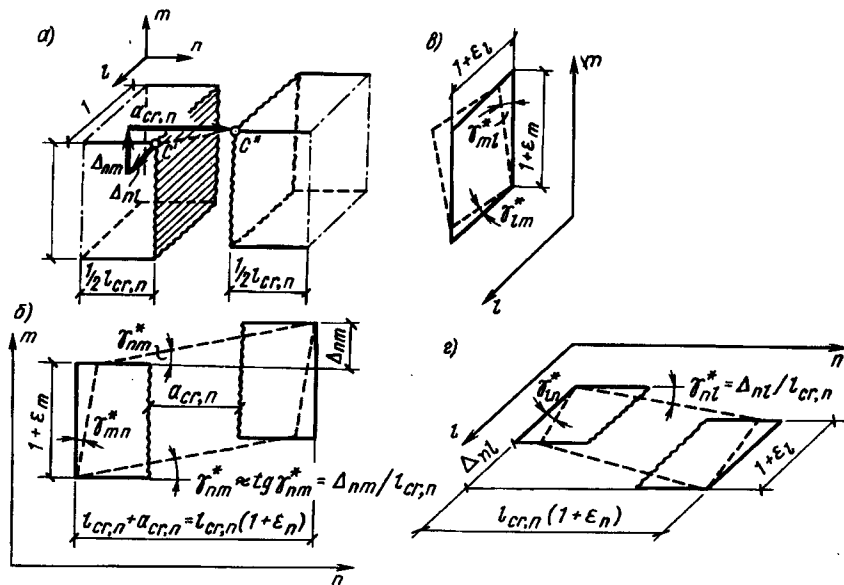


Рис. 6.8. К определению относительных деформаций элементов с трещинами (первая схема) вдоль осей n, m, l ($a-n$)

Влиянием деформаций бетона на деформации типа (6.11) с целью упрощения выкладок пренебрегаем, хотя это необязательно, в результате

$$\epsilon_{sn} \approx \epsilon_n; \quad \gamma_{snm}^* \approx \gamma_{nm}^*; \quad \gamma_{snl}^* = \gamma_{nl}^* \quad (6.13)$$

где $\gamma_n^*, \gamma_{mn}^*, \gamma_{nl}^*$ — общие деформации элемента.

Относительные деформации бетона на площадках, параллельных площадкам трещин (рис. 6.8, z), приравниваются к относительным деформациям элемента:

$$\epsilon_m = \epsilon_{bm}; \quad \epsilon_l = \epsilon_{bl}; \quad \gamma_{ml}^* = \gamma_{bm}^*; \quad (6.14)$$

$$\gamma_{lm}^* = \gamma_{blm}^*; \quad \gamma_{mn}^* = \gamma_{bmn}^*; \quad \gamma_{ln}^* = \gamma_{bln}^*$$

Из относительных деформаций блоков бетона между трещинами образуем вектор-столбец

$$\{\epsilon_b\}_n = \{0, \epsilon_{bm}, \epsilon_{bl}, 0, \gamma_{bml}^*, \gamma_{bln}^*, \gamma_{bmn}^*, \gamma_{blm}^*, 0\}^T \quad (6.15)$$

Составим вектор-столбец общих относительных деформаций железобетона:

$$\{\epsilon^*\}_n = \{\epsilon_n, \epsilon_m, \epsilon_l, \gamma_{nm}^*, \gamma_{ml}^*, \gamma_{ln}^*, \gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^*\}^T \quad (6.16)$$

В силу принятых предпосылок

$$\{\epsilon^*\}_n = \{\epsilon_s^*\}_n + \{\epsilon_b^*\}_n \quad (6.17)$$

Схема 2 трещин (см. рис. 6.1, o). В этой схеме вклад в общие деформации вносят уже трещины двух ортогональных направлений, в результате:

$$\epsilon_n \approx \epsilon_{sn} = \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}}; \quad \epsilon_m \approx \epsilon_{sm} = \frac{a_{cr,m}}{l_{cr,m}};$$

$$\epsilon_l = \epsilon_{bl}; \quad \gamma_{nm}^* \approx \gamma_{snm}^* = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}}; \quad (6.18)$$

$$\gamma_{ml}^* \approx \gamma_{sml}^* = \frac{\Delta_{ml}}{l_{cr,m}}; \quad \gamma_{ln}^* = \gamma_{bln}^*; \quad \gamma_{mn}^* \approx \gamma_{smn}^* = \frac{\Delta_{mn}}{l_{cr,m}};$$

$$\gamma_{lm}^* = \gamma_{blm}^*; \quad \gamma_{nl}^* \approx \gamma_{snl}^* = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}}.$$

Схема 3 трещин. При этой схеме деформации элемента зависят от раскрытия трещин по трем ортогональным направлениям (см. рис. 6.1, z), т.е.:

$$\epsilon_n \approx \epsilon_{sn} = \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}}; \quad \epsilon_m \approx \epsilon_{sm} = \frac{a_{cr,m}}{l_{cr,m}};$$

$$\epsilon_l \approx \epsilon_{sl} = \frac{a_{cr,l}}{l_{cr,l}}; \quad \gamma_{nm}^* \approx \gamma_{snm}^* = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}}; \quad (6.19)$$

$$\gamma_{ml}^* \approx \gamma_{sml}^* = \frac{\Delta_{ml}}{l_{cr,l}}; \quad \gamma_{mn}^* \approx \gamma_{smn}^* = \frac{\Delta_{mn}}{l_{cr,m}};$$

$$\gamma_{lm}^* \approx \gamma_{slm}^* = \frac{\Delta_{lm}}{l_{cr,l}}; \quad \gamma_{nl}^* \approx \gamma_{snl}^* = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}}.$$

Общие деформации. Формально векторы относительных деформаций, связанных с раскрытием трещин и деформированием бетона между трещинами, можно представить в виде:

$$\begin{cases} \{e_s^*\}_n = \left\{ \delta_n \epsilon_n = \epsilon_{sn}, \delta_m \epsilon_m = \epsilon_{sm}, \delta_l \epsilon_l = \epsilon_{sl}; \right. \\ \delta_n \gamma_{nm}^* = \gamma_{snm}^*, \delta_m \gamma_{ml}^* = \gamma_{sml}^*, \delta_l \gamma_{ln}^* = \gamma_{sln}^*; \\ \left. \delta_m \gamma_{mn}^* = \gamma_{smn}^*, \delta_l \gamma_{lm}^* = \gamma_{slm}^*, \delta_n \gamma_{nl}^* = \gamma_{snl}^* \right\}^T, \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} \{e_b^*\}_n = \left\{ (1 - \delta_n) \epsilon_n = \epsilon_{bn}, (1 - \delta_m) \epsilon_m = \epsilon_{bm}, (1 - \delta_l) \epsilon_l = \epsilon_{bl}; \right. \\ (1 - \delta_n) \gamma_{nm}^* = \gamma_{bnm}^*, (1 - \delta_m) \gamma_{ml}^* = \gamma_{bml}^*; \\ (1 - \delta_{bln}) \gamma_{ln}^* = \gamma_{bln}^*, (1 - \delta_m) \gamma_{mn}^* = \gamma_{bmn}^*; \\ \left. (1 - \delta_l) \gamma_{lm}^* = \gamma_{blm}^*, (1 - \delta_n) \gamma_{nl}^* = \gamma_{bnl}^* \right\}^T \end{cases} \quad (6.21)$$

где искусственно введенные множители $\delta_n, \delta_m, \delta_l$ принимают такие же значения, что и в формулах (6.6) — нуль или единица в зависимости от схемы трещин.

Определение общих деформаций сводится к суммированию столбцов по формуле (6.17)

Деформации бетона вдоль направлений арматуры. Вектор-столбец (6.21) характеризует деформации бетона между трещинами в осях n, m, l . Эти деформации, как нетрудно заметить, связаны с напряжениями бетона на площадках, вдоль которых еще не образовались трещины. Для дальнейших выкладок потребуются еще значения этих деформаций бетона вдоль направлений армирования i . Их можно получить, используя преобразования компонент несимметричного тензора деформаций при повороте осей координат; формулы преобразования приведены в п. 1.6. В обобщенном виде (применительно к различным схемам трещин) эти деформации можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{bi} = & (1 - \delta_n) (\epsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + \\ & + (1 - \delta_m) (\epsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + \\ & + (1 - \delta_l) (\epsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* n_i l_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i). \end{aligned} \quad (6.22)$$

6.4. СВЯЗЬ РЕАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В АРМАТУРЕ С ОБЩИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ ЭЛЕМЕНТА

Схема 1 (рис. 6.1, б). Как указывалось в предпосылке 5ф, реальные напряжения в арматуре достигают некоторых максимальных значений σ_{si} в трещинах, а в блоках бетона между трещинами ввиду наличия сил сцепления арматуры с бетоном они уменьшаются. В модели фигурируют три вида напряжений: $\sigma_{si}, \sigma_{si}^m$ и $\tilde{\sigma}_{si}^m$. Реальные напряжения в арматуре в трещинах σ_{si} и средние значения напряже-

ний на участках между трещинами σ_{si}^m приведены на рис. 6.3, а. Связь между этими напряжениями, а также между напряжениями и деформациями выражается формулами:

$$\sigma_{si}^m = \sigma_{si} \Psi_{si}; \quad \epsilon_{si} = \sigma_{si}^m / E_{si} = \sigma_{si} \psi_{si} / E_{si}, \quad (6.23)$$

где ϵ_{si} — средние относительные деформации арматуры на участках между трещинами; E_{si} — модули деформации (упругости) арматуры; ψ_{si} — коэффициенты В.И. Мурашева, учитывающие влияние сцепления.

В упругопластической стадии деформирования арматурных стержней их реальная диаграмма деформирования (см. п. 5.1) приравнивается к средней диаграмме $\sigma_{si}^m = \epsilon_{si}^m E_{si}$, где E_{si} — теперь уже секущий модуль деформации, определяемый по средней диаграмме).

Формула (6.23) дает возможность определить часть деформаций арматуры, связанную непосредственно с напряжениями арматуры в трещинах. Согласно предпосылке 9ф деформации блоков бетона между трещинами, вычисленные по формуле (6.23), будут влиять на полные средние деформации $\tilde{\epsilon}_{si}$ и напряжения $\tilde{\sigma}_{si}^m$ арматуры. Значения этих уточненных средних деформаций и напряжений арматуры определяем по формулам:

$$\tilde{\epsilon}_{si} = \epsilon_{si} + \tilde{\epsilon}_{bi} (1 - \psi_{si}); \quad \tilde{\sigma}_{si}^m = E_{si} \tilde{\epsilon}_{si} \quad (6.24)$$

Более подробно формулы (6.24) рассмотрены в [61]. Сравнивая деформации бетона $\tilde{\epsilon}_{bi}$ с одноименными деформациями арматуры, видим, что они не равны, т.е. условие совместности осевых деформаций нарушается. В результате арматура будет выдвигаться на берег трещины на величину (см. рис. 6.2, а, б)

$$u_{si} = \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_{si} - \tilde{\epsilon}_{bi}) l_{si} = (\epsilon_{si} - \epsilon_{bi}) l_{cr,n} / 2n_i, \quad (6.25)$$

где $l_{cr,n} / 2n_i$ — половина длины стержня, заключенного между двумя трещинами.

Внося значение ϵ_{si} из (6.23) в (6.24), а затем $\tilde{\epsilon}_{si}$ в (6.25), находим

$$\begin{aligned} u_{si} = & [(\sigma_{si} \psi_{si} / E_{si}) - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si}] l_{cr,n} / 2n_i = \\ = & \sigma_{si} \frac{\psi_{si} l_{cr,n}}{2n_i E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \frac{\psi_{si} l_{cr,n}}{2n_i}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Перемещения $u_{si}, v_{sik(i)}, v_{sie(i)}$ являются компонентами одного вектора $0_1'0_1$, характеризующего половину перемещений одной поверхности трещины относительно другой (см. рис. 6.2, б, з).

В осях n, m, l компоненты этого вектора, который на рис. 6.2 обозначен $c'c$ ($0_1'0 = c'c$), равны $0,5a_{cr,n}, 0,5\Delta_{nm}, 0,5\Delta_{nl}$. Проецируя эти компоненты на ось i , находим

$$u_{si} = 0,5a_{cr,n}n_i + 0,5\Delta_{nm}m_i + 0,5\Delta_{nl}l_i \quad (6.27)$$

или, учитывая (6.11), (6.13)

$$u_{si} = 0,5\varepsilon_{sn}l_{cr,n}n_i + 0,5\gamma_{nm}^*l_{cr,n}m_i + 0,5\gamma_{nl}^*l_{cr,n}l_i \approx 0,5\varepsilon_n l_{cr,n}n_i + 0,5\gamma_{nm}^*l_{cr,n}m_i + 0,5\gamma_{nl}^*l_{cr,n}l_i \quad (6.28)$$

Подставляя значение u_{si} из (6.28) и $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ из (6.22) в (6.26), получим

$$\begin{aligned} q_{si} = E_{si} \left[\frac{1}{\psi_{si}} (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* m_i n_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\psi_{sim}} (\varepsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\psi_{sil}} (\varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i) \right], \quad (6.29) \end{aligned}$$

где пока формально введенные параметры $\psi_{sim} = \psi_{sil} = 1$. Подстановка (6.28) в (6.25) с учетом (6.22) приводит к выражению

$$\tilde{\varepsilon}_{si} = \varepsilon_n n_i^2 + \varepsilon_m m_i^2 + \varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i = \varepsilon_i \quad (6.30)$$

К такому же выражению приходим, определяя общие деформации ε_i вдоль направлений арматуры на основе формулы преобразования, поэтому $\tilde{\varepsilon}_{si} = \varepsilon_i$. Таким образом средние напряжения арматуры на отрезке стержня, заключенного между двумя соседними трещинами, согласно (6.24), (6.30) будут

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = \tilde{\varepsilon}_{si} E_{si} = \varepsilon_i E_{si} \quad (6.31)$$

Влияние трещин на формулу (6.30), а следовательно, и (6.31), не сказывается.

Кроме осевых u_{si} арматура в трещинах будет испытывать тангенциальные перемещения $v_{sik(i)}$, $v_{sie(i)}$ (рис. 6.2, б). Эти перемещения находим по аналогии с перемещениями (6.27), проецируя компоненты $0,5a_{cr,n}$, $0,5\Delta_{nm}$, $0,5\Delta_{nl}$ на оси $k(i)$ и $e(i)$:

$$\left. \begin{aligned} v_{sik(i)} &= 0,5a_{cr,n}n_{k(i)} + 0,5\Delta_{nm}m_{k(i)} + 0,5\Delta_{nl}l_{k(i)}, \\ v_{sie(i)} &= 0,5a_{cr,n}n_{e(i)} + 0,5\Delta_{nm}m_{e(i)} + 0,5\Delta_{nl}l_{e(i)} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Учитывая (6.12), (6.13), эти выражения преобразовываем к виду:

$$\left. \begin{aligned} v_{sik(i)} &= (\varepsilon_n n_{k(i)} + \gamma_{nm}^* m_{k(i)} + \gamma_{nl}^* l_{k(i)}) l_{cr,n}; \\ v_{sie(i)} &= (\varepsilon_n n_{e(i)} + \gamma_{nm}^* m_{e(i)} + \gamma_{nl}^* l_{e(i)}) l_{cr,n} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Если пренебречь в (6.26) деформациями бетона $\tilde{\varepsilon}_{bi}$, можно получить

$$u_{si} \approx \sigma_{si} \frac{\psi_{si} l_{cr,n}}{2 n_i E_{si}}, \quad (6.34)$$

где величина $\psi_{si} l_{cr,n}/2n_i E_{si}$ характеризует податливость контактной зоны бетона с арматурой осевым смещениям арматуры относительно бетона.

По аналогии с (6.34) запишем соотношение между касательными напряжениями и смещениями:

$$\left. \begin{aligned} v_{sik(i)} &= \tau_{sik(i)} \frac{l_{cr,n} \psi_{si} n_{\tau i}}{2 E_{si} n_i}; \\ v_{sie(i)} &= \tau_{sie(i)} \frac{l_{cr,n} \psi_{si} n_{\tau i}}{2 E_{si} n_i}, \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

приняв, что отношение податливости стержней осевым и тангенциальным смещениям в бетоне равно функции $n_{\tau i}$, которая, как указывалось в предпосылке бф, зависит от податливости основания бетона под арматурой смятию арматурой; значения $n_{\tau i}$ представлены ниже (см. п. 6.11). Внося выражения (6.35) в (6.33), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \tau_{sik(i)} &= \frac{E_{si}}{\psi_{si} n_{\tau i}} (\varepsilon_n n_i n_{k(i)} + \\ &+ \gamma_{nm}^* n_i m_{k(i)} + \gamma_{nl}^* n_i l_{k(i)}); \quad (6.36) \end{aligned}$$

$$\tau_{sie(i)} = \frac{E_{si}}{\psi_{si} n_{\tau i}} (\varepsilon_n n_i n_{e(i)} + \gamma_{nm}^* n_i m_{e(i)} + \gamma_{ne}^* n_i l_{e(i)}).$$

Укажем на одну особенность формул (6.36). Относительные деформации вектор-столбца (6.12) или в более обобщенном виде вектор-столбца (6.20), связанные с раскрытием трещин, преобразовываются при повороте осей координат по простым законам преобразования компонент несимметричного тензора второго ранга вида (1.61).

Преобразуем компоненты (6.20) к осям армирования i , $k(i)$, $e(i)$. Из полученных таким образом девяти компонент нас будут интересовать три: ε_{si} — относительные деформации арматуры вдоль оси i ; $\mathcal{J}_{sik(i)}^*$ — сдвиги арматуры в плоскости $ik(i)$; $\mathcal{J}_{sie(i)}^*$ — сдвиги арматуры в плоскости $ie(i)$. Эти компоненты составят:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{si} &= \delta_n (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* m_i n_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + \\ &+ \delta_m (\varepsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + \\ &+ \delta_l (\varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i); \quad (6.37) \end{aligned}$$

$$\gamma_{sij}^* = \delta_n (\epsilon_n n_i n_j + \gamma_{nm}^* n_i m_j + \gamma_{nl}^* n_i l_j) + \delta_m (\epsilon_m m_i m_j + \gamma_{mn}^* m_i n_j + \gamma_{ml}^* m_i l_j) + \delta_l (\epsilon_l l_i l_j + \gamma_{ln}^* l_i n_j + \gamma_{lm}^* l_i m_j) \quad (6.38)$$

$$(j = k(i), e(i)).$$

Для схемы 1 $\delta_n = 1$, $\delta_m = \delta_l = 0$. Сопоставляя с учетом этого формулы (6.36) с формулами (6.38), можно заметить, что

$$\tau_{sik}(i) = \frac{E_{si}}{\psi_{si} n_{Ti}} \gamma_{sik}^*(i); \quad (6.39)$$

$$\tau_{sie}(i) = \frac{E_{si}}{\psi_{si} n_{Ti}} \gamma_{sie}^*(i).$$

Другие схемы трещин. В элементах со схемами трещин 2 и 3 существенным становится взаимное влияние пересечений арматуры трещинами различных направлений, что не позволяет использовать для них вывод формул, принятый при рассмотрении схемы 1. Используем иной подход, рассмотрев сначала схему 3, а затем схему 2 (см. рис. 6.1, в, з).

В схеме 3 бетон теряет свойства самостоятельной компоненты. Так, в формулах (6.24) деформация бетона принята равной нулю ($\tilde{\epsilon}_{bi} \approx 0$). Учитывая это и сопоставляя формулы (6.23) и (6.24), находим:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{si} &= \epsilon_{si} = \sigma_{si}^m / E_{si} = \sigma_{si} \psi_{si} / E_{si}; \\ \tilde{\sigma}_{si}^m &= \tilde{\epsilon}_{si} E_{si} = \epsilon_{si} E_{si} = \sigma_{si}^m = \sigma_{si} \psi_{si}. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Из сопоставления (6.30), (6.37), принимая во внимание, что в схеме 3 $\delta_n = \delta_m = \delta_l = 1$, следует

$$\epsilon_{si} = \tilde{\epsilon}_{si} = \epsilon_i,$$

в результате зависимости (6.40) преобразовываются к виду

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = \epsilon_i E_{si}; \quad \sigma_{si} = \epsilon_i E_{si} / \psi_{si}. \quad (6.41)$$

Общие зависимости. Формально, σ_{si} можно получить по формуле (6.29), приняв $\psi_{sim} = \psi_{sil} = \psi_{si}$. Сравнивая формулы σ_{si} , полученные для схем 1 и 3 (рис. 6.1, а, з), можно заметить закономерность перехода от одной схемы к другой. Эта закономерность сводится к тому, что постепенно перед членами зависимости (6.29), заключенными в круглые скобки, коэффициенты ψ_{sik}^* ($k = n, m, l$) переходят

в коэффициенты ψ_{si} . В элементах со схемой 1 такой переход осуществляется перед первыми круглыми скобками, в элементах со схемой 3 такой переход осуществляется перед тремя круглыми скобками. Следовательно, для второй схемы трещин $\psi_{sim} = \psi_{si}$, $\psi_{sil} = 1$.

Обобщенно (применительно к различным схемам трещин) формулы (6.31); (6.39) можно записать так:

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = E_{si} [\epsilon_n n_i^2 + \epsilon_m m_i^2 + \epsilon_l l_i^2 + (\gamma_{nm}^* + \gamma_{mn}^*) n_i m_i + (\gamma_{ml}^* + \gamma_{lm}^*) m_i l_i + (\gamma_{ln}^* + \gamma_{nl}^*) l_i n_i], \quad (6.42)$$

$$q_{si} = \frac{E_{si}}{\psi_{si}} \left[\frac{1}{\psi_{sin}} (\epsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + \frac{1}{\psi_{sim}} (\epsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + \frac{1}{\psi_{sil}} (\epsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i) \right], \quad (6.43)$$

где $\psi_{sim} = 1$; остальные коэффициенты ψ_{sim}^* , ψ_{sil} принимают указанные выше значения в зависимости от схемы трещин; эти коэффициенты также можно вычислять по формуле

$$\psi_{sir} = \frac{1}{\delta_r + \psi_{si}(1 - \delta_r)}, \quad (6.44)$$

($r = n, m, l$).

Логично предположить, что формулы (6.39) справедливы для всех схем трещин, меняются лишь значения углов сдвига γ_{sik}^* , γ_{sie}^* . Эти значения можно получить из (6.38), полагая, как уже указывалось, коэффициенты δ_r ($r = n, m, l$) равными нулю или единице в зависимости от схемы трещин.

Таким образом обобщенно (применительно ко всем схемам трещин) выражения типа (6.39) можно представить в виде

$$\tau_{sij} = \frac{E_{si}}{\psi_{si} n_{Ti}} \left[\delta_n (\epsilon_n n_i n_j + \gamma_{nm}^* n_i m_j + \gamma_{nl}^* n_i l_j) + \delta_m (\epsilon_m m_i m_j + \gamma_{mn}^* m_i n_j + \gamma_{ml}^* m_i l_j) + \delta_l (\epsilon_l l_i l_j + \gamma_{ln}^* l_i n_j + \gamma_{lm}^* l_i m_j) \right]. \quad (6.45)$$

6.5. ВЫВОД ОБЩИХ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Вектор-столбец напряжений железобетона с трещинами (6.10) состоит из трех столбцов-компонент. Вывод физических соотношений состоит в установлении связей между компонентами столбцов и общими деформациями. После этого устанавливаются общие соотношения.

Связь приведенных напряжений арматуры с общими деформациями. Определив реальные напряжения в арматуре, можно установить вклад этих напряжений в общие напряжения элемента. Этот вклад характеризуется вектор-столбцом приведенных (отнесенных к единичным площадкам элемента) напряжений (6.4). Формирование приведенных напряжений подробно рассмотрено в п. 6.2. Внося значения напряжений (6.42), (6.43), (6.45) в выражения (6.5), получим

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{sn} \\ \bar{\sigma}_{sm} \\ \bar{\sigma}_{sl} \\ \bar{\tau}_{snn} \\ \bar{\tau}_{sml} \\ \bar{\tau}_{sln} \\ \bar{\tau}_{smn} \\ \bar{\tau}_{slm} \\ \bar{\tau}_{snl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{s11}^* & d_{s12}^* & d_{s13}^* & d_{s14}^* & d_{s15}^* & d_{s16}^* & d_{s17}^* & d_{s18}^* & d_{s19}^* \\ & d_{s22}^* & d_{s23}^* & d_{s24}^* & d_{s25}^* & d_{s26}^* & d_{s27}^* & d_{s28}^* & d_{s29}^* \\ & & d_{s33}^* & d_{s34}^* & d_{s35}^* & d_{s36}^* & d_{s37}^* & d_{s38}^* & d_{s39}^* \\ & & & d_{s44}^* & d_{s45}^* & d_{s46}^* & d_{s47}^* & d_{s48}^* & d_{s49}^* \\ & & & & d_{s55}^* & d_{s56}^* & d_{s57}^* & d_{s58}^* & d_{s59}^* \\ & & & & & d_{s66}^* & d_{s67}^* & d_{s68}^* & d_{s69}^* \\ & & & & & & d_{s77}^* & d_{s78}^* & d_{s79}^* \\ & & & & & & & d_{s88}^* & d_{s89}^* \\ & & & & & & & & d_{s99}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_m \\ \epsilon_l \\ \gamma_{nm}^* \\ \gamma_{ml}^* \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{mn}^* \\ \gamma_{lm}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{Bmatrix}, \quad (6.46)$$

Симметрично

или в более компактном виде

$$[\sigma_s^*]_n = [d_s^*]_n [\epsilon]_n, \quad (6.47)$$

где $[d_s]_n$ — матрица жесткости арматуры, характеризующая вклад арматуры в общую жесткость железобетона с трещинами.

Элементы d_{ske}^* матрицы жесткости арматуры вычисляются по формулам:

$$d_{s11}^* = \sum_i [E_{sin} n_i^2 (n_i^2 + \delta_n n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)]; \quad (6.48)$$

$$d_{s12}^* = \sum_i [E_{sim} m_i n_i (m_i n_i + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j n_j)];$$

$$d_{s13}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (n_i l_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s14}^* = \sum_i [E_{sin} n_i^2 (n_i m_i + \delta_n n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j m_j)];$$

$$d_{s15}^* = \sum_i [E_{sim} m_i n_i (n_i l_i + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s16}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (n_i^2 + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)];$$

$$d_{s17}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (n_i^2 + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)];$$

$$d_{s18}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (n_i m_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j n_j)];$$

$$d_{s19}^* = \sum_i [E_{sin} n_i^2 (n_i l_i + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s22}^* = \sum_i [E_{sim} m_i^2 (m_i^2 + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j^2)];$$

$$d_{s23}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (m_i l_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j l_j)];$$

$$d_{s24}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (m_i^2 + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j^2)];$$

$$d_{s25}^* = \sum_i [E_{sim} m_i^2 (m_i l_i + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j l_j)];$$

$$d_{s26}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (m_i n_i + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j m_j)];$$

$$d_{s28}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (m_i^2 + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j^2)];$$

$$d_{s29}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (m_i l_i + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j m_j)];$$

$$d_{s33}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (l_i^2 + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j^2)];$$

(6.48)

$$d_{s34}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (l_i m_i + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j l_j)];$$

$$d_{s35}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (l_i^2 + \delta_m \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j^2)];$$

$$d_{s36}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (n_i l_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j n_j)];$$

$$d_{s37}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (n_i l_i + \delta_m \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s38}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (m_i l_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j m_j)];$$

$$d_{s39}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (l_i^2 + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j^2)];$$

$$d_{s44}^* = \sum_i [E_{sim} n_i^2 (m_i^2 + \delta_n n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j^2)];$$

$$d_{s45}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (m_i l_i + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j l_j)]; \quad (6.48)$$

$$d_{s46}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (n_i m_i + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j m_j)];$$

$$d_{s47}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (n_i m_i + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j n_j)];$$

$$d_{s48}^* = \sum_i [E_{sil} n_i l_i (m_i^2 + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j^2)];$$

$$d_{s49}^* = \sum_i [E_{sim} n_i^2 (m_i l_i + \delta_n n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j m_j)];$$

$$d_{s55}^* = \sum_i [E_{sim} m_i^2 (l_i^2 + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j^2)];$$

$$d_{s56}^* = \sum_i [E_{sil} l_i m_i (n_i l_i + \delta_m \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s57}^* = \sum_i [E_{sim} m_i^2 (n_i l_i + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s58}^* = \sum_i [E_{sil} l_i m_i (m_i l_i + \delta_m \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j m_j l_j)];$$

$$d_{s59}^* = \sum_i [E_{sim} m_i n_i (l_i^2 + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j l_j^2)];$$

$$d_{s66}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (n_i^2 + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)];$$

$$d_{s67}^* = \sum_i [E_{sil} m_i l_i (n_i^2 + \delta_n \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)];$$

$$d_{s68}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (n_i m_i + \delta_l n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j m_j)];$$

$$d_{s69}^* = d_{s13}^*;$$

$$d_{s77}^* = \sum_i [E_{sim} m_i^2 (n_i^2 + \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j^2)];$$

$$d_{s78}^* = d_{s26}^*;$$

$$d_{s79}^* = \sum_i [E_{sim} n_i m_i (n_i l_i + \delta_n \delta_m n_{\tau i}^{-1} \sum_j n_j l_j)];$$

$$d_{s88}^* = \sum_i [E_{sil} l_i^2 (m_i^2 + \delta_l \sum_j m_j^2)]; \quad d_{s89}^* = d_{s34}^*;$$

$$E_{sin} = E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si}; \quad E_{sim} = E_{si} \psi_{sim}^{-1} \mu_{si};$$

$$E_{sil} = E_{si} \psi_{sil}^{-1} \mu_{si};$$

$$j = e(i), \quad k(i).$$

Заметим, что в соотношениях (6.48) введено в прямом виде суммирование по i -нескольким направлениям арматуры (в других соотношениях оно подразумевается, однако, чтобы не усложнять записи формул, не вводится).

Из представленных формул (6.48) можно получить коэффициенты d_{sij}^* для любой схемы трещин, а также элементов без трещин (схемы 0), присваивая параметрам $\delta_n, \delta_m, \delta_l, \psi_{sim}, \psi_{sil}$ значения, указанные в п. 6.4. Состояние элементов без трещин (схема 0) получается при $\psi_{si} = \psi_{sim} = \psi_{sil} = 1; \delta_n = \delta_m = \delta_l = 0$ (можно принимать $\delta_n = \delta_m = \delta_l = 1$, тогда $n_{\tau i} \approx 2,5$).

В практических расчетах коэффициенты матрицы $[d_s^*]_n$ рекомендуется формировать при помощи компактного оператора, используя вместо матричной записи операторную запись соотношений (6.46):

$$\tilde{\sigma}_{skr} = \sum_{pq} \epsilon_{pq}^* [E_{si} \psi_{sip}^{-1} \mu_{si} k_{ij} p_i (r_i q_i + \delta_k \delta_p n_{ii} \sum_j r_j q_j)], \quad (6.49)$$

$$kr, pq = nn, mm, ll, nm, ml, ln, mn, lm, nl;$$

$$j = k(i), e(i),$$

где, если условно принять, что $n > m > l$, то $p' = p$ при $p \leq k$, $p' = k$ при $p > k$. Кроме того,

$$\psi_{sin} = \psi_{si}; \quad \tilde{\sigma}_{snn} = \tilde{\sigma}_{sn}, \dots, \quad \tilde{\sigma}_{snm} = \tilde{\tau}_{snm}, \dots,$$

$$\epsilon_{nn}^* = \epsilon_n, \dots, \quad \epsilon_{nm}^* = \gamma_{nm}^*, \dots,$$

Связь напряжений бетона с деформациями элемента. Напряжения бетона составляют часть общих напряжений элемента. Эта часть в выражении (6.10) представляется вектором $\{\sigma_b^*\}_n$. Компоненты столбца применительно ко всем схемам трещин формируются по формуле (6.7). Установим связь между напряжениями $\{\sigma_b^*\}_n$ и деформациями $\{\epsilon_b^*\}_n$, которые указаны в столбце (6.21).

Как было показано в гл. 3, бетон до появления трещин деформируется как особый ортотропный материал, оси ортотропии которого совпадают с направлениями главных напряжений. Полагаем, что этот характер деформирования сохранится и после появления трещин. Оси ортотропии в элементах с трещинами ориентируются вдоль нормалей к площадкам трещин (вдоль осей n, m, l), хотя эти площадки после трещинообразования могут становиться не главными.

Однако необходимо выделить три отличительные особенности описания связей между напряжениями для элементов с трещинами: 1) вместо матрицы податливости (3.96) размером 6×6 записывается матрица 9×9 вследствие формального разделения углов сдвига бетона $\gamma_{bij} = \gamma_{bji}$ ($ij = n, m, l$) на два угла сдвига γ_{bij}^* и γ_{bji}^* ; 2) вдоль нормалей к трещинам бетон выключается из рассмотрения (исключается строка по определению относительных деформаций, содержащих в первом индексе обозначение соответствующих осей из n, m, l , которые становятся нормальными к трещинам); 3) модули деформации бетона вдоль других направлений определяются с учетом влияния на деформативность элемента повреждаемости блоков бетона трещинами.

Соотношения между девятикомпонентными столбцами напряжений и деформациями представим в виде

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{bn} \\ \epsilon_{bm} \\ \epsilon_{bl} \\ \gamma_{bmn}^* \\ \gamma_{bml}^* \\ \gamma_{bln}^* \\ \gamma_{bmn}^* \\ \gamma_{blm}^* \\ \gamma_{bnl}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} c_{b11} & c_{b12} & c_{b13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{b12} & c_{b22} & c_{b23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{b13} & c_{b23} & c_{b33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b44}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b55}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b66}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b77}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b88}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b99}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{bn} \\ \sigma_{bm} \\ \sigma_{bl} \\ \tau_{bnm} \\ \tau_{bml} \\ \tau_{bln} \\ \tau_{bmn} \\ \tau_{blm} \\ \tau_{bnl} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

или в сокращенном виде

$$\{\epsilon_b^*\}_n = [c_b^*]_n \{\sigma_b^*\}_n, \quad (6.51)$$

где коэффициенты c_{bij} ($i, j = 1, 2, 3$) и c_{bij}^* ($ij = 44, \dots, 99$) симметричной матрицы податливости $[c_b^*]_n$ вычисляются по формулам (3.96) – (3.109) с дополнительным учетом повреждаемости бетона трещинами.

Коэффициенты c_{bii}^* ($ii = 44, \dots, 99$) можно также вычислять по более точным зависимостям (3.96). Тонкими линиями для примера в (6.50) вычеркнуты строки и столбцы, которые исключаются в случае схемы 1 трещин.

Решая уравнения (6.50) или (6.51) относительно напряжений, получим

$$\{\sigma_b^*\}_n = [d_b^*]_n \{\epsilon_b^*\}_n, \quad (6.52)$$

где

$$[d_b^*]_n = [c_b^*]_n^{-1}$$

Матрица жесткости $[d_b^*]_n$ имеет такое же наполнение коэффициентами, что и матрица $[c_b^*]_n$ в соотношениях (6.50), причем буквы c заменяются на d (индексы остаются без изменения).

В случае схемы 1 трещин

$$\begin{aligned} d_{b11} &= d_{b12} = d_{b13} \approx d_{b44}^* \approx d_{b99}^* \approx 0, \\ d_{b22} &= c_{b33}/\Delta; \quad d_{b33} = c_{b22}/\Delta; \quad d_{b23} = -c_{b23}/\Delta; \\ \Delta &= c_{b22}c_{b33} - c_{b23}^2; \quad d_{bii}^* = (c_{bii}^*)^{-1} \quad (ii = 55, 66, 77, 88) \end{aligned} \quad (6.53)$$

В случае схемы 2 трещин

$$\begin{aligned} d_{b11} &\approx d_{b12} \approx d_{b13} \approx d_{b44}^* \approx d_{b99}^* \approx 0; \\ d_{b22} &\approx d_{b23} \approx d_{b55}^* \approx d_{b77}^* \approx 0; \\ d_{b33} &= 1/c_{b33}; d_{b66}^* = 1/c_{b66}; d_{b88}^* = 1/c_{b88}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Коэффициенты, которые не указаны в зависимостях (6.53), (6.54), принимаются равными нулю. В случае схемы 3 все коэффициенты матрицы $[d_b^*]_n$ принимаются равными нулю.

С учетом указанных особенностей формирования элементов матрицы $[d_b^*]_n$ соотношения (6.52) можно представить

$$\{\sigma_b^*\}_n = [d_b^*]_n \{\epsilon^*\}_n. \quad (6.55)$$

В записи (6.55) параметры $(1 - \delta_r)$, $r = n, m, l$, связывающие согласно (6.21) деформации бетона $\{\epsilon_b^*\}_n$ с деформациями элемента $\{\epsilon^*\}_n$, перенесены в матрицу $[d_b^*]_n$. Повреждаемость бетона трещинами учитывается приближенно корректировкой коэффициентов ν_{bi} , $i = n, m, l$, входящих в элементы c_{bij} и d_{bij} (коэффициенты ν_{bi} рассмотрены в гл. 3). При этом входящая в эти формулы призменная прочность R_b заменяется на $\tilde{\mathcal{J}}_{bp} R_b$, а деформации ϵ_{Rb} в вершине диаграммы одноосного сжатия — на $\epsilon_{Rb} \tilde{\mathcal{J}}_{bp}$. Параметр $\tilde{\mathcal{J}}_{bp}$ определяется по представленной ниже формуле (6.112), а параметр $\tilde{\mathcal{J}}_{bp}$ принимается равным меньшему из двух величин: 1, 2, и $(0,5 + 1,5\sqrt{\tilde{\mathcal{J}}_{bp}^*})$. Эти коорректирующие параметры были установлены в [87].

Напряжения зацепления связываются с общими деформациями соотношениями:

$$\{\sigma_q^*\}_n = [d_q^*] \{\epsilon^*\}_n, \quad (6.56)$$

где $[d_q^*]$ — матрица модулей зацепления; в этой матрице ненулевыми будут только коэффициенты, стоящие на главной диагонали; они обозначаются: $E_{qn} \delta_n^*$; $E_{qm} \delta_m^*$; $E_{ql} \delta_l^*$; $E_{qnn} \delta_n^*$; $E_{qml} \delta_m^*$; $E_{qll} \delta_l^*$.

Значения модулей зацепления даны ниже.

Общие физические соотношения. Внося значения напряжений $\{\sigma_s^*\}_n$, $\{\sigma_q^*\}_n$ и $\{\sigma_n^*\}_n$, представленные формулами (6.47), (6.51), (6.55) в (6.10), находим

$$\{\sigma^*\}_n = ([d_s^*]_n + [d_b^*]_n + [d_q^*]_n) \{\epsilon^*\}_n = [d^*]_n \{\epsilon^*\}_n, \quad (6.57)$$

где $[d^*]_n$ — симметричная матрица жесткости железобетона размером 9×9 в осадках n, m, l ; элементы d_{ij}^* этой матрицы обозначаются так же, как и элементы матрицы $[d_b^*]_n$ в (6.46), только без нижнего индекса s .

Соотношения (6.57) представляют собой общие физические соотношения железобетона с трещинами. Соотношения (6.57) еще не могут использоваться в расчетах, поскольку они связаны со сдвиговыми компонентами несимметричного тензора деформаций, в выражения которых через производные от перемещений входят компоненты жесткого поворота (см. п. 1.6).

В связи с этим можно поступать двояко: использовать уравнения типа моментной теории упругости, дополнив соотношения (6.57) дополнительными связями между моментами, и, например, производными от углов поворота; использовать уравнения классической теории упругости, сведя систему девяти соотношений (6.57) к системе шести уравнений. Будем использовать второе направление. При этом в силу закона о парности касательных напряжений ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) должна соблюдаться парность общих касательных напряжений (бетон плюс арматура), хотя для компонент напряжений бетона и арматуры, взятых в отдельности, парность будет нарушаться.

Кроме условий парности

$$\tau_{nm} = \tau_{mn}; \quad \tau_{nl} = \tau_{ln}; \quad \tau_{ml} = \tau_{lm} \quad (6.58)$$

вводятся суммарные углы сдвига

$$\gamma_{nm} = \gamma_{mn} = \gamma_{nm}^* + \gamma_{mn}^*; \quad \gamma_{ml} = \gamma_{lm} = \gamma_{ml}^* + \gamma_{lm}^*; \quad (6.59)$$

$$\gamma_{ln} = \gamma_{nl} = \gamma_{ln}^* + \gamma_{nl}^*.$$

При этом вектор-столбцы напряжений и деформаций составят

$$\{\sigma\}_n = \{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{ln}\}^T; \quad (6.60)$$

$$\{\epsilon\}_n = \{\epsilon_n, \epsilon_m, \epsilon_l, \gamma_{nm}, \gamma_{ml}, \gamma_{ln}\}^T.$$

Соотношения (6.57) можно преобразовать к соотношениям между $\{\sigma\}_n$ и $\{\epsilon\}_n$ двумя способами.

Первый способ преобразования. Этот способ состоит в следующем [85]. Соотношения (6.57) разрешаются относительно деформаций

$$\{\epsilon_n^*\}_n = [d_n^*]^{-1} \{\sigma_n^*\}_n, \quad (6.61)$$

а затем в этой системе четвертое уравнение суммируется с седьмым, пятое с восьмым, шестое с девятым, чтобы можно было получить суммарные углы сдвига (6.59), и шесть компонент касательных напряжений заменяются на три компоненты согласно условию парности (6.58). Таким образом приходим к системе вида

$$\{\epsilon\}_n = [d]_n^{-1} \{\sigma\}_n,$$

которая разрешается относительно напряжений, в результате

$$\{\sigma\}_n = [d]_n \{\epsilon\}_n, \quad (6.62)$$

где $[d]_n$ — симметричная матрица жесткости (матрица упругости по терминологии МКЭ) железобетона размером 6×6 .

Система (6.62) представляет окончательную систему физических соотношений железобетона с трещинами.

Рассмотренную выше процедуру получения соотношений (6.62) можно выполнить в матричном виде. Шестикомпонентный вектор связан с девятикомпонентным вектором $\{\varepsilon^*\}_n$ соотношением

$$\{\varepsilon\}_n = [H]\{\varepsilon^*\}_n,$$

где $[H]$ — прямоугольная матрица размером 6×9 , состоящая из единиц и нулей

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для матрицы $[d]_n$ с помощью очевидного равенства $\{\varepsilon^*\}\{\sigma^*\} = \{\varepsilon\}\{\sigma^*\}$ можно получить соотношение

$$[d]_n = ([H]^T [d^*]_n [H])^{-1}. \quad (6.63)$$

Преобразования по формуле (6.63) требуют обращения квадратных матриц 9-го и 6-го порядков. Многократное выполнение этой процедуры в итерационных процессах требует значительных затрат машинного времени на ЭВМ. Эти затраты можно существенно уменьшить, используя для получения соотношений (6.62) второй способ.

Второй способ преобразования соотношений (6.57). Учитывая (6.59), вектор относительных деформаций $\{\varepsilon^*\}_n$ записывается в виде

$$\{\varepsilon^*\}_n = \{\varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l, (\gamma_{nm} - \gamma_{nm}^*), (\gamma_{ml} - \gamma_{ml}^*), (\gamma_{ln} - \gamma_{ln}^*), \gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^*\}^T. \quad (6.64)$$

Рассмотрев последние шесть уравнений (6.57) и приравняв попарно эти уравнения согласно (6.58), получим систему трех уравнений для определения $\gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^*$ в виде

$$[d^0] \{\gamma^*\} = [d^{00}] \{\varepsilon\}_n, \quad (6.65)$$

где

$$\{\gamma^*\} = \{\gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^*\}^T; \quad [d^0], [d^{00}]$$

— матрицы размерами 3×3 и 3×6 , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты матрицы $[d^*]_n$.

Записывая первые шесть уравнений (6.57), предварительно приняв вектор-столбец $\{\varepsilon^*\}_n$ в виде (6.64) и внося в эти зависимости значения углов $\{\gamma^*\}$, получим окончательную систему физических соотношений (6.62). Указанную выше процедуру преобразования можно выполнить в матричном виде. Для этого предварительно разделим компоненты векторов $\{\sigma^*\}_n$ и $\{\varepsilon^*\}_n$ на три части (блока):

$$\{\sigma^*\}_n = \{\{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l\}^T, \{\tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{ln}\}^T, \{\tau_{mn}, \tau_{lm}, \tau_{nl}\}^T\} = \{\{\sigma_{11}^*\}, \{\sigma_{12}^*\}, \{\sigma_{21}^*\}\}; \quad (6.66)$$

$$\{\varepsilon^*\}_n = \{\{\varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l\}^T, \{\gamma_{nm}^*, \gamma_{ml}^*, \gamma_{ln}^*\}^T, \{\gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^*\}^T\} = \{\{\varepsilon_{11}^*\}, \{\varepsilon_{12}^*\}, \{\varepsilon_{21}^*\}\}.$$

Соотношения (6.57) также переписываются в блочном виде:

$$\begin{cases} \{\sigma_{11}^*\} \\ \{\sigma_{12}^*\} \\ \{\sigma_{21}^*\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [d_{11}^*] & [d_{12}^*] & [d_{13}^*] \\ [d_{12}^*] & [d_{22}^*] & [d_{23}^*] \\ [d_{13}^*] & [d_{23}^*] & [d_{33}^*] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\varepsilon_{11}^*\} \\ \{\varepsilon_{12}^*\} \\ \{\varepsilon_{21}^*\} \end{cases}, \quad (6.67)$$

где $[d_{ij}^*]$ — подматрицы размером 3×3 ($ij = 11, 12, 13, 22, 23, 33$) общей матрицы $[d^*]_n$; согласно (6.67) матрица $[d^*]_n$ разделяется на девять частей (подматриц).

Шестикомпонентные векторы напряжений и деформаций представляются в блочном виде так:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_n &= \{\{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l\}^T, \{\tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{nl}\}^T\} = \\ &= \{\{\sigma_{11}\}, \{\sigma_{12}\}\}; \\ \{\varepsilon\}_n &= \{\{\varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l\}^T, \{\gamma_{nm}, \gamma_{ml}, \gamma_{ln}\}^T\} = \\ &= \{\{\varepsilon_{11}\}, \{\varepsilon_{12}\}\}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

тогда связи (6.64) между ними записываются:

$$\begin{cases} \{\sigma_{11}\} \\ \{\sigma_{12}\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [d_{11}] & [d_{12}] \\ [d_{12}]^T & [d_{22}] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\varepsilon_{11}\} \\ \{\varepsilon_{12}\} \end{cases}, \quad (6.69)$$

где $[d_{ij}]$ ($ij = 11, 12, 22$) подматрицы 3×3 общей матрицы $[d]_n$.

Используя очевидные равенства:

$$\{\sigma_{11}^*\} = \{\sigma_{11}\}; \{\sigma_{12}^*\} = \{\sigma_{21}^*\} = \{\sigma_{12}\}; \quad (6.70)$$

$$\{\epsilon_{11}^*\} = \{\epsilon_{11}\}; \{\epsilon_{12}^*\} = \{\epsilon_{12}\} + \{\epsilon_{21}^*\}$$

можно выразить блоки искомой матрицы $[d]_n$ через блоки матрицы $[d^*]_n$:

$$[d_{ij}] = [d_{ij}^*] - ([d_{i3}^*] - [d_{i2}^*])[A]([d_{j3}^*] - [d_{j2}^*])^T, \quad (6.71)$$

где $[A] = ([d_{22}^*] + [d_{33}^*] - [d_{23}^*] - [d_{23}^*])^{-1}$.

В этом случае обращается матрица 3×3 в отличие от обращения матрицы гораздо большей размерности в (6.63).

6.6. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Этот вопрос рассматривался в работе Н.И. Карпенко и С.Ф. Клованича [80]. Пусть элемент с трещинами подвергается не только силовым, но и тепловым воздействиям; t^0 — приращение температуры сверх некоторой среднеклиматической температуры, которая принимается за нормальную. Полагаем, что бетон с трещинами ведет себя и на температурные воздействия как некоторый ортотропный материал с осями ортотропии n, m, l , направленными перпендикулярно (и параллельно) к площадкам трещинообразования. Вследствие этого коэффициенты температурной деформации бетона $\alpha_{bn}^0, \alpha_{bm}^0, \alpha_{bl}^0$ вдоль этих осей могут различаться, а сами дополнительные деформации составят: $\alpha_{bn} t^0, \alpha_{bm} t^0, \alpha_{bl} t^0$. В результате соотношения (6.51) записываются

$$\{\epsilon_b^*\}_n = [c_b^*]_n \{\sigma_b^*\}_n + \{\alpha_{bn}^0\}_n t^0, \quad (6.72)$$

где $\{\alpha_{bn}^0\}_n$ — вектор-столбец коэффициентов температурной деформации,

$$\{\alpha_{bn}^0\}_n = \{\alpha_{bn}^0, \alpha_{bm}^0, \alpha_{bl}^0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T. \quad (6.73)$$

Температурная часть деформаций в (6.72) составляет

$$\{\epsilon_b^0\}_n = \{\alpha_{bn}^0\}_n \cdot t^0, \quad (6.74)$$

а силовая, связанная с действием напряжений,

$$\{\epsilon_b^*\}_n - \{\epsilon_b^0\}_n = [c_b^*]_n \{\sigma_b^*\}_n \quad (6.75)$$

Обозначая

$$\{\beta_b^*\}_n = [d_b^*]_n \{\alpha_b^*\}_n, \quad [c_b^*]^{-1} = [d_b^*]_n, \quad (6.76)$$

можно преобразовать зависимости (6.75) к окончательным зависимостям вида

$$\{\sigma_b^*\}_n = [d_b^*]_n \{\epsilon_b^*\}_n - \{\beta_b^*\}_n t^0. \quad (6.77)$$

Заметим, что деформации $\{\epsilon_b^0\}_n$ могут включать в себя не только температурные деформации, но и деформации усадки $\{\epsilon_b^y\}_n$ и другие вынужденные деформации, т.е.¹

$$\{\epsilon_b^0\}_n = \{\epsilon_b^y\}_n + \{\alpha_b^y\}_n t^0.$$

Обозначая

$$\{\sigma_b^y\}_n = [d_b^*]_n \{\epsilon_b^y\}_n, \quad (6.78)$$

вместо (6.77) получим

$$\{\sigma_b^*\}_n = [d_b^*]_n \{\epsilon_b^*\}_n - \{\beta_b^*\}_n t^0 - \{\sigma_b^y\}_n. \quad (6.79)$$

Перейдем теперь к определению температурных деформаций арматуры.

Сначала рассмотрим влияние на деформации арматуры, температурных деформаций бетона при частично нарушенном сцеплении арматуры с бетоном. Это влияние проявляется двояко, из-за чего деформации бетона предварительно разделяются на две части. Первая часть ($\alpha_{bn}^0 t^0$ в случае схемы 1 трещин) связана с расширением бетона по нормали к трещинам. Она влияет непосредственно на раскрытие трещин (на $a_{cr,n}$) и через этот фактор — на смещение арматуры u_{si} относительно берега трещины. Обобщенно первые части температурных деформаций бетона применительно ко всем трем схемам трещин можно представить в виде трех составляющих: $\delta_n \alpha_{bn}^0 t^0; \delta_m \alpha_{bm}^0 t^0; \delta_l \alpha_{bl}^0 t^0$, где формальные параметры $\delta_n, \delta_m, \delta_l$ принимают значения нуля или единицы в зависимости от схемы трещин [по алгоритму (6.6), например, для схемы 1 трещин $\delta_n = 1; \delta_m = \delta_l = 0$].

Деформацию бетона вдоль направления l (направления укладки арматуры), связанную с указанными температурными деформациями в осях n, m, l , обозначим ϵ_{li}^0 . Она составит

$$\begin{aligned} \epsilon_{li}^0 &= \delta_n \alpha_{bn}^0 t^0 n_i^2 + \delta_m \alpha_{bm}^0 t^0 m_i^2 + \\ &+ \delta_l \alpha_{bl}^0 t^0 l_i^2 = \sum_r \delta_r \alpha_{br}^0 t^0 r_i^2, \quad (r = n, m, l). \end{aligned} \quad (6.80)$$

¹Здесь деформации усадки приняты как положительные, в действительности же они должны вводиться со знаком минус.

Ко второй части температурных деформаций бетона относим соответствующие деформации полос бетона между трещинами. Для схемы 1 трещин они равны температурным деформациям $\alpha_{bm}^0 t^0$,

$\alpha_{bl}^0 t^0$ бетона вдоль осей m и l . Обобщенно, применительно ко всем схемам трещин, компоненты этих деформаций в осях n, m, l составят: $(1 - \delta_n) \alpha_{bn}^0 t^0$, $(1 - \delta_m) \alpha_{bm}^0 t^0$, $(1 - \delta_l) \alpha_{bl}^0 t^0$. Деформации, которые они вызовут вдоль оси i , обозначим ϵ_{2i}^0 . По аналогии (с 6.80)

$$\begin{aligned} \epsilon_{2i}^0 &= (1 - \delta_n) \alpha_{bn}^0 t^0 n_i^2 + (1 - \delta_m) \alpha_{bm}^0 t^0 m_i^0 + \\ &+ (1 - \delta_l) \alpha_{bl}^0 t^0 l_i^2 = \sum_r (1 - \delta_r) \alpha_{br}^0 r_i^2. \end{aligned} \quad (6.81)$$

($r = n, m, l$)

Естественно, в сумме деформации ϵ_{1i}^0 и ϵ_{2i}^0 будут равны общим температурным деформациям бетона вдоль i , т.е.

$$\epsilon_{bi}^0 = \epsilon_{1i}^0 + \epsilon_{2i}^0. \quad (6.82)$$

Теперь, прежде чем записать общее выражение для удлинения арматуры на участке между трещинами l_{si} , рассмотрим две ситуации. Пусть коэффициенты температурной деформации бетона равны нулю, а коэффициент температурной деформации арматуры α_{si}^0 не равен нулю.

Подвергнем стержень длиной l_{si} (на участке между двумя трещинами) нагреванию. Если бы стержень не находился в бетоне, то его общие удлинения были бы равны $\alpha_{si}^0 t^0 l_{si}$, а относительные деформации составили $\alpha_{si}^0 t^0$, где α_{si}^0 — коэффициент температурной деформации арматуры. Бетон через фактор сцепления будет препятствовать относительным удлинениям, в результате согласно В.И. Мурашеву средние относительные температурные удлинения составят $\alpha_{si}^0 t^0 \psi_{si}$. Теперь, пусть коэффициент температурной деформации арматуры равен нулю, а аналогичные коэффициенты бетона не равны нулю. Тогда бетон, удлиняясь вдоль оси i на величину ϵ_{bi}^0 , будет через фактор сцепления влиять на деформации арматуры, в результате они составят $\epsilon_{bi}^0 (1 - \psi_{si})$.

Обозначим общие температурные деформации арматуры ϵ_{si}^0

$$\begin{aligned} \epsilon_{si}^0 &= \alpha_{si}^0 t^0 \psi_{si} + \epsilon_{bi}^0 (1 - \psi_{si}) = \\ &= \alpha_{si}^0 t^0 \psi_{si} + (\epsilon_{1i}^0 + \epsilon_{2i}^0) (1 - \psi_{si}). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Внося в это выражение значение ϵ_{1i}^0 из (6.80) и обозначая

$$\alpha_{mi}^0 = \alpha_{si}^0 \psi_{si} + (1 - \psi_{si}) \sum_r \delta_r \alpha_{br}^0 r_i^2, \quad (6.84)$$

($r = n, m, l$)

можно преобразовать (6.83) к виду

$$\epsilon_{si}^0 = \alpha_{mi}^0 t^0 + \epsilon_{2i}^0 (1 - \psi_{si}). \quad (6.85)$$

Коэффициент α_{mi}^0 здесь выступает в роли некоторого среднего коэффициента температурной деформации арматуры, заделанной в бетон. При $\psi_{si} \rightarrow 1$ (при полном нарушении сцепления арматуры с бетоном) $\alpha_{mi}^0 \rightarrow \alpha_{si}^0$.

Деформации ϵ_{si}^0 из (6.85) прибавляются к правой части зависимости (6.24) по определению $\tilde{\epsilon}_{si}$. Если при этом обозначить через $\tilde{\epsilon}_{bi}$ суммарные величины деформаций, которые включают в себя аналогичные силовые деформации $\tilde{\epsilon}_{bi}$, входящие в (6.24), и деформации ϵ_{2i}^0 , то зависимость (6.24) с учетом влияния температуры запишется так:

$$\tilde{\epsilon}_{si} = \frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} + \tilde{\epsilon}_{bi} (1 - \psi_{si}) + \alpha_{mi}^0 t^0. \quad (6.86)$$

Ниже мы также оперируем с общими деформациями $\tilde{\epsilon}_{bi}$, которые включают в себя как силовые, так температурные деформации. Это удобно в связи с тем, что для общих деформаций сохраняются справедливыми зависимости (6.22), связывающие эти деформации бетона с общими деформациями элемента. При такой трактовке деформаций $\tilde{\epsilon}_{bi}$ общие — силовые и температурные деформации бетона вдоль оси i составят

$$\epsilon_{bi}^* = \tilde{\epsilon}_{bi} + \epsilon_{1i}^0 = \tilde{\epsilon}_{bi} + \sum_r \delta_r \alpha_{br}^0 t^0 r_i^2. \quad (6.87)$$

Формула (6.25) для определения осевого смещения арматуры относительно берега трещины претерпевает некоторое изменение

$$u_{si} = (\tilde{\epsilon}_{si} - \tilde{\epsilon}_{bi} - \epsilon_{1i}^0) l_{cr,n} / 2 n_i$$

или, если учесть (6.86),

$$u_{si} = \left[\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} + \alpha_{mi}^0 t^0 - \epsilon_{1i}^0 \right] l_{cr,n} / 2 n_i \quad (6.88)$$

Приравняв правые части зависимостей (6.88) и (6.28) и учитывая, что для бетона с трещинами схемы 1 $\epsilon_{1i}^0 = \alpha_{br}^0 t^0 n_i^2$, находим

$$\epsilon_{sn} n_i^2 + \gamma_{snm}^* m_i n_i + \gamma_{snl}^* n_i l_i = - \frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} + \alpha_{mi}^0 t^0 - \alpha_{bn}^0 t^0 n_i^2. \quad (6.89)$$

Здесь

$$\epsilon_{sn} + \alpha_{bn}^0 t^0 = \epsilon_n; \quad \gamma_{snm}^* = \gamma_{nm}^*; \quad \gamma_{snl}^* \approx \gamma_{nl}^*, \quad (6.90)$$

т.е. влиянием деформаций бетона, равных $\alpha_{bn}^0 t^0$, на общие деформации элемента здесь не пренебрегаем.

Учитывая эти зависимости и внося в (6.89) значение $\tilde{\epsilon}_{bi}$ из (6.28), приходим к более общей формуле, чем (6.29), по определению реальных напряжений в арматуре в трещинах

$$\sigma_{si} = E_{si} \left[-\frac{1}{\psi_{si}} (\epsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* m_i n_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + \frac{1}{\psi_{sim}} (\epsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + \frac{1}{\psi_{sil}} (\epsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i) - \alpha_{mi}^0 \frac{t^0}{\psi_{si}} \right]. \quad (6.91)$$

Параметры ψ_{sim} , ψ_{sil} , как и в формуле (6.29), принимает значение единица (в случае схемы 1) или ψ_{si} (при других схемах трещин). Представленный вывод зависимости (6.91) относится к схеме 1 трещин, а записана она применительно ко всем схемам. Остальные схемы рассматриваются по аналогии с их изложением при выводе формул (6.43).

Заметим, что в формуле (6.91) могут быть учтены также и деформации усадки ϵ^y , тогда вычитаемое $\alpha_{mi}^0 t^0 / \psi_{si}$ заменяется на вычитаемое

$$-\frac{1}{\psi_{si}} (\alpha_{mi}^0 t^0 (1 - \psi_{si}) \sum_r \delta_r \epsilon^y r_i^2), \quad r = n, m, l. \quad (6.92)$$

Формула (6.31) с учетом влияния температуры записывается так:

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = (\tilde{\epsilon}_{si} - \alpha_{si}^0 t^0) E_{si} = (\epsilon_i - \alpha_{si}^0 t^0) E_{si}, \quad (6.93)$$

где по-прежнему ϵ_i вычисляется по формуле (6.30).

С учетом (6.30) формула (6.93) преобразуется в формулу типа (6.42). В новой записи следует лишь вычесть из правой части формулы (6.42) величину $\alpha_{si}^0 t^0 E_{si}$.

Повторяя вывод физических соотношений, представленный в п. 6.5 на базе более общих зависимостей (6.91) и (6.93), получим и более общую запись первой (арматурной) части физических соотношений (6.47)

$$\{\sigma_s^*\}_n = [d_s^*] \{\epsilon_n\} - \{\beta_s^*\}_n t^0, \quad (6.94)$$

где $\{\beta_s^*\}_n$ — вектор-столбец коэффициентов температурных напряжений.

$$\{\beta_s^*\}_n = \{\beta_{sn}^*, \beta_{sm}^*, \beta_{sl}^*, \beta_{snm}^*, \beta_{sml}^*, \beta_{sln}^*, \beta_{smn}^*, \beta_{slm}^*, \beta_{sml}^*\}^T, \quad (6.95)$$

Компоненты вектора $\{\beta_s^*\}_n$ можно формировать по обобщенной формуле

$$\beta_{srk}^* = \sum_i [\delta_r \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} r_i k_i + (1 - \delta_r) \mu_{si} \alpha_{si}^0 E_{si} r_i k_i], \quad (6.96)$$

Например, полагая $r = k = n$, находим

$$\beta_{sn.n}^* = \beta_{sn}^* = \sum_l [\delta_n \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} n_i^2 + (1 - \delta_n) \mu_{si} \alpha_{si}^0 E_{si} n_i^2].$$

Для всех схем трещин $\delta_n = 1$, поэтому

$$\beta_{sn}^* = \sum_i \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} n_i^2. \quad (6.97)$$

В общие физические соотношения типа (6.57) должны входить температурные векторы как арматуры, так и бетона. Эти соотношения получим, суммируя соотношения (6.94) и (6.77)

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_s^*\}_n + \{\sigma_b^*\}_n = ([d_s^*]_n + [d_b^*]_n) \{\epsilon^*\}_n - (\{\beta_s^*\}_n + \{\beta_b^*\}_n) t^0 \quad (6.98)$$

или, вводя общие обозначения для компонент в скобках,

$$\{\sigma^*\}_n = [d^*]_n \{\epsilon^*\}_n - \{\beta^*\}_n t^0. \quad (6.99)$$

Используя преобразования (6.66)–(6.71), приведем систему (6.99) девяти уравнений к системе шести уравнений вида (6.62). С учетом температурных компонент

$$\{\sigma\}_n = [d]_n \{\epsilon\}_n - \{\beta^0\}_n t^0, \quad (6.100)$$

где

$$\{\beta^0\}_n = \{\beta_n^0, \beta_m^0, \beta_l^0, \beta_{nm}^0, \beta_{ml}^0, \beta_{ln}^0\}^T, \quad (6.101)$$

причем компоненты вектора $\{\beta^0\}_n$ выражаются через компоненты вектора $\{\beta^*\}_n$. Эта связь устанавливается в процессе преобразований (6.66)–(6.71). Приводим лишь дополнительные зависимости в указанных преобразованиях, связанные с действием температуры. К перекомпонованным соотношениям (6.66) добавляется блочная запись столбца $\{\beta^*\}_n$:

$$\{\beta^*\}_n = \left\{ \{\beta_n^*, \beta_m^*, \beta_l^*\}^T, \{\beta_{nm}^*, \beta_{ml}^*, \beta_{ln}^*\}^T, \{\beta_{mn}^*, \beta_{lm}^*, \beta_{nl}^*\}^T \right\} = \left\{ \{\beta_{11}^*\}_n, \{\beta_{12}^*\}_n, \{\beta_{21}^*\}_n \right\}.$$

Соответственно соотношения (6.70) дополняются разделенным на два блока шестикомпонентным столбцом $\{\beta^0\}_n$

$$\{\beta^0\}_n = \left\{ \{\beta_n^0, \beta_m^0, \beta_l^0\}^T, \{\beta_{nm}^0, \beta_{ml}^0, \beta_{ln}^0\}^T \right\} = \left\{ \{\beta_{11}^0\}_n, \{\beta_{12}^0\}_n \right\}.$$

От правых частей физических соотношений (6.67) и (6.69) вычитаются соответственно столбцы

$$t^0 \begin{Bmatrix} \{\beta_{11}^*\}_n \\ \{\beta_{12}^*\}_n \\ \{\beta_{21}^*\}_n \end{Bmatrix}, \quad t^0 \begin{Bmatrix} \{\beta_{11}^0\}_n \\ \{\beta_{12}^0\}_n \end{Bmatrix}$$

т.е. к виду (6.67) и (6.69) приводятся более общие соотношения (6.99) и (6.100). Соотношения (6.70) не меняются. В результате преобразований приходим к следующей связи между компонентами столбцов $\{\beta^*\}_n$ и $\{\beta^0\}_n$:

$$\begin{aligned} \{\beta_{ij}^0\}_n &= \{\beta_{ij}^*\}_n - ([D_{j3}^*] - [D_{j2}^*]) [A] (\{\beta_{21}^*\}_n - \{\beta_{12}^*\}_n) \\ (\bar{j} &= 11, 12) \end{aligned} \quad (6.102)$$

6.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Представленные выше физические соотношения записаны в локальной системе координат n, m, l . В практических расчетах их необходимо преобразовывать к единой системе координат x, y, z . Обозначим $\{\sigma^*\}_x, \{\epsilon^*\}_x, \{\beta^*\}_x$ — девятикомпонентные вектор-столбцы напряжений, относительных деформаций и температурных коэффициентов в осях x, y, z :

$$\begin{aligned} \{\sigma^*\}_x &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}\}^T; \\ \{\epsilon^*\}_x &= \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}\}^T; \\ \{\beta^*\}_x &= \{\beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_{xy}, \beta_{yz}, \beta_{zx}, \beta_{yx}, \beta_{zy}, \beta_{xz}\}^T. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Компоненты шестикомпонентных вектор-столбцов напряжений, деформаций и температурных коэффициентов в осях x, y, z обозначим

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_x &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T; \\ \{\epsilon\}_x &= \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T; \\ \{\beta^*\}_x &= \{\beta_x^0, \beta_y^0, \beta_z^0, \beta_{xy}^0, \beta_{yz}^0, \beta_{zx}^0\}^T. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Физические соотношения (6.99) и (6.100) в осях x, y, z представляются

$$\{\sigma^*\}_x = [d^*]_x \{\epsilon^*\}_x - \{\beta^*\}_x t^0 \quad (6.105)$$

или

$$\{\sigma\}_x = [d]_x \{\epsilon\}_x - \{\beta^0\}_x t^0, \quad (6.106)$$

где $[d^*]_x$ — матрица жесткости железобетона размером 9×9 в осях x, y, z ; $[d]_x$ — аналогичная матрица размером 6×6 .

Окончательной целью преобразований является получение соотношений (6.106). При этом можно поступать двояко: преобразовывать к осям x, y, z , т.е. к виду (6.105) сначала девять уравнений системы (6.99), а затем, уже используя процедуру, описанную формулами (6.64)–(6.71) с учетом (6.102), сводить полученную систему (6.105) к системе (6.106); преобразовывать к осям x, y, z систему шести уравнений (6.100), тогда необходимость в системе (6.105) отпадает.

Рассмотрим первый путь. В основе его лежат формулы преобразования компонент девятикомпонентного тензора напряжений и деформаций при повороте осей координат. Отдельно эти преобразования рассмотрены в п. 1.3. Согласно этим преобразованиям

$$\{\sigma^*\}_x = [\alpha^*]^{-1} \{\sigma^*\}_n = [\alpha^*]^T \{\sigma^*\}_n, \quad (6.107)$$

где $[\alpha^*]$ — квадратная матрица направляющих косинусов размером 9×9 ; она заполняется по правилу (6.170); здесь $[\alpha^*]^{-1} = [\alpha^*]^T$, т.е. обратная и транспонированная матрицы совпадают.

Внося в (6.107) значения $\{\sigma^*\}_n$, определяемые соотношениями

$$\{\sigma^*\}_x = [\alpha^*]^T ([d^*]_n \{\epsilon^*\}_n - \{\beta^*\}_n),$$

а затем, учитывая, что $\{\beta^*\}_n = [\alpha^*] \{\beta^*\}_x$, находим

$$\{\sigma^*\}_x = [\alpha^*]^T [d^*]_n [\alpha] \{\epsilon^*\}_x - [\alpha^*]^T \{\beta^*\}_n t^0. \quad (6.108)$$

Эти соотношения, если обозначить

$$[d^*]_x = [\alpha^*]^T [d^*]_n [\alpha]; \quad \{\beta^*\}_x = [\alpha^*]^T \{\beta^*\}_n,$$

приводятся к системе (6.105), которая затем преобразовывается к системе (6.106).

Непосредственные преобразования системы уравнений (6.100) к системе (6.106) — второй путь, осуществляются по формулам

$$[d]_x = [\alpha]^{-1} [d]_n ([\alpha]^{-1})^T; \quad \{\beta^0\}_x = [\alpha]^{-1} \{\beta^0\}_n, \quad (6.109)$$

где $[\alpha]$ — матрица направляющих косинусов размером 6×6 , которая заполняется по правилу (1.168).

6.8. СЛУЧАЙ ОБЪЕМНОГО ОРТОТРОПНОГО АРМИРОВАНИЯ

Схема объемного ортотропного армирования показана на рис. 5.1, а. Это армирование является наиболее распространенным, поэтому требует отдельного рассмотрения. Армирование характеризуется в осях x, y, z тремя коэффициентами: μ_{sx}, μ_{sy} и μ_{sz} .

Переход от косоугольного к ортотропному армированию.

Представленные выше зависимости установлены применительно к некоторой общей схеме армирования в виде одного (i -го) или нескольких ($i = 1, 2, \dots$) направлений установки арматуры (см. рис. 5.1., б). Ориентируя стержни вдоль оси x ($i = x$, рис. 6.9, а), вдоль оси y ($i = y$, рис. 6.9, б) и вдоль оси z ($i = z$, рис. 6.9, в) и производя суммирование по этим трем значениям i , можно из представленных выше зависимостей получить все соотношения, относящиеся к ортотропному армированию. Соотношения получают простой заменой направляющих косинусов согласно табл. 6.3 (вторыми в ячейках указаны направляющие косинусы, на которые заменяются направляющие косинусы общей схемы; они проставлены первыми).

Так, компоненты приведенных напряжений арматуры, определяемые при косоугольном армировании формулами (6.1), в случае ортотропного армирования на площадке n составят:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sn} &= \sigma_{xx} \mu_{sx} n_x^2 + \tau_{sxy} \mu_{sx} n_x n_y + \tau_{sxz} \mu_{sx} n_x n_z + \\ &+ \sigma_{yy} \mu_{sy} n_y^2 + \tau_{syx} \mu_{sy} n_y n_x + \tau_{syx} \mu_{sy} n_y n_x + \\ &+ \sigma_{zz} \mu_{sz} n_z^2 + \tau_{szx} \mu_{sz} n_z n_x + \tau_{szy} \mu_{sz} n_z n_y; \\ \tilde{\tau}_{snm} &= \tau_{sxy} \mu_{sx} n_x m_x + \tau_{sxy} \mu_{sx} n_x m_y + \tau_{sxz} \mu_{sx} n_x m_z + \\ &+ \sigma_{sy} \mu_{sy} n_y m_y + \tau_{syx} \mu_{sy} n_y m_x + \tau_{syx} \mu_{sy} n_y m_x + \\ &+ \sigma_{sz} \mu_{sz} n_z m_z + \tau_{szx} \mu_{sz} n_z m_x + \tau_{szy} \mu_{sz} n_z m_y. \end{aligned}$$

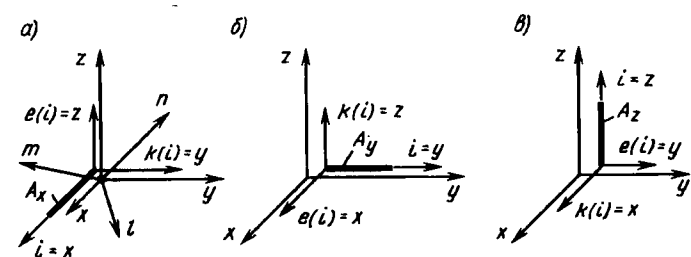


Рис. 6.9. Схема перенумерации осей для трех направлений арматуры (A_x, A_y, A_z — арматурные стержни для трех направлений)

	Арматура A_x			Арматура A_y			Арматура A_z		
	$i = x$	$k(i) = y$	$e(i) = z$	$e(i) = x$	$i = y$	$k(i) = z$	$k(i) = x$	$e(i) = y$	$i = z$
n	n_i n_x	$n_k(i)$ n_y	$n_e(i)$ n_z	$n_e(i)$ n_x	n_i n_y	$n_k(i)$ n_z	$n_k(i)$ n_x	$n_e(i)$ n_y	n_i n_z
m	m_i m_x	$m_k(i)$ m_y	$m_e(i)$ m_z	$m_e(i)$ m_x	m_i m_y	$m_k(i)$ m_z	$m_k(i)$ m_x	$m_e(i)$ m_y	m_i m_z
l	l_i l_x	$l_k(i)$ l_y	$l_e(i)$ l_z	$l_e(i)$ l_x	l_i l_y	$l_k(i)$ l_z	$l_k(i)$ l_x	$l_e(i)$ l_y	l_i l_z

Аналогичным образом определяется и третья компонента $\tilde{\tau}_{sni}$ на площадке трещины n . Эти приведенные напряжения удобно записывать в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sn} &= \sum_i \sigma_{si} \mu_{si} n_i^2 + \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i n_j; \\ \tilde{\tau}_{snm} &= \sum_i \sigma_{si} \mu_{si} n_i m_i + \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i m_j; \end{aligned} \tag{6.110}$$

$$\tilde{\tau}_{sni} = \sum_i \sigma_{si} \mu_{si} n_i l_i + \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i l_j,$$

($i = x, y, z$; $ij = xy, xz, yz, yx, zx, zy$)

(здесь и далее суммирование типа $\sum_i \sum_j$ обозначено в виде \sum_{ij}). На площадках m и l приведенные напряжения арматуры (6.2) и (6.3) составляют в случае схемы 1:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sm} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i^2; & \tilde{\tau}_{smn} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m m_i n_i \mu_{si}; \\ \tilde{\tau}_{sml} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i l_i; \end{aligned} \right\} \tag{6.111}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sl} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i^2; & \tilde{\tau}_{sln} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i n_i; \\ \tilde{\tau}_{slm} &= \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i m_i \end{aligned} \right\} \tag{6.112}$$

($i = x, y, z$).

Арматурные стержни трех направлений, расположенных вдоль осей x, y, z , могут одновременно пересекаться трещинами, например проходящими нормально к n . Напряжения в трещинах каждого из трех направлений в месте пересечения их трещиной определяются по формуле (6.29) или в случае действия температуры по формуле (6.91), полагая в этих формулах поочередно $i = x, i = y, i = z$. Например, напряжения в стержнях x -направления равны

$$\begin{aligned} \sigma_{sx} = & E_{sx} \left[-\frac{1}{\psi_{sx}} (\epsilon_n n_x^2 + \gamma_{nm}^* n_x m_x + \gamma_{nl}^* n_x l_x) + \right. \\ & + \frac{1}{\psi_{sxm}} (\epsilon_m m_x^2 + \gamma_{mn}^* m_x n_x + \gamma_{ml}^* m_x l_x) + \\ & \left. + \frac{1}{\psi_{sxl}} (\epsilon_l l_x^2 + \gamma_{ln}^* l_x n_x + \gamma_{lm}^* l_x m_x) \right] - a_{mx} \frac{E_{sx}}{\psi_{sx}} t^0, \end{aligned} \quad (6.113)$$

(заменяя индекс x на y или z , приходим к σ_{sy} и σ_{sz}).

Средние напряжения $\bar{\sigma}_{si}^m (i = x, y, z)$ вычисляются по формулам (6.41), также формально заменяя в (6.41) и (6.30) индекс i поочередно на x, y, z . Аналогичная процедура проводится и с формулой (6.45) по определению касательных напряжений τ_{sij} в арматуре в трещинах; здесь формально $i, j = x, y, z$ при $i \neq j$ (т.е. $ij = xy, xz, yz, yx, zx, zy$). Например,

$$\begin{aligned} \tau_{sxy} = & \frac{E_{sx}}{\psi_{sx} n_{\tau x}} \left[\delta_n (\epsilon_n n_x n_y + \gamma_{nm}^* n_x m_y + \gamma_{nl}^* n_x l_y) + \right. \\ & + \delta_m (\epsilon_m m_x m_y + \gamma_{mn}^* m_x n_y + \gamma_{ml}^* m_x l_y) + \\ & \left. + \delta_l (\epsilon_l l_x l_y + \gamma_{ln}^* l_x n_y + \gamma_{lm}^* l_x m_y) \right]. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Правило $i, j = x, y, z$ при $i \neq j$ (вместо $i, j = k(i), k(l)$) действует и при записи применительно к ортотропному армированию других соотношений, например элементов d_{skl}^* матрицы жесткости $[d_{s,n}^*]$, определяемой формулами (6.48).

Вывод зависимостей по определению напряжений в арматуре в трещине непосредственно через компоненты напряжения в осях x, y, z . Формулы (6.113) связывают напряжения в арматуре в трещинах с относительными деформациями и не всегда удобны в расчетах. Установим связи напряжений в арматуре непосредственно с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Пусть трещины образуются

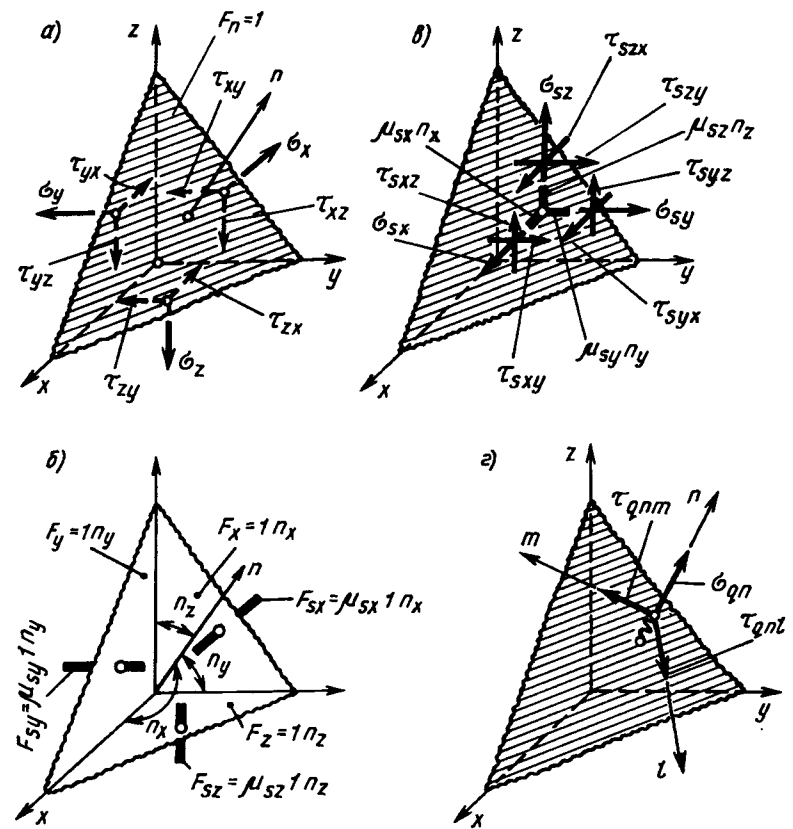


Рис. 6.10. К определению напряжений в арматуре в трещине при ортотропном армировании

по схеме 1. Выделим для этого из железобетонного массива малый тетраэдр так, чтобы три его грани были нормальны соответственно к осям x, y, z , а наклонная его грань прошла по наклонной трещине (рис. 6.10, а). Наклонная трещина (площадка наклонной трещины) ортогональна к оси n . Площадь наклонной грани в выкладках сокращается, поэтому примем ее с самого начала равной единице ($F_n = 1$). Тогда площади боковых граней тетраэдра, ортогональные к осям x, y, z , соответственно будут равны (рис. 6.10, б):

$$F_x = 1 n_x; F_y = 1 n_y; F_z = 1 n_z, \quad (6.115)$$

а площади арматурных стержней, которые пересекут эти грани, составят

$$F_{sx} = F_x \mu_{sx} = n_x \mu_{sx}; F_{sy} = n_y \mu_{sy}; F_{sz} = n_z \mu_{sz}. \quad (6.116)$$

Напряжения, приложенные к боковым граням тетраэдра, показаны на рис. 6.10, а. Чтобы перейти к усилиям, в дальнейших уравнениях равновесия необходимо каждое напряжение умножить на соответствующую площадь из (6.115).

На наклонных площадках напряжения передаются через арматуру, вызывая в ней нормальные ($\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$) и касательные напряжения (τ_{sxy}, τ_{syz} — в стержнях, параллельных оси x , τ_{syx}, τ_{syz} — в стержнях, параллельных оси y , и τ_{sxx}, τ_{syy} — в стержнях, параллельных оси z ; рис. 6.10, в). Чтобы перейти к усилиям, каждое напряжение умножается на соответствующую площадь арматуры из (6.116) согласно рис. 6.10, а, б. Кроме того, на наклонной площадке трещинки могут оставаться некоторые усилия в связях зацепления берегов трещины. Плотность этих усилий, отнесенная к единице площади наклонной площадки, составит нормальные σ_{qn} и касательные τ_{qnm}, τ_{qnl} напряжения зацепления ($F_n = 1$, поэтому по величине усилия совпадают с напряжениями).

Естественно, напряжения, представленные на рис. 6.10, а, 6.10, в и 6.10, г, в действительности совмещены на гранях одного тетраэдра (они разделяются лишь для удобства выкладок). Проецируя все силы, приложенные к граням тетраэдра (рис. 6.10, а, в, г) на оси x, y и z , приходим к трем уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= \sigma_{sx} \mu_{sx} n_x + \tau_{syx} \mu_{sy} n_y + \\ &+ \tau_{syz} \mu_{sz} n_z + \sigma_{qn} n_x + \tau_{qnm} m_x + \tau_{qnl} l_x; \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x + \tau_{zy} n_z &= \sigma_{sy} \mu_{sy} n_y + \tau_{sxy} \mu_{sx} n_x + \\ &+ \tau_{szy} \mu_{sz} n_z + \sigma_{qn} n_y + \tau_{qnm} m_y + \tau_{qnl} l_y; \\ \sigma_z n_z + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y &= \sigma_{sz} \mu_{sz} n_z + \tau_{syz} \mu_{sy} n_y + \\ &+ \tau_{sxx} \mu_{sx} n_x + \sigma_{qn} n_z + \tau_{qnm} m_z + \tau_{qnl} l_z. \end{aligned} \quad (6.117)$$

В качестве неизвестных в этих уравнениях выступают: три нормальных напряжения в арматуре в трещинах ($\sigma_{si}, i = x, y, z$), шесть касательных напряжений ($\tau_{sji}, j, i = x, y, z$ при $j \neq i$) и три напряжения зацепления ($\sigma_{qn}, \tau_{qnm}, \tau_{qnl}$) — таким образом всего 12 неизвестных. Недостающие девять уравнений установим, используя соотношения между перемещениями стержней в трещинах и их связи с напряжениями.

Остановимся сначала на перемещениях. Представим идеализированный случай, когда стержни трех ортогональных направлений

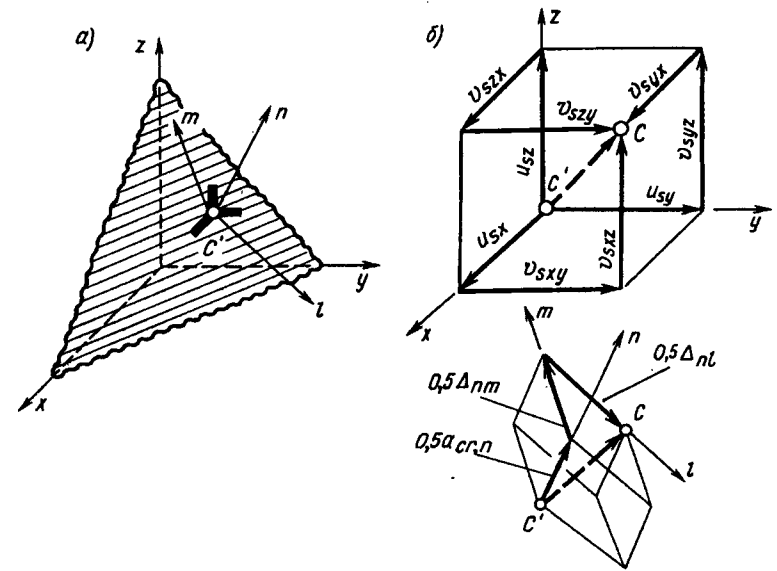


Рис. 6.11. Нормальные (u_j) и касательные ($u_{ij}, i, j = x, y, z$) перемещения стержней относительно берега трещины и их связь с половиной раскрытия ($0,5 a_{cr}$) трещины и половинки сдвигов ($0,5 \Delta_{nm}, 0,5 \Delta_{nl}$) ее берегов

пересекаются наклонной площадкой в некоторой точке c' (рис. 6.11, а), которая затем становится берегом трещины. В процессе деформирования каждый стержень, выдвигаясь за берег трещины на величину u_{si} ($i = x, y, z$) и испытывая тангенциальные смещения v_{sij} ($i, j = x, y, z; i = j$), пройдет через точку c , расположенную посередине трещины (подробно характер смещения стержней относительно берега трещины рассмотрен на рис. 6.2.) Диаграмма смещений стержней трех ортогональных направлений относительно берега трещины представлена на рис. 6.11, б. Из нее вытекают следующие равенства (условия совместности):

$$\begin{aligned} u_{sx} &= v_{sxx} = v_{syz}; \quad u_{sy} = v_{syy} = v_{sxz}; \\ u_{sz} &= v_{syz} = v_{sxx} \quad (\text{обобщенно } u_{si} = v_{sji}). \end{aligned} \quad (6.118)$$

В то же время перемещения u_{si} можно получить, проецируя на i ($i = x, y, z$) перемещения $0,5 a_{cr,n}, 0,5 \Delta_{nm}, 0,5 \Delta_{nl}$ (рис. 6.11, в), равные половинкам раскрытия трещины и сдвига ее берегов:

$$\begin{aligned} u_{sx} &= 0,5(a_{cr,n} n_x + \Delta_{nm} m_x + \Delta_{nl} l_x); \\ u_{sy} &= 0,5(a_{cr,n} n_y + \Delta_{nm} m_y + \Delta_{nl} l_y); \\ u_{sz} &= 0,5(a_{cr,n} n_z + \Delta_{nm} m_z + \Delta_{nl} l_z), \end{aligned} \quad (6.119)$$

или, если спроецировать u_{sx} , u_{sy} и u_{sz} на оси n , m , l , то вместо (6.119) получим:

$$\begin{aligned} 0,5a_{cr,n} &= u_{sx}n_x + u_{sy}n_y + u_{sz}n_z; \\ 0,5\Delta_{nm} &= u_{sx}m_x + u_{sy}m_y + u_{sz}m_z; \\ 0,5\Delta_{nl} &= u_{sx}l_x + u_{sy}l_y + u_{sz}l_z \end{aligned} \quad (6.120)$$

Соотношения (6.120), учитывая значения u_{si} из (6.26), можно записать так:

$$\begin{aligned} a_{cr,n} &= l_{cr,n} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right); \\ \Delta_{nm} &= l_{cr,n} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right) \frac{m_i}{n_i}; \\ \Delta_{nl} &= l_{cr,n} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right) \frac{l_i}{n_i}, \\ &(i = x, y, z) \end{aligned} \quad (6.121)$$

Соотношения (6.121) устанавливают непосредственную связь ширины раскрытия трещины и сдвига ее берегов с напряжениями арматуры в трещинах, деформациями (или напряжениями) блоков бетона между трещинами и расстоянием между трещинами.

Перейдем к выводу недостающих уравнений. Внося в условие совместности (6.118) значение u_{si} из (6.26) и значение u_{sji} из (6.35) [здесь $v_{sik(i)} = v_{sji}$, поскольку в (6.118) индекс $i = x, y, z$ стоит на втором месте], приходим к шести дополнительным уравнениям:

$$\sigma_{si} \frac{\psi_{si}}{n_i E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \frac{\psi_{si}}{n_i} = \tau_{sji} \frac{\psi_{sj} n_{Tj}}{E_{sj} n_j}, \quad (6.122)$$

где $i \neq j$, т.е., если $i = x$, то $j = z$ или y , если $i = y$, то $j = z$ или x ; если $i = z$, то $j = y$ или x .

Установим три недостающие уравнения. Напряжения зацепления связываются через модули зацепления E_{qn} , E_{qnm} , E_{qnl} с шириной раскрытия трещины и сдвигами берегов трещин соотношениями

$$a_{qn} = \frac{a_{cr,n} E_{qn}}{l_{cr,n}}; \quad \tau_{qnm} = \frac{\Delta_{nm} E_{qnm}}{l_{cr,n}} \quad (6.123)$$

$$\tau_{qnl} = \frac{\Delta_{nl} E_{qnl}}{l_{cr,n}}$$

Подставляя значения $a_{cr,n}$, Δ_{nm} и Δ_{nl} из (6.122) в зависимость (6.112), получим формулы по определению напряжений зацепления и одновременно три недостающие уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_{qn} &= E_{qn} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right); \\ \tau_{qnm} &= E_{qnm} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right) \frac{m_i}{n_i}; \\ \tau_{qnl} &= E_{qnl} \sum_i \left(-\frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\epsilon}_{bi} \psi_{si} \right) \frac{l_i}{n_i}, \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (6.124)$$

Решение системы девяти уравнений (6.117), (6.122), (6.124) можно упростить, внося значения напряжений зацепления из (6.124) и значения касательных напряжений τ_{sij} из (6.122) в уравнения (6.117); приходим к системе трех уравнений относительно σ_{sx} , σ_{sy} и σ_{sz} . Эта система распадается на три независимых уравнения (соответственно относительно σ_{sx} , σ_{sy} и σ_{sz} , если с некоторым приближением принять

$$E_{qn} \approx E_{qnm} \approx E_{qnl} \approx E_q,$$

где E_q — средний модуль зацепления,

и учесть, что

$$\begin{aligned} n_x n_y + m_x m_y + l_x l_y &= 0; \quad n_x n_z + m_x m_z + l_x l_z = 0; \\ n_x^2 + m_x^2 + l_x^2 &= 1. \end{aligned}$$

Обозначим в указанной системе трех уравнений группы величин через λ_x^{-1} , λ_y^{-1} и λ_z^{-1} ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_x} &= \left(1 + \frac{E_{sy} \psi_{sx} n_y^2 \mu_{sy}}{E_{sx} \psi_{sy} n_x^2 \mu_{sx} n_{Ty}} + \right. \\ &\left. + \frac{E_{sz} \psi_{sx} n_z^2 \mu_{sz}}{E_{sx} \psi_{sy} n_x^2 \mu_{sx} n_{Tz}} + \frac{E_q \psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx} n_x^2} \right). \end{aligned} \quad (6.125)$$

Значения λ_y , λ_z получают круговой перестановкой индексов: так, заменяя в выражении для λ_x^{-1} индекс x на y , y на z и z на x , приходим к λ_y^{-1} , заменяя в выражении для λ_y^{-1} индекс y на z , x на y и y на z , приходим к λ_z^{-1} .

С учетом обозначений (6.125) полученные три уравнения можно записать в виде

$$\sigma_{sx} = -\frac{\lambda_x}{\mu_{sx}} \left(\sigma_x + \tau_{yx} \frac{n_y}{n_x} + \tau_{zx} \frac{n_z}{n_x} \right) + \tilde{\epsilon}_{bx} (1 - \lambda_x) E_{sx};$$

$$\sigma_{sy} = -\frac{\lambda_y}{\mu_{sy}} \left(\sigma_y + \tau_{xy} \frac{n_x}{n_y} + \tau_{zy} \frac{n_z}{n_y} \right) + \tilde{\epsilon}_{by} (1 - \lambda_y) E_{sy};$$

$$\sigma_{sz} = -\frac{\lambda_z}{\mu_{sz}} \left(\sigma_z + \tau_{xz} \frac{n_x}{n_z} + \tau_{yz} \frac{n_y}{n_z} \right) + \tilde{\epsilon}_{bz} (1 - \lambda_z) E_{sz}.$$

Остается еще выразить в уравнениях (6.126), а также (6.122) и (6.124) деформации бетона $\tilde{\epsilon}_{bi}$ ($i = x, y, z$) через общие напряжения элемента. Деформации $\tilde{\epsilon}_{bi}$ определяются формулой (6.22). Учитывая, что для схемы 1 трещин $\delta_n = 1$, $\delta_m = \delta_l = 0$, из этой формулы следует

$$\tilde{\epsilon}_{bi} = \epsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i + \epsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* n_i l_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i.$$

Связи между напряжениями и относительными деформациями бетона определяются зависимостями (6.50). Примем эти зависимости с некоторыми упрощениями, пренебрегая коэффициентами поперечных деформаций ($c_{b13} \approx c_{b23} \approx 0$), хотя это не обязательно. При этом упрощении коэффициенты матрицы податливости (6.50) составят

$$c_{b22} \approx c_{b55}^* \approx c_{b77}^* \approx \frac{1}{E_b^0 \nu_{bm}} = \frac{1}{E_{bm}},$$

$$c_{b33} \approx c_{b66}^* \approx c_{b88}^* \approx \frac{1}{E_b^0 \nu_{bl}} = \frac{1}{E_{bl}},$$

где E_{bm} , E_{bl} — модули деформации бетона вдоль осей m , и l (ν_{bm} , ν_{bl} — коэффициенты изменения секущих модулей; подробно эти коэффициенты рассмотрены в гл. 3); E_b^0 — начальный модуль деформации бетона, а соотношения (6.50) преобразуются к простому виду:

$$\epsilon_m = \epsilon_{bm} \approx \frac{\sigma_{bm}}{E_{bm}} = \frac{\sigma_m - \sigma_{sm}}{E_{bm}};$$

$$\epsilon_l = \epsilon_{bl} \approx \frac{\sigma_{bl}}{E_{bl}} = \frac{\sigma_l - \sigma_{sl}}{E_{bl}};$$

$$\gamma_{ml}^* \approx \frac{\tau_{bml}}{E_{bm}} = \frac{\tau_{ml} - \tau_{sml}}{E_{bm}} \quad \gamma_{mn}^* \approx \frac{\tau_{bmn}}{E_{bm}} = \frac{\tau_{mn} - \tau_{smn}}{E_{bm}};$$

$$\gamma_{ln}^* \approx \frac{\tau_{bln}}{E_{bl}} = \frac{\tau_{ln} - \tau_{sln}}{E_{bl}}; \quad \gamma_{lm}^* \approx \frac{\tau_{blm}}{E_{bl}} = \frac{\tau_{lm} - \tau_{slm}}{E_{bl}}.$$

(6.129)

(здесь в окончательных зависимостях согласно предпосылке 3т напряжения бетона выражены через общие напряжения и приведенные напряжения арматуры).

Внося значения (6.129) в (6.127), предварительно выразив в (6.129) компоненты σ_{sm} , σ_{sl} и τ_{sji} ($ji = ml, mn, ln, lm$) через напряжения в арматуре по формулам (6.111), (6.112), получим

$$\tilde{\epsilon}_{bi} = \frac{q_m - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{sj} m_j^2}{E_{bm}} m_i^2 + \frac{\sigma_l - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{si} l_j^2}{E_{bl}} l_i^2 +$$

$$+ \frac{\tau_{mn} - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{sj} n_j m_j}{E_{bm}} m_i n_i + \frac{\tau_{ml} - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{si} m_j l_j}{E_{bm}} m_i l_i +$$

$$+ \frac{\tau_{ln} - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{sj} l_j n_j}{E_{bl}} l_i n_i + \frac{\tau_{lm} - \sum_j \tilde{\sigma}_{sj}^m \mu_{sj} l_j m_j}{E_{bl}} l_i m_i.$$

($i, j = x, y, z$)

В формулах (6.111), (6.112) индекс i предварительно заменен на индекс j , поскольку по i в этой формуле суммирование не производится.

Подставляя в (6.130) значения σ_m , σ_l , τ_{mn} и т.д., выраженные предварительно через общие напряжения в осях x, y, z , по известным формулам преобразования вида (вывод этих формул рассмотрен в п. 1.3):

$$\sigma_e = \sigma_x e_x^2 + \sigma_y e_y^2 + \sigma_z e_z^2 + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) e_x e_y +$$

$$+ (\tau_{zy} + \tau_{yz}) e_y e_z + (\tau_{zx} + \tau_{xz}) e_x e_z$$

$$(e = n, m, l);$$

$$\begin{aligned} \tau_{e*} &= \sigma_x e_x k_x + \sigma_y e_y k_y + \sigma_z e_z k_z + \\ &+ \tau_{yx} e_y k_x + \tau_{xy} e_x k_y + \tau_{zx} e_z k_x + \\ &+ \tau_{xz} e_x k_z + \tau_{zy} e_z k_y + \tau_{yz} e_y k_z \end{aligned} \quad (6.131)$$

($ek = nm, ml, ln, mn, lm, nl$),

а также учитывая, что согласно (6.131), $\tilde{\sigma}_{si}^m = \epsilon_i E_{si}$ ($i = x, y, z$), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{bi} &= -\frac{1}{E_{bm}} (\sigma_i m_i^2 + \tau_{ji} m_i m_j + \tau_{ei} m_e m_i) + \\ &+ \frac{1}{E_{bl}} (\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_i l_j + \tau_{ei} l_e l_i) - \\ &- \epsilon_i \left(-\frac{m_i^2}{E_{bm}} + \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) E_{si} \mu_{si}. \end{aligned} \quad (6.132)$$

где, поочередно, $i = x, y, z$, причем:

$$\begin{aligned} \text{если } i = x, \text{ то } j = y, e = z, \\ \text{если } i = y, \text{ то } j = x, e = z, \\ \text{если } i = z, \text{ то } j = x, e = y. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Из формул (6.23), (6.24), (6.31) следует

$$\epsilon_i = \tilde{\epsilon}_{si} = \epsilon_{si} + \tilde{\epsilon}_{bi} (1 - \psi_{si}) = \frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}} + \tilde{\epsilon}_{bi} (1 - \psi_{si}), \quad (6.134)$$

($i = x, y, z$).

Учитывая (6.134), зависимость (6.132) преобразуется

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{bi} \left[1 + (1 - \psi_{si}) \left(-\frac{m_i^2}{E_{bm}} + \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) E_{si} \mu_{si} \right] = \\ = -\frac{1}{E_{bm}} (\sigma_i m_i^2 + \tau_{ji} m_i m_j + \tau_{ei} m_e m_i) + \\ + \frac{1}{E_{bl}} (\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_i l_j + \tau_{ei} l_e l_i) - \\ - \sigma_{si} \psi_{si} \mu_{si} \left(-\frac{m_i^2}{E_{bm}} + \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right). \end{aligned} \quad (6.135)$$

Внося значение $\tilde{\epsilon}_{bi}$ из (6.135) в (6.126), приходим к окончательным зависимостям по определению напряжений в арматуре в трещинах. Однако эти уточненные зависимости, как показали исследования на образцах при плоском напряженном состоянии, приводят примерно к таким же результатам, что и приближенные зависимости. Приближенные зависимости получают из (6.126), пренебрегая членами $\tilde{\epsilon}_{bi} (1 - \lambda_i)$ ($i = x, y, z$), т.е.

$$\sigma_{si} \approx \sigma_i \frac{\lambda_i}{\mu_{si}} + \tau_{ji} \frac{n_j \lambda_i}{n_i \mu_{si}} + \tau_{ei} \frac{n_e \lambda_i}{n_i \mu_{si}}, \quad (6.136)$$

где индексы i, j, e формируются по формулам (6.133)

Однако при выводе физических соотношений этого делать нельзя, поскольку это приведет к нарушению парности побочных коэффициентов.

Вывод физических соотношений в виде $\epsilon = [c]\{\sigma\}$. Подставляя в (6.134) значения σ_{si} из (6.126) и $\tilde{\epsilon}_{bi}$ из (6.132), можно получить:

$$\begin{aligned} \epsilon_i = \sigma_i \left[\frac{\lambda_i \psi_{si}}{E_{si} \mu_{si}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) m_i^2}{E_{bm}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) l_i^2}{E_{bl}} \right] \frac{1}{\kappa_i} + \\ + \tau_{ji} \left[\frac{\lambda_i \psi_{si} n_j}{E_{si} \mu_{si} n_i} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) m_i m_j}{E_{bm}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) l_i l_j}{E_{bl}} \right] \frac{1}{\kappa_i} + \\ + \tau_{ei} \left[\frac{\lambda_i \psi_{si} n_e}{E_{si} \mu_{si} n_i} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) m_i m_e}{E_{bm}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) l_i l_e}{E_{bl}} \right] \frac{1}{\kappa_i}, \end{aligned}$$

где

$$\kappa_i = \left(1 + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) E_{si} \mu_{si} m_i^2}{E_{bm}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) E_{si} \mu_{si} l_i^2}{E_{bl}} \right).$$

[$i = x, y, z$ индексы j, e принимают значения согласно условиям (6.133)].

Формулы (6.137) позволяют установить связь между деформациями $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и напряжениями в осях x, y, z . Установим аналогичные связи между деформациями сдвига и напряжениями. Однако предварительно сделаем некоторые пояснения. Согласно (6.11) — (6.17) углы сдвига в осях n, m, l состоят из двух частей. Одна часть, куда относятся углы сдвига $\gamma_{snm}^* \approx \gamma_{nm}^*, \gamma_{sni}^* \approx \gamma_{ni}^*$, связана со сдвигами берегов трещин, а вторая часть (с компонентами $\gamma_{bmi}^* \approx \gamma_{mi}^*, \gamma_{bln}^* \approx \gamma_{ln}^*, \gamma_{bmn}^* \approx \gamma_{mn}^*, \gamma_{blm}^* \approx \gamma_{lm}^*$) зависит от деформации блоков бетона между трещинами.

Первая часть образует вектор-столбец (6.11), а вторая аналогичный столбец (6.15). При повороте осей координат оба столбца преобразовываются как компоненты несимметричного тензора. Преобразованные к осям x, y, z столбцы (6.11) и (6.15) и их компоненты соответственно обозначим:

$$\{\epsilon_s^*\}_x = \{\epsilon_{sx}, \epsilon_{sy}, \epsilon_{sz}, \gamma_{sxy}^*, \gamma_{syx}^*, \gamma_{syz}^*, \gamma_{szy}^*, \gamma_{sxz}^*, \gamma_{sxz}^*\}^T;$$

$$\{\epsilon_b^*\}_x = \{\epsilon_{bx}, \epsilon_{by}, \epsilon_{bz}, \gamma_{bxy}^*, \gamma_{byx}^*, \gamma_{byz}^*, \gamma_{byz}^*, \gamma_{bzy}^*, \gamma_{bxz}^*\}^T$$

Компоненты деформаций преобразовываются так же, как и компоненты напряжений (см. гл. 1):

$$\sigma_i = \sigma_n n_i^2 + \sigma_m m_i^2 + \sigma_l l_i^2 + (\tau_{nl} + \tau_{ln}) n_i l_i +$$

$$+ (\tau_{nm} + \tau_{mn}) n_i m_i + (\tau_{ml} + \tau_{lm}) m_i l_i,$$

$$(i = x, y, z);$$

$$\tau_{ij} = \sigma_n n_i n_j + \sigma_m m_i m_j + \sigma_l l_i l_j +$$

$$+ \tau_{nl} n_i l_j + \tau_{ln} l_i l_j + \tau_{nm} n_i m_j +$$

$$+ \tau_{mn} m_i n_j + \tau_{ml} m_i l_j + \tau_{lm} l_i m_j,$$

$$(\ddot{i} = xy, xz, yx, yz, zx, zy),$$

где формально τ заменяется на γ , а σ на ϵ с соответствующими индексами sij или bij и др.

В сумме столбцы (6.138) приводят к общим деформациям:

$$\{\epsilon^*\}_x = \{\epsilon_x = \epsilon_{sx} + \epsilon_{bx}; \epsilon_y = \epsilon_{sy} + \epsilon_{by}; \epsilon_z = \epsilon_{sz} + \epsilon_{bz}$$

$$\gamma_{xy}^* = \gamma_{sxy}^* + \gamma_{bxy}^*; \gamma_{yz}^* = \gamma_{syz}^* + \gamma_{byz}^*; \quad (6.140)$$

$$\gamma_{zx}^* = \gamma_{szx}^* + \gamma_{bzx}^*; \gamma_{yx}^* = \gamma_{syx}^* + \gamma_{byx}^*; \gamma_{zy}^* = \gamma_{szy}^* + \gamma_{bzy}^*;$$

$$\gamma_{xz}^* = \gamma_{szx}^* + \gamma_{bzx}^* \}^T.$$

Если ввести суммарные углы сдвига типа

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy}^* + \gamma_{yx}^*;$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \gamma_{yz}^* + \gamma_{zy}^*;$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx}^* + \gamma_{xz}^*, \quad (6.141)$$

то они согласно (6.140) будут состоять из четырех компонент. С учетом (6.141) девятикомпонентный столбец (6.140) преобразуется в шестикомпонентный

$$\{\epsilon\}_x = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T. \quad (6.142)$$

Компоненты этого столбца выражаются через напряжения по формулам (6.137). Задача состоит в том, чтобы выразить аналогичным образом углы общие сдвига γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx} .

Перейдем к определению общих углов сдвига согласно (6.141), причем каждый общий угол сдвига будет состоять из четырех частей. Найдем сначала эти части в отдельности, начав с вычисления компонент с индексом b (углов поворота сечений бетона от действия усилий, приложенных к бетону на площадках m и l , вдоль которых не проходят трещины). Углы сдвига определяются по второй формуле (6.139), формально заменяя τ_{ij} на γ_{bij} , σ_m на ϵ_m и т.д. Дополнительно в этих формулах исключаются члены, содержащие $\epsilon_n, \gamma_{nl}^*, \gamma_{nm}^*$; они связаны с раскрытием трещин и учитываются отдельно — в компонентах с индексом s . В дальнейшем поступим так же, как и при выводе зависимостей (6.130) — (6.132), получим

$$\gamma_{bji}^* = \frac{1}{E_{bm}} (\sigma_l m_j m_i + \tau_{ji} m_j^2 + \tau_{ei} m_e m_j) +$$

$$+ \frac{1}{E_{bl}} (\sigma_l l_i l_j + \tau_{ji} l_j^2 + \tau_{ei} l_e l_j) -$$

$$- \epsilon_i \left(\frac{E_{si} m_i m_j \mu_{si}}{E_{bm}} + \frac{E_{si} l_i l_j \mu_{si}}{E_{bl}} \right), \quad (6.143)$$

$$(ji = xy, yx, yz, zy, zx, xz).$$

Внося в (6.143) значения ϵ_i из (6.137), находим окончательные значения γ_{sji}^* .

Перейдем теперь к определению компонент с индексом s . Согласно формулам (6.39)

$$\gamma_{sji}^* = \tau_{sji} \frac{\psi_{sj} n_{jl}}{E_{sj}}. \quad (6.144)$$

В дальнейшем поступим так: вносим в (6.144) значение τ_{sji} из выражения (6.122), а затем заменяем σ_{si} и $\tilde{\epsilon}_{bi}$ их значениями из (6.132) и (6.133), т.е.

$$\begin{aligned} \gamma_{sji}^* &= \sigma_{si} \frac{\psi_{si} n_j}{E_{si} n_i} - \tilde{\epsilon}_{bi} \frac{\psi_{si} n_j}{n_i} = (\epsilon_i - \tilde{\epsilon}_{bi}) \frac{n_j}{n_i} \\ &= \epsilon_i \left(1 + \frac{E_{si} m_i^2 \mu_{si}}{E_{bm}} + \frac{E_{si} \mu_{si} l_i^2}{E_{bl}} \right) \frac{n_j}{n_i} - \\ &\quad - \frac{n_j}{n_i E_{bm}} (\sigma_i m_i^2 + \tau_{ji} m_j m_i + \tau_{ei} m_e m_i) - \\ &\quad - \frac{n_j}{n_i E_{bl}} (\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_j l_i + \tau_{ei} l_e l_i). \end{aligned} \quad (6.145)$$

($ji = xy, yx, yz, zy, zx, xz$).

Внося в (6.143) и (6.145) значение ϵ_i из (6.137), находим окончательные значения компонент γ_{bij}^* и γ_{sji}^* . Суммируя эти значения, т.е. принимая

$$\gamma_{ji}^* = \gamma_{bji}^* + \gamma_{sji}^*,$$

находим

$$\begin{aligned} \gamma_{ji}^* &= \sigma_i \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{n_j \lambda_i \psi_{si}}{n_i E_{si} \mu_{si}} + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) m_i m_j}{E_{bm}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) l_i l_j}{E_{bl}} \right] + \tau_{ji} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{n_j^2 \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2 E_{si} \mu_{si}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{bm}} (m_j^2 + \frac{n_j^2 m_i^2 \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2} - \frac{2 m_i m_j \lambda_i \psi_{si} n_j}{n_i}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{bl}} (l_j^2 + \frac{l_i^2 n_j^2 \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2} - \frac{2 l_i l_j \lambda_i \psi_{si} n_j}{n_i}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) E_{si} \mu_{si}}{E_{bm} E_{bl}} (m_i l_j - l_i m_j)^2 \right] + \end{aligned} \quad (6.146)$$

$$\begin{aligned} &+ \tau_{ei} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{n_j n_e \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2 E_{si} \mu_{si}} + \frac{1}{E_{bm}} (m_e m_j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_i^2 n_j n_e \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2} - \frac{\lambda_i \psi_{si} m_i n_j m_e}{n_i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_i \psi_{si} m_i n_e m_j}{n_i} \right] + \frac{1}{E_{bl}} (l_e l_j + \\ &\quad \left. + \frac{l_i^2 n_j n_e \lambda_i \psi_{si}}{n_i^2} - \frac{\lambda_i \psi_{si} l_i n_j l_e}{n_i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_i \psi_{si} l_i l_j n_e}{n_i} \right) + \frac{(1 - \lambda_i \psi_{si}) E_{si} \mu_{si}}{E_{bm} E_{bl}} (m_i^2 l_e l_j + \\ &\quad \left. + l_i^2 m_e m_j - m_j m_i l_i l_e - l_j l_i m_e m_i \right), \end{aligned} \quad (6.146)$$

($ji = xy, yx, yz, zy, zx, xz$; $e = x, y, z$ при $e \neq i, e \neq j$).

Определив шесть компонент γ_{ij}^* , можно вычислить три компоненты $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ по формуле (6.141).

Связи относительных деформаций с напряжениями в виде (6.137), (6.141) с учетом (6.146) представляют физические соотношения железобетона с трещинами. Обозначив в этих соотношениях стоящие при напряжениях коэффициенты через c_{ij} (c_{ij} — элементы матрицы податливости), можно представить эти соотношения в традиционном виде:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & 0 \\ & c_{22} & 0 & c_{24} & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (6.147)$$

симметрично

6.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН

Ширина раскрытия трещин зависит от двух основных факторов: расстояния между трещинами $l_{cr,n}$ и деформаций по нормали к трещинам ϵ_{sn} . Рассмотрим сначала определение $l_{cr,n}$. Трещины образуются неодновременно, если даже напряженное состояние является однородным. Сначала образуется трещина по одной из площадок, например I , на которой бетон по какой-либо причине является ослабленным. Затем (возможно сразу) образуется смежная трещина по площадке II . Положим эту схему в основу теоретических построений, следуя [56, 61].

Рассмотрим сначала площадку I , с нормалью n в момент перед образованием трещин (рис. 6.12, а). На этой площадке напряжения в бетоне достигают предельного значения $\hat{\sigma}_{b1}$ ($\hat{\sigma}_{b1}$ определяется по критерию (2.44), где оно обозначено $\hat{\sigma}$). Обозначим σ_{si}^0 — напряжения в арматуре в момент образования трещин, а σ_n^0 — общие приведенные напряжения на площадке I . Согласно рис. 6.12, а

$$\sigma_n^0 = \sigma_{si}^0 \mu_{si} n_i^2 + \hat{\sigma}_{b1}. \quad (6.148)$$

После образования трещины напряженное состояние на площадке I резко меняется (рис. 6.12, б). Возрастает нормальные напряжения в арматуре σ_{si} ($\sigma_{si} \mu_{si} n_i$ — усилия в арматуре, приходящиеся на площадку I площадью $F_i = 1$, см. рис. 6.4). Появляются касательные напряжения в арматуре $\tau_{sik(i)}$ и $\tau_{sie(i)}$ ($\tau_{sik(i)} \mu_{si} n_i$,

$\tau_{sie(i)} \mu_{si} n_i$ — касательные усилия, приходящиеся на площадку $F_i = 1$). Бетон в трещине выключается из работы, в результате чего и возрастают напряжения в арматуре. В бетоне остаются лишь некоторые напряжения в связях зацепления σ_{qn} , τ_{qnm} , τ_{qnl} . Проецируя усилия в арматуре и бетоне, приложенные к площади $F_i = 1$, на нормаль n по аналогии с (6.1) находим

$$\sigma_n^0 = \sum_i \sigma_{si} \mu_{si} n_i^2 + \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i n_j + \sigma_{qn} \quad (6.149)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots; j = k(i) = k(1), k(2), k(3), \dots)$$

$$e(i) = e(1), e(2), e(3), \dots;$$

на рис. 6.12 показано одно направление стержней i , в действительности их может быть несколько $i = 1, 2, 3, \dots$; n_i, n_j — направляющие косинусы (см. табл. 6.1, 6.2).

Нормальные (осевые) напряжения σ_{si} в арматурном стержне в трещине I (рис. 6.12, в) по мере удаления от трещины будут затухать, вследствие действия касательных напряжений τ_{si}^{cu} по контакту арматуры с бетоном, а напряжения в бетоне, наоборот, возрастать. На некотором удалении от трещины (на расстоянии l_{si} , рис. 6.12, в) напряжения в арматуре уменьшатся до значения σ_{si}^0 , а напряжения в бетоне возрастут до значения $\hat{\sigma}_{b1}$. Площадка II , на которой напряжения составят σ_{si}^0 и $\hat{\sigma}_{b1}$, принимается за площадку образования смежной трещины. На площадке II , как и на площадке I , при практическом одновременном образовании трещин будет соблюдаться с некоторым приближением условие (6.148).

Перейдем к рассмотрению поведения стержней внутри бетона. Рассматривая одиночный стержень длиной l_{si} с приложенными к нему напряжениями, можно составить следующее уравнение равновесия (по аналогии с тем, как это сделано В.И. Мурашевым [127] для одноосно растянутых элементов)

$$(\sigma_{si} - \hat{\sigma}_{b1}^0) F_i = \bar{\tau}_i^{cu} \omega_i^{cu} s_i l_{si}. \quad (6.150)$$

где F_i — площадь стержня; s_i — периметр; $\bar{\tau}_i^{cu}$ — максимальное касательное напряжение; ω_i^{cu} — коэффициент полноты эпюры напряжений сцепления ($\bar{\tau}_i^{cu} \omega_i^{cu}$ — среднее напряжение сцепления).

Учитывая, что $s_i/F_i = 4/d_i$, где d_i — диаметр стержня, $l_{si} = l_{cr,n}/n_i$, согласно рис. 6.12, в можно переписать указанное уравнение равновесия стержня в виде

$$\sigma_{si} - \sigma_{si}^0 = 4 \bar{\tau}_i^{cu} \omega_i^{cu} l_{cr,n}/d_i n_i. \quad (6.151)$$

При определении $l_{cr,n}$ — расстояния между трещинами I, II , предполагаем, что они практически параллельны.

Согласно [127] можно принять

$$\bar{\tau}_i^{cu} \omega_i^{cu} = R_{bt} / \eta_i, \quad (6.152)$$

где η_i — коэффициенты, зависящие от профиля и вида арматуры (принимаются по рекомендациям норм).

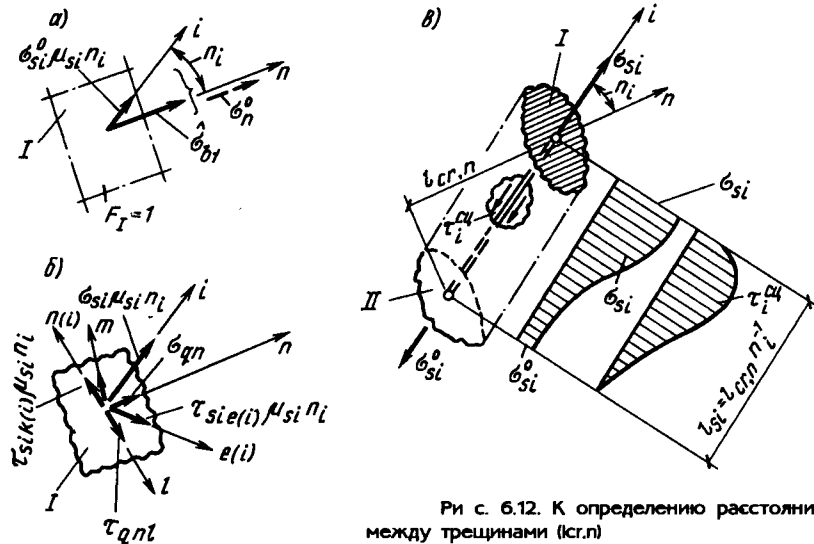


Рис. 6.12. К определению расстояния между трещинами ($l_{cr,n}$)

С учетом этого фактора формула (6.151) преобразуется к виду

$$\sigma_{si} - \sigma_{si}^0 = 4 R_{bt} l_{cr,n} / d_i n_i \eta_i \quad (6.153)$$

Приравнявая выражения (6.148) и (6.149), находим

$$\sum_i (\sigma_{si} - \sigma_{si}^0) \mu_{si} n_i^2 = \hat{\sigma}_{b1} - \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i n_j - \sigma_{qn} \quad (6.154)$$

Внося в это выражение значение разности напряжений в виде (6.151) и представляя:

$$\hat{\sigma}_{b1} = R_{bt} k_{t3},$$

$$\hat{\sigma}_{b1} - \sum_{ij} \tau_{sij} \mu_{si} n_i n_j = \hat{\sigma}_{b1} \lambda_{\tau n} = R_{bt} k_{t3} \lambda_{\tau n},$$

находим

$$l_{cr,n} = \frac{k_{t3} \lambda_{\tau n}}{4 \sum_i \frac{n_i \mu_{si}}{d_i \eta_i}} \quad (6.155)$$

Рассмотрим частный случай ортотропного армирования ($i = x, y, z$). В момент образования трещин, если принять, что трещина образуется по площадке приложения главных растягивающих напряжений σ_i , формулы (6.136) можно записать

$$\sigma_{si} = \sigma_i \lambda_i / \mu_{si} \approx \hat{\sigma}_{b1} \lambda_i / \mu_{si}$$

или, если умножить правые и левые части на n_i — направляющие косинусы,

$$\sigma_{si} \mu_{si} n_i \approx \hat{\sigma}_{b1} \lambda_i n_i,$$

где $\sigma_{si} \mu_{si} n_i$ — фактически равны проекциям напряжений, стоящих в правой части выражения (6.154), на оси x, y, z .

Правая часть (6.154) будет равна

$$\sum_i \sigma_{si} \mu_{si} n_i^2 = \hat{\sigma}_{b1} \sum_i \lambda_i n_i^2.$$

Отсюда делаем заключение, что

$$\lambda_{\tau n} = \sum_i \lambda_i n_i^2. \quad (6.156)$$

С учетом установленной зависимости (6.156) формула (6.155) для ортотропного армирования запишется

$$l_{cr,n} = \frac{k_{t3} (\lambda_x n_x^2 + \lambda_y n_y^2 + \lambda_z n_z^2)}{4 \times \sum_i \left(\frac{n_x \mu_{sx}}{d_x \eta_x} + \frac{n_y \mu_{sy}}{d_y \eta_y} + \frac{n_z \mu_{sz}}{d_z \eta_z} \right)} \quad (6.157)$$

Исследования [61] показали, что формула (6.157) реагирует на изменение диаметров арматуры и коэффициентов армирования в меньшей степени, чем это наблюдается в опытах. Видимо, сказывается неточность зависимости (6.152). Фактически в формуле (6.150) может участвовать лишь часть периметра арматуры (величина $p_i s_i$, где p_i — некоторый параметр уменьшения). В связи с этим вместо отношения s_i / F будет фигурировать отношение $s_i p_i / F_i = 4 p_i / d_i$. В то же время параметр η_i может зависеть дополнительно от диаметра арматуры и от насыщения сечения арматурой. Предварительные исследования показали, что эти факторы можно учесть, заменив в (6.157) d_i на $0,65 \sqrt{d_i d_0}$, где $d_0 = 1$ см ($i = x, y, z$), и приняв, что формула (6.157) справедлива, пока выполняется условие

$$\mu_{sn} \leq 0,02, \quad (6.158)$$

$$\text{где } \mu_{sn} = \sum_i \mu_{si} n_i^2 \quad (i = x, y, z)$$

Если условие (6.158) нарушается, то необходимо найти отношение $0,2 / \mu_{sn}$ и на это отношение уменьшать реальные значения μ_{si} , а затем уже использовать формулу (6.157). Однако для выяснения влияния указанных факторов еще требуются дополнительные исследования.

Наряду с теоретической зависимостью для $l_{cr,n}$ может использоваться и полуэмпирическая зависимость, которая оказывается в ряде задач более удобной. В ней сделана попытка учесть как выявленное выше влияние наклона трещины к направлениям армирования — через направляющие косинусы n_i , так и влияние некоторых величин (диаметра и процента армирования), входящих в эмпирическую формулу норм (СНиП 2.03.01 — 84), предложенную Ю.П. Гущей [46]. Представленная ниже формула также может использоваться для косоугольного армирования.

Определим сначала промежуточные величины

$$d = \frac{\sum_i d_i \mu_{si} n_i^2}{\sum_i \mu_{si} n_i^2}; \quad \eta = \frac{\sum_i \eta_i \mu_{si} n_i^2}{\sum_i \mu_{si} n_i^2}, \quad (6.160)$$

$$\alpha^* = 1 - 1,5 (1 - n_x) (1 - n_y) (1 - n_z),$$

где d — некоторый средний диаметр арматуры; η — средний коэффициент влияния профиля.

Эмпирическая формула по определению расстояния между трещинами имеет вид

$$l_{cr,n} = 3 k_{t3} \eta \varphi_l \alpha^* (3,5 - 100 \mu_{sn}) \sqrt{d_0^2 d}, \quad (6.161)$$

где $d_0 = 10$ см²; величина $(3,5 - 100 \mu_{sn})$ принимается не меньше 1,5.

Ширина раскрытия трещин

$$a_{cr,n} = \epsilon_n l_{cr,n}. \quad (6.162)$$

В практических расчетах нашел применение приближенный вариант формулы (6.162), который получают, пренебрегая членами $\sum \epsilon_{bi} \psi_{si}$

$$a_{cr,n} \approx l_{cr,n} \sum \frac{\sigma_{si} \psi_{si}}{E_{si}}, \quad (i = x, y, z). \quad (6.163)$$

В нормах вводится еще дополнительный параметр φ , учитывающий влияние длительности действия напряжений и некоторых других факторов. При учете этих факторов правая часть формул (6.162) и (6.163) умножается на этот параметр.

6.10. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Плоское напряженное состояние — частный, но довольно распространенный случай, рассмотренного выше объемного напряженного состояния. Наиболее точно оно реализуется в различных тонких плоскостных конструкциях: балках-стенках, высоких перемышках, стеновых панелях, стенах жесткости и других, которые нагружаются силами в плоскости при равномерном их распределении по толщине конструкций h (рис. 6.13, а, б; напряженное состояние по толщине плоской железобетонной конструкции будет несколько изменяться, однако этим обычно пренебрегают). Плоское напряжение также может реализовываться в отдельных складках и оболочках, работающих в условиях безмоментного напряженного состояния, в пространственных тонкостенных стержнях открытого и замкнутого профиля, например в коробчатых ядрах жесткости и др.

Расчет плоских конструкций производится на основании уравнений плоской задачи теории упругости за исключением физических уравнений, связывающих напряжения с относительными деформациями, которые следуют в виде частного случая из представленных выше более общих физических уравнений. Учитывая большое распространение плоскостных конструкций, выделим это состояние для отдельного рассмотрения. Заметим, что плоское напряженное состояние ранее подробно рассматривалось в монографии автора [61], поэтому здесь сделан акцент на некоторые новые вопросы. Различные варианты плоских моделей освещались в [33, 49, 61, 180, 181 и др.].

Краткая характеристика напряженно-деформированного состояния. Напряженное состояние в точках плоской конструкции в осях x, y характеризуется тремя компонентами напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (см. рис. 6.13, а-г), ввиду парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Третья ось z — нормальна к плоскости конструкции; компоненты напряжений на площадках zx и zy равны нулю ($\sigma_z \approx 0; \tau_{yz} = \tau_{zy} \approx 0; \tau_{zx} = \tau_{xz} \approx 0$).

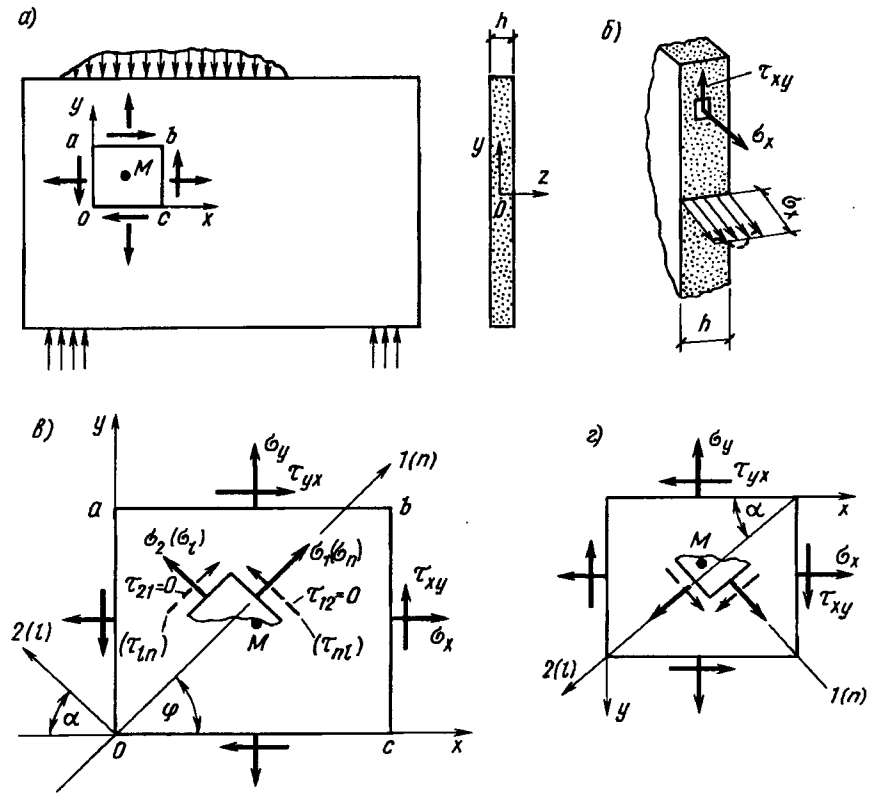


Рис. 6.13. Компоненты плоского напряженного состояния (к переходу от объемного к плоскому напряженному состоянию)

Оси координат x, y могут ориентироваться так, как показано на рис. 6.13, в, или так, как показано на рис. 6.13, г; эти две схемы отсчета нашли применение в практических расчетах. В зависимости от этого меняются положительные направления касательных напряжений τ_{xy} и схемы отсчета углов α или φ . Нормальные растягивающие напряжения везде приняты за положительные.

Главные напряжения σ_1, σ_2 определяются по известным формулам сопротивления материалов

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}, \quad (6.164)$$

(знак «+» относится к вычислению $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, а «-» — к вычислению $\sigma_2 = \sigma_{\min}$).

Угол α (или $\varphi = 90^\circ - \alpha$), характеризующий наклон главных площадок к оси x , определяется на основании одного из выражений;

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_y - \sigma_2}{\tau_{xy}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_y}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_2}{\tau_{xy}} \quad (6.165)$$

Вывод (6.165) рассмотрен, например, в [61]. Оси $1, 2$ ориентированы вдоль главных площадок (см. рис. 6.13, α, ε). Кроме того, вводятся оси n, l , которые, как и ранее, ориентируются вдоль и нормально к площадкам образования трещин. На схемах рис. 6.13 оси n, l совмещены с осями $1, 2$, однако это совмещение в действительности относится лишь к моменту образования трещин. Трещины образуются обычно на площадках главных растягивающих напряжений в элементе, точнее в бетоне элемента, а затем эти площадки трещин могут из-за перераспределения напряжений становиться и не главными. В таких случаях угол α в представленных ниже соотношениях характеризует наклон трещин, а не наклон площадок главных напряжений, и относится к ориентации осей n, l ; $\sigma_n, \sigma_l, \tau_{nl} = \tau_{ln}$ — компоненты плоского напряженного состояния в осях n, l .

Деформированное состояние плоского элемента характеризуется в плоскости xy тремя компонентами относительных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — относительные удлинения вдоль оси x и y , $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ — общий угол сдвига). В осях n, l эти компоненты обозначаются $\varepsilon_n, \varepsilon_l, \gamma_{nl} = \gamma_{ln}$. Главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и углы их ориентации формально определяются по формулам (6.164), (6.165), заменяя σ на ε , τ на $1/2\gamma$ (индексы остаются без изменения), однако направления главных деформаций в железобетонных элементах, особенно с трещинами, могут не совпадать с направлениями главных напряжений. Углы сдвига γ_{nl} и γ_{xy} , как и γ_{xy} , элементов с трещинами состоят из двух компонент

$$\gamma_{nl} = \gamma_{nl}^* + \gamma_{ln}^*; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* + \gamma_{yx}^* \quad (6.166)$$

физический смысл которых раскрыт в п. 6.3.

Армирование. Выделяются две схемы армирования: в виде прямоугольной сетки (ортотропное армирование, рис. 6.14, a), в виде косоустанавливаемых стержней одного или нескольких i -направлений (косоугольное армирование, рис. 6.14, b, β). Из второй схемы следуют различные другие варианты армирования, в том числе и указанные выше традиционно применяемое армирование в виде прямоугольной сетки. Ортотропное армирование выделяется отдельно лишь по причине его большого практического распространения.

Каждое направление установки арматурных стержней характеризуется коэффициентом армирования μ_{sj} и углом β_j — наклона стержней к оси x (рис. 6.14, $a-\beta$),

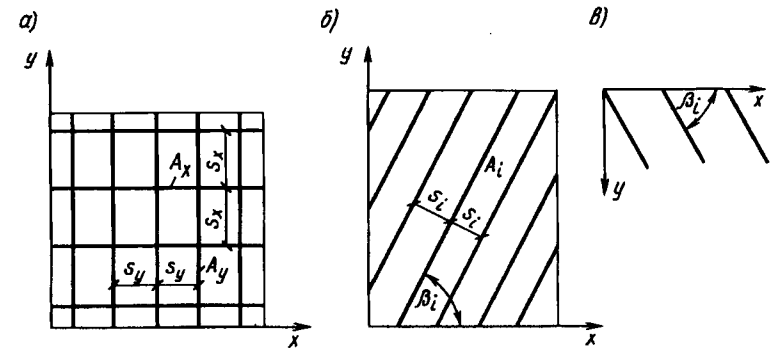


Рис. 6.14. Схемы армирования плоских конструкций a — ортотропное; b, β — косоугольное

$$\mu_{sj} = A_j / (s_j h) \quad (j = x, y, i), \quad (6.167)$$

где A_j — площадь стержней j -го направления; s_j — шаги стержней; h — толщина пластины.

В случае ортотропного армирования $\beta_x = 0, \beta_y = 90^\circ$. В косоугольном армировании β_j обозначается β_i (см. рис. 6.14, b, β); вообще индексами могут быть любые буквы. Отдельно устанавливаемые стержни учитываются в коэффициентах армирования так, как указано в п. 5.1.

Схемы трещин. В плоскостных конструкциях реализуются две схемы трещин: схема 1 — в виде наклонных трещин одного направления (рис. 6.15, b), которые называются еще непересекающимися, и схема 2 — в виде наклонных трещин двух пересекающихся направлений (рис. 6.15, β) — схема пересекающихся трещин. Трещины являются сквозными, насквозь пересекают толщину пластины h . На рис. 6.15, a представлена кривая прочности бетона при плоском напряженном состоянии (σ_{b1}, σ_{b2} — главные напряжения бетона).

Если располагать напряжения в последовательности $\sigma_{b1} \geq \sigma_{b2}$ (заштрихованная область I на рис. 6.15, a), то достаточно использовать половину линии прочности — кривую 1-2-3-4. На этой кривой прочности можно выделить три отрезка: (1-2) — двухосного растяжения ($\sigma_{b1} > 0, \sigma_{b2} > 0$), (2-3) — растяжения — сжатия ($\sigma_{b1} > 0, \sigma_{b2} < 0$), (3-4) — двухосного сжатия. «Выход» напряжений за линию (2-3) указывает на образование трещин по схеме 1, а за границу (1-2) — образование трещин по схеме 1 или схеме 2 (схема 2 реализуется для напряжений, близких к напряжениям точки 1, т.е. практически при двухосном равномерном растяжении). Образование трещин приводит к выключению бетона из работы по некоторым линиям (трещинам). Между трещинами блоки (в данном случае полосы) бетона могут воспринимать напряжения.

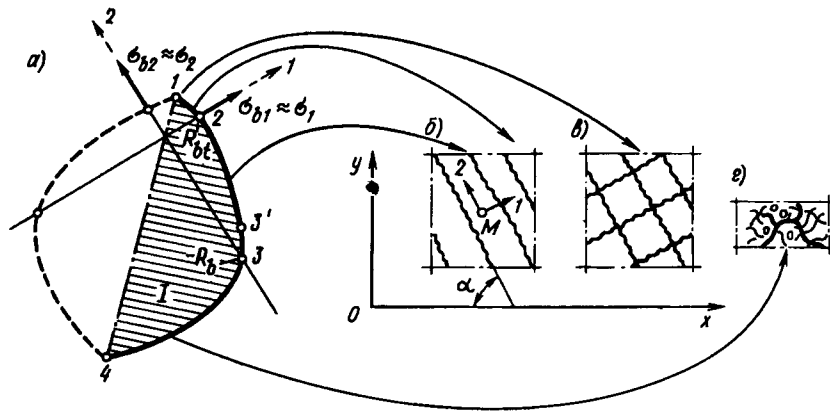


Рис. 6.15. Критерии прочности (а) и соответствующие ему схемы трещинообразования (б, в) и разрушения в объеме (г)

Линия (3-4) характеризует границу прочности бетона при двухосном сжатии. Выход за нее указывает на разрушение бетона по всему объему элемента (рис. 6.15, в). В некоторых работах указывается, что граница, характеризующая разрушение бетона по всему объему от сжатия, начинается не в точке 3, а в точке 3' (при $\sigma_{b2} = -0,8 R_b$, где R_b — прочность бетона при одноосном сжатии). Этот вопрос будет рассмотрен при анализе прочности полос бетона между трещинами. Нижний индекс «b» указывает на то, что главные напряжения относятся к одной из компонент железобетона — бетону. При обычно принимаемых небольших коэффициентах армирования вкладом арматуры до появления трещин можно пренебречь, тогда $\sigma_{b1} \approx \sigma_1$; $\sigma_{b2} \approx \sigma_2$. В других случаях компоненты напряжений бетона выделяются по формулам, приведенным в гл. 5. Кривая прочности плосконапряженного бетона следует в виде частного случая из общего критерия прочности бетона, представленного в гл. 2.

При переходе от общего (объемного) критерия прочности к плоскому необходимо принимать во внимание два обстоятельства. Одно связано с тем, что здесь и ниже главным напряжениям бетона присваивается нижний индекс «b», чтобы отличить их от общих напряжений, куда входят и приведенные напряжения арматуры, второе (неформальное) связано с изменением нумерации главных напряжений.

Главные напряжения в гл. 2 обозначены $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Обозначим главные напряжения плоского напряжения σ_1, σ_2 , определяемые формулой (6.164), в виде σ_1^n, σ_2^n , а обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ объемных напряжений оставим без изменения. Тогда $\sigma_1^n = \sigma_1, \sigma_2^n = \sigma_2, \sigma_3^n = 0$ в области с границей 1-2; $\sigma_1^n = \sigma_1, \sigma_2^n = 0, \sigma_3^n = \sigma_3$ — в области сжатия — растяжения (с границей

	i	$k(i)$	$e(i)$
n	$n_i = \sin(\alpha + \beta_i)$	$n_{k(i)} = \cos(\alpha + \beta_i)$	$n_{e(i)} = 0$
m	$m_i = 0$	$m_{k(i)} = 0$	$m_{e(i)} = 1$
l	$l_i = -\cos(\alpha + \beta_i)$	$l_{k(i)} = \sin(\alpha + \beta_i)$	$l_{e(i)} = 0$

2-3); $\sigma_1^n = \sigma_2, \sigma_2^n = \sigma_3, \sigma_3^n = 0$ — в области двухосного сжатия. Можно также использовать условия образования трещин, представленные в [61].

Переход от объемного к плоскому напряженному состоянию в случае косоугольного армирования. Процедура перехода представляется сравнительно простой. Следует лишь в формулах пп. 6.1 — 6.6 принять направляющие косинусы по табл. 6.4 и учесть некоторые особенности, связанные с деформациями. Схема отсчета направляющих косинусов показана на рис. 6.16. Она увязана с представленными на рис. 6.13—6.15 углами наклона трещин α и углами наклона арматуры β_i к оси x (эта ось выбрана в виде базовой). Так, согласно рис. 6.16 угол между положительными направлениями осей n и i составляет $(90^\circ - \alpha - \beta_i)$, следовательно $n_i = \cos(90^\circ - \alpha - \beta_i) = \cos(\alpha + \beta_i)$. Аналогичный угол между осью i и осью l составляет $180 - \alpha - \beta_i$, следовательно, $l_i = \cos(180^\circ - \alpha - \beta_i) = -\cos(\alpha + \beta_i)$. Аналогичным образом определяются и другие значения направляющих косинусов табл. 6.4.

Пусть трещины образуются по схеме 1. Рассмотрим сначала получение физических соотношений для плоского случая из общих соотношений (6.57). Эти соотношения складываются из соотношений (6.46), (6.50), (6.56). Рассмотрим преобразования соотношений (6.46). В вектор-столбце $\{\sigma_i^n\}$ при плоском напряжении пять компонент обращается в нуль, т.е.

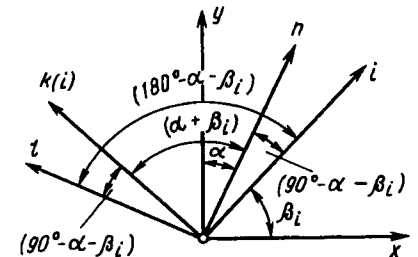


Рис. 6.16. К определению направляющих косинусов (табл. 6.4)

$$\{\sigma^*\}_n = \{\tilde{\sigma}_{sn}, \tilde{\sigma}_{sm} = 0, \tilde{\sigma}_{sl}, \tilde{\tau}_{snm} = 0, \tilde{\tau}_{sml} = 0,$$

$$\tilde{\tau}_{sml} = 0, \tilde{\tau}_{sin}, \tilde{\tau}_{smn} = 0, \tilde{\tau}_{lm} = 0, \tilde{\tau}_{snl}\}^T.$$

Внося значения направляющих косинусов из табл. 6.4 в выражения (6.48), получим коэффициенты, относящиеся к плоскому напряженному состоянию, причем часть коэффициентов обратится в нуль. Внесем в (6.46) лишь коэффициенты, которые не получились равными нулю, в результате

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{sn} \\ 0 \\ \sigma_{sl} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\sigma}_{sin} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\tau}_{snl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{s11}^* & 0 & d_{s13}^* & 0 & 0 & d_{s16}^* & 0 & 0 & d_{s19}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{s13}^* & 0 & d_{s33}^* & 0 & 0 & d_{s36}^* & 0 & 0 & d_{s39}^* \\ 0 & 0 & 0 & d_{s44}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{s16}^* & 0 & d_{s36}^* & 0 & 0 & d_{s66}^* & 0 & 0 & d_{s69}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{s88}^* & 0 \\ d_{s19}^* & 0 & d_{s39}^* & 0 & 0 & d_{s69}^* & 0 & 0 & d_{s99}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_m \\ \epsilon_l \\ \gamma_{nm}^* \\ \gamma_{ml}^* \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{mn}^* \\ \gamma_{lm}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{pmatrix}$$

Из этих соотношений можно корректно выделить компоненты, относящиеся к плоскому напряженному состоянию.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{sn} \\ \tilde{\sigma}_{sl} \\ \tilde{\tau}_{sln} \\ \tilde{\tau}_{snl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{s11}^* & d_{s13}^* & d_{s16}^* & d_{s19}^* \\ d_{s13}^* & d_{s33}^* & d_{s36}^* & d_{s39}^* \\ d_{s16}^* & d_{s36}^* & d_{s66}^* & d_{s69}^* \\ d_{s19}^* & d_{s39}^* & d_{s69}^* & d_{s99}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_l \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{pmatrix} \quad (6.169)$$

или в более компактном виде

$$\{\sigma_s^*\}_n^{\Pi} = [d_s^*]_n^{\Pi} \{\epsilon^*\}_n^{\Pi} \quad (6.170)$$

(индекс « Π » указывает на плоское напряженное состояние), где (для непересекающихся) трещин:

$$d_{s11}^* = \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} \sin^2(\alpha + \beta_i) [\sin^2(\alpha + \beta_i) + n_{Ti}^{-1} \cos^2(\alpha + \beta_i)];$$

$$d_{s13}^* = d_{s69}^* = \sum_i E_{si} \mu_{si} \sin^2(\alpha + \beta_i) \cos^2(\alpha + \beta_i);$$

$$d_{s16}^* = - \sum_i E_{si} \mu_{si} \sin^3(\alpha + \beta_i) \cos(\alpha + \beta_i);$$

$$d_{s19}^* = - \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} (1 - n_{Ti}^{-1}) \sin^3(\alpha + \beta_i) \cos(\alpha + \beta_i); \quad (6.171)$$

$$d_{s33}^* = \sum_i E_{si} \mu_{si} \cos^4(\alpha + \beta_i);$$

$$d_{s36}^* = d_{s39}^* = - \sum_i E_{si} \mu_{si} \sin(\alpha + \beta_i) \cos^3(\alpha + \beta_i);$$

$$d_{s66}^* = \sum_i E_{si} \mu_{si} \sin^2(\alpha + \beta_i) \cos^2(\alpha + \beta_i);$$

$$d_{s99}^* = \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} \sin^2(\alpha + \beta_i) [\cos^2(\alpha + \beta_i) +$$

$$+ n_{Ti}^{-1} \sin^2(\alpha + \beta_i)].$$

Компоненты относительной деформации, которые не вошли в (6.169), как и компоненты напряжений, равны нулю

$$\epsilon_m \approx \gamma_{ml}^* \approx \gamma_{mn}^* \approx \gamma_{lm}^* \approx 0. \quad (6.172)$$

В принципе условие равенства нулю компонент $\epsilon_m, \gamma_{ml}^*, \gamma_{mn}^*$ очевидно, поскольку все коэффициенты в соответствующих строках (6.168) равны нулю. Однако, если установить арматуру вдоль оси z , то главные коэффициенты перестают быть нулевыми, тем не менее равенства (6.172) не нарушаются, что и указывает на их справедливость.

Аналогичным образом устанавливаются коэффициенты d_{sij}^* , и для схемы пересекающихся трещин. При этом коэффициенты d_{s11}^*, d_{s19}^* и d_{s99}^* остаются такими же, как и в схеме непересекающихся трещин, а остальные принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
d_{s13}^* &= d_{69}^* = \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} (1 - n_{\tau i}^{-1}) \sin^2 (\alpha + \beta_i) \times \\
&\times \cos^2 (\alpha + \beta_i); \\
d_{s16}^* &= -\sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} [\sin^2 (\alpha + \beta_i) + n_{\tau i}^{-1} \cos^2 (\alpha + \beta_i)] \times \\
&\times \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i); \\
d_{s33}^* &= \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} [\cos^2 (\alpha + \beta_i) + n_{\tau i}^{-1} \sin^2 (\alpha + \beta_i)] \times \\
&\times \cos^2 (\alpha + \beta_i); \\
d_{s36}^* &= -\sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} (1 - n_{\tau i}^{-1}) \sin (\alpha + \beta_i) \cos^3 (\alpha + \beta_i); \\
d_{s39}^* &= -\sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} [\cos^2 (\alpha + \beta_i) + n_{\tau i}^{-1} \sin^2 (\alpha + \beta_i)] \times \\
&\times \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i); \\
d_{s66}^* &= \sum_i E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} [\sin^2 (\alpha + \beta_i) + n_{\tau i}^{-1} \cos^2 (\alpha + \beta_i)] \times \\
&\times \cos^2 (\alpha + \beta_i).
\end{aligned} \tag{6.173}$$

Вектор-столбцы напряжений $\{\sigma_b^*\}_n$ — в бетоне и $\{\sigma_q^*\}_n$ — в связях зацепления элементов с непересекающимися трещинами составят:

$$\begin{aligned}
\{\sigma_b^*\}_n &= \{0, 0, \sigma_{bl}, 0, 0, \tau_{bln}, 0, 0, 0\}^T, \\
\{\sigma_q^*\}_n &= \{\sigma_{qn}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \tau_{qnl}\}^T.
\end{aligned}$$

С учетом этого соотношения (6.51), (6.56) в сумме можно преобразовать к виду

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{qn} \\ \tilde{\sigma}_{bl} \\ \tilde{\tau}_{bln} \\ \tilde{\tau}_{qnl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{qn}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{bl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{bln} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{qnl} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_l \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{Bmatrix} \tag{6.174}$$

или в более компактном виде

$$\{\sigma_{b,q}^*\}_n = [d_{b,q}]_n \{\epsilon\}_n, \tag{6.175}$$

где E_{bl} — модуль деформации полос бетона между трещинами (он еще обозначается E_p); G_{bln} — модуль сдвига полос бетона между трещинами ($G_{bln} = E_p / (1 + \mu_p)$); μ_p — коэффициент поперечной деформации полос бетона между трещинами); E_{qn} — модуль деформации связей зацепления; G_{qnl} (E_{qnl}) — модуль сдвига связей зацепления.

Учитывая, что

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_s^*\}_n + \{\sigma_{b,q}^*\}_n,$$

$$\text{где } \{\sigma^*\}_n = \{\sigma_n, \sigma_l, \tau_{ln}, \tau_{nl}\}^T,$$

приходим к общим физическим соотношениям:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_l \\ \tau_{ln} \\ \tau_{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{13}^* & d_{16}^* & d_{19}^* \\ d_{13}^* & d_{33}^* & d_{36}^* & d_{39}^* \\ d_{16}^* & d_{36}^* & d_{66}^* & d_{69}^* \\ d_{19}^* & d_{39}^* & d_{69}^* & d_{99}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_l \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{Bmatrix} \tag{6.176}$$

$$\text{где } d_{11}^* = d_{s11}^* + E_{qn}; \quad d_{33}^* = d_{s33}^* + E_p, \tag{6.177}$$

$$d_{66}^* = d_{s66}^* + G_{bln}; \quad d_{99}^* = d_{s99}^* + G_{qnl},$$

остальные коэффициенты $d_{ij}^* = d_{sij}^*$.

Если реализуется схема пересекающихся трещин, то в соотношениях (6.174), (6.176) следует заменить E_p на E_{ql} и G_{bln} на G_{qnl} , кроме того, коэффициенты d_{sij}^* вычисляются по формулам (6.173).

Используя процедуру, описываемую уравнениями (6.64), (6.65), сводим систему четырех уравнений (6.176) к системе трех уравнений. Применительно к преобразованиям системы (6.176) эта процедура выглядит так. Приравниваются правые части третьего и четвертого уравнений, используя условие $\tau_{ln} = \tau_{nl}$. В этой системе одна из компонент сдвига, например γ_{nl}^* , выражается через общий сдвиг и вторую компоненту, используя условие $\gamma_{nl}^* = \gamma_{nl} - \gamma_{ln}^*$. Аналогичная замена производится в первом, втором и третьем уравнениях системы. Из уравнения $\tau_{ln} = \tau_{nl}$ определяется величина γ_{ln}^* , которая затем вводится в первые три уравнения. Таким образом приходим к системе

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_l \\ \tau_{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_l \\ \gamma_{nl} \end{Bmatrix}, \tag{6.178}$$

где

$$d_{11} = d_{11}^* - \frac{(d_{19}^* - d_{16}^*)}{A}; \quad d_{22} = d_{33}^* - \frac{(d_{39}^* - d_{36}^*)}{A};$$

$$d_{12} = d_{13}^* - \frac{(d_{19}^* - d_{16}^*)(d_{39}^* - d_{36}^*)}{A};$$

$$d_{13} = d_{19}^* - \frac{(d_{19}^* - d_{16}^*)(d_{99}^* - d_{69}^*)}{A};$$

$$d_{23} = d_{39}^* - \frac{(d_{39}^* - d_{36}^*)(d_{99}^* - d_{69}^*)}{A};$$

$$d_{33} = d_{99}^* - \frac{(d_{99}^* - d_{69}^*)}{A} = d_{66}^* - \frac{(d_{66}^* - d_{69}^*)}{A};$$

$$A = d_{99}^* + d_{66}^* - 2d_{69}^*.$$

(6.179)

Составляющие γ_{nl}^* и γ_{ln}^* общего сдвига γ_{nl} могут при необходимости вычисляться по формулам:

$$\gamma_{nl}^* = \frac{(d_{16}^* - d_{19}^*) \epsilon_n}{A} + \frac{(d_{36}^* - d_{39}^*) \epsilon_l}{A} + \frac{(d_{66}^* - d_{69}^*) \gamma_{nl}}{A},$$

$$\gamma_{ln}^* = \frac{(d_{19}^* - d_{16}^*) \epsilon_n}{A} + \frac{(d_{39}^* - d_{36}^*) \epsilon_l}{A} + \frac{(d_{99}^* - d_{69}^*) \gamma_{nl}}{A},$$

(6.180)

которые следуют из рассмотрения двух последних уравнений системы (6.176) с учетом парности касательных напряжений и равенства $\gamma_{nl} = \gamma_{ln}^* + \gamma_{nl}^*$.

Напряжения в арматуре: осевые в трещинах $\tilde{\sigma}_{si}$, средние на участках между трещинами $\tilde{\sigma}_{si}^m$ и касательные $\tilde{\tau}_{si}$ вычисляются по формулам (6.29), (6.30) и (6.31), (6.36) с учетом данных табл. 6.4:

$$\sigma_{si} = E_{si} [\psi_{si}^{-1} \sin^2 (\alpha + \beta_i) + \psi_{si,l}^{-1} \cos^2 (\alpha + \beta_i) -$$

$$- (\psi_{si}^{-1} \gamma_{nl}^* + \psi_{si,l}^{-1} \gamma_{ln}^*) \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i)] ;$$

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = E_{si} [\epsilon_n \sin^2 (\alpha + \beta_i) + \epsilon_l \cos^2 (\alpha + \beta_i) -$$

$$- \gamma_{nl} \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i)] ;$$

(6.181)

$$\tau_{si} = E_{si} n_{Ti}^{-1} \psi_{si}^{-1} [\epsilon_n \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i) +$$

$$+ \gamma_{nl}^* \sin^2 (\alpha + \beta_i) - \delta_l \epsilon_l \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i) -$$

$$- \delta_l \gamma_{nl}^* \cos^2 (\alpha + \beta_i)] ,$$

(6.181)

где для непересекающихся трещин $\psi_{si} = 1$; $\delta_i = 0$; для пересекающихся трещин $\psi_{si} = \psi_{si}^*$; $\delta_i = 1$.

Представим еще зависимости, позволяющие установить значения компонент напряжений бетона в элементах с трещинами. Согласно предпосылке 3т (см. п. 6.1) общие напряжения σ_n , σ_l , τ_{nl} складываются из двух составляющих — приведенных напряжений арматуры [они вычисляются по формулам (6.1)–(6.3), а в более общем виде — (6.5)] и приведенных напряжений бетона [они характеризуются вектор-столбцом (6.9)]. Эти напряжения относятся к граням элемента, которые проходят по площадкам трещин и площадкам, нормальным к трещинам.

Формулы (6.1)–(6.3) по определению приведенных напряжений арматуры приводятся в случае плоского напряженного состояния и образования трещин по схеме 1 (непересекающихся) к виду:

$$\tilde{\sigma}_{sn} = \sum_i [\sigma_{si} \mu_{si} \sin^2 (\alpha + \beta_i) + \tau_{sk(i)} \mu_{si} \sin (\alpha + \beta_i) \times \cos (\alpha + \beta_i)] ;$$

$$\tilde{\tau}_{snl} = - \sum_i [\sigma_{si} \mu_{si} \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i) + \tau_{sik(i)} \times \mu_{si} \sin^2 (\alpha + \beta_i)] ;$$

(6.182)

$$\tilde{\sigma}_{sl} = \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} \cos^2 (\alpha + \beta_i);$$

$$\tau_{sln} = - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} \cos (\alpha + \beta_i) \sin (\alpha + \beta_i);$$

(6.183)

Вычитая из общих напряжений напряжения, определяемые формулами (6.182), получим значения напряжений в связях зацепления

$$\sigma_{qn} = \sigma_n - \tilde{\sigma}_{sn}; \quad \tau_{qnl} = \tau_{nl} - \tilde{\tau}_{snl}.$$

(6.184)

Вычитая из общих напряжений напряжения, определяемые формулами (6.183), получим значения напряжений в полосах бетона между трещинами

$$\sigma_{bl} = \sigma_l - \tilde{\sigma}_{sl} = \sigma_l - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} \cos^2 (\alpha + \beta_i);$$

$$\tau_{bln} = \tau_{ln} + \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} \cos (\alpha + \beta_i) \sin (\alpha + \beta_i).$$

(6.185)

Напряжение σ_{bl} влияет на изменение модуля деформации полос бетона между трещинами.

В случае образования пересекающихся трещин (по схеме 2) бетон выключается из работы и на площадках-трещинах, нормальных к оси l . В этом случае вместо σ_{bl} и τ_{bln} остаются лишь некоторые напряжения в связях зацепления (σ_{ql} , τ_{qln}). Изменяются также зависимости (6.183). Новые зависимости следуют из формулы (6.5), полагая $\sigma_n^0 = 1$; $\sigma_m^0 = 0$; $\sigma_l^0 = 1$ и заменяя направляющие косинусы их значениями по табл. 6.4.

Учет температурных деформаций. При этом преобразовываются с учетом данных табл. 6.4 зависимости, приведенные в п. 6.5. Соотношения (6.99) записываются в виде

$$\{\sigma^*\}_n = [d^*]_n^{\Pi} \{\epsilon^*\}_n - \{\beta^*\}_n t^0. \quad (6.186)$$

Здесь, как и ранее, формальный индекс «п» указывает на то, что в столбцах и матрице остаются только компоненты плоского напряженного состояния. Все элементы (6.186) за исключением столбца $\{\beta^*\}_n$ рассмотрены выше;

$$\{\beta^*\}_n^{\Pi} = \{\beta_n^*, \beta_l^*, \beta_{ln}^*, \beta_{nl}^*\}, \quad (6.187)$$

где: в случае непересекающихся трещин (схема 1):

$$\begin{aligned} \beta_n^* &= \sum_i \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} \sin^2 (\alpha + \beta_i); \\ \beta_l^* &= \sum_i \alpha_{si}^0 E_{si} \mu_{si} \cos^2 (\alpha + \beta_i) + E_p \alpha_b^0; \\ \beta_{nl}^* &= -\sum_i \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i); \end{aligned} \quad (6.188)$$

$$\beta_{ln}^* = -\sum_i \alpha_{si}^0 E_{si} \mu_{si} \sin (\alpha + \beta_i) \cos (\alpha + \beta_i);$$

$$\alpha_{mi}^0 = \alpha_{si}^0 \psi_{si} + (1 - \psi_{si}) \alpha_b^0 \sin^2 (\alpha + \beta_i),$$

в случае пересекающихся трещин (схема 2),

$$\beta_l^* = \sum_i \alpha_{mi}^0 E_{si} \psi_{si}^{-1} \mu_{si} \cos^2 (\alpha + \beta_i); \quad (6.189)$$

$$\beta_{ln}^* = \beta_{nl}^*, \quad \alpha_{mi}^0 = \alpha_{si}^0 \psi_{si} + (1 - \psi_{si}) \alpha_b^0,$$

здесь компоненты β_n^* и β_{nl}^* вычисляются по формулам (6.188), принимая значения α_{mi}^0 по формулам (6.189).

По аналогии с (6.178) система четырех уравнений (6.186) преобразовывается к системе трех уравнений

$$\{\sigma\}_n^{\Pi} = [d]_n^{\Pi} \{\epsilon\}_n^{\Pi} - \{\beta^0\}_n^{\Pi} t^0, \quad (6.190)$$

$$\text{где } \{\beta^0\}_n = \{\beta_n^0, \beta_l^0, \beta_{nl}^0\}^T,$$

$$\beta_n^0 = \beta_n^* - \frac{1}{A} (\beta_{nl}^* - \beta_{ln}^*) (d_{19}^* - d_{19}^{*0});$$

$$\beta_l^0 = \beta_l^* - \frac{1}{A} (\beta_{nl}^* - \beta_{ln}^*) (d_{39}^* - d_{39}^{*0}); \quad (6.191)$$

$$\beta_{nl}^0 = \beta_{nl}^* - \frac{1}{A} (\beta_{nl}^* - \beta_{ln}^*) (d_{99}^* - d_{99}^{*0}).$$

Заметим, что в зависимости (6.191) можно ввести также вынужденные напряжения арматуры σ_{si}^0 , например от предварительного напряжения, при этом

$$\{\sigma\}_n^{\Pi} = [d]_n^{\Pi} \{\epsilon\}_n^{\Pi} - \{\beta^0\}_n^{\Pi} t^0 + \{\sigma_s^0\}_n, \quad (6.192)$$

где

$$\{\sigma_s^0\} = \{\sigma_{sn}^0, \sigma_{sl}^0, \tau_{snl}^0\}^T;$$

$$\sigma_{sn}^0 = \sum_i \sigma_{si}^0 \mu_{si} \sin^2 (\alpha + \beta_i); \quad (6.193)$$

$$\sigma_{sl}^0 = \sum_i \sigma_{si}^0 \mu_{si} \cos^2 (\alpha + \beta_i);$$

$$\tau_{snl}^0 = -\sum_i \sigma_{si}^0 \mu_{si} \cos (\alpha + \beta_i) \sin (\alpha + \beta_i).$$

Преобразования физических соотношений к осям x, y . Представленные выше соотношения записаны в локальных осях n, l . Преобразуем их к осям x, y . Пусть

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T; \quad \{\epsilon\}_x = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

— столбцы напряжений и относительных деформаций в осях x, y .

Известно, что (см. п. 1.6)

$$\{\sigma\}_x = [a_1] \{\sigma\}_n, \quad \{\epsilon\}_x = [a_1]^T \{\epsilon\}_n,$$

где

$$[a_1] = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{bmatrix}$$

Преобразования зависимостей (6.192) выполняются традиционным способом

$$\{\sigma\}_x = [\alpha_1] ([d]_n^{\Pi} [\alpha_1]^T \{\epsilon\}_x - \{\beta^0\}_n^{\Pi} t_0 + \{\sigma_s^0\}_n) =$$

$$= [\alpha_1] [d]_n^{\Pi} [\alpha_1]^T \{\epsilon\}_x - [\alpha_1] \{\beta^0\}_n^{\Pi} t_0 + [\alpha_1] \{\sigma_s^0\}_n. \quad (6.194)$$

Частный случай армирования прямоугольными сетками (плоского ортотропного армирования). Переход от косоугольного к ортотропному плоскому армированию представляется достаточно простым: в представленных выше зависимостях следует принять $i = x, y$, полагая $\beta_i = 0$ при $i = x$ и $\beta_i = 90^\circ$ при $i = y$. Коэффициенты армирования составляют: μ_{sx}, μ_{sy} .

Остановимся на определении напряжений в арматуре в трещинах непосредственно через компоненты напряжений в осях x, y . Эти зависимости можно получить из зависимостей, приведенных в п. 6.7, принимая направляющие косинусы согласно табл. 6.5 и рис. 6.17. Однако при выводе этих формул принималось равенство $E_{qn} = E_{qnl}$ (нормальный модуль связей зацепления принимался равным модулю сдвига этих связей).

Таблица 6.5

	n	m	l
x	$n_x = \sin \alpha$	$m_x = 0$	$l_x = -\cos \alpha$
y	$n_y = \cos \alpha$	$m_y = 0$	$l_y = \sin \alpha$
z	$n_z = 0$	$m_z = 1$	$l_z = 0$

Представим вывод без введения указанного выше допущения. Исходные уравнения равновесия (6.117) применительно к плоскому напряженному состоянию (принято, что все компоненты за исключением компонент $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ равны нулю) приводятся к виду:

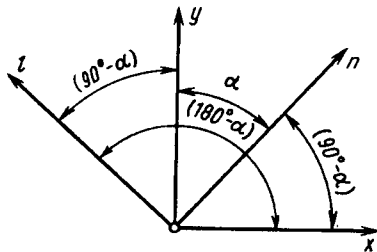


Рис. 6.17. К определению направляющих косинусов (табл. 6.5)

$$\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{ctg} \alpha = \sigma_n - \tau_{nl} \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= \sigma_{sx} \mu_{sx} + \tau_{syx} \mu_{sy} \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_q - \tau_{qnl} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sigma_y + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha = \sigma_n + \tau_{nl} \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \sigma_{sy} \mu_{sy} + \tau_{sxy} \mu_{sx} \operatorname{tg} \alpha + \sigma_q + \tau_{qnl} \operatorname{tg} \alpha.$$

Эти уравнения можно получить, проецируя силы, приложенные к треугольной призме, наклонная грань которой проходит по трещине (рис. 6.18) на оси x, y . Два уравнения (6.195) содержат шесть неизвестных: $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{syx}, \tau_{sxy}, \sigma_q, \tau_{qnl}$. Для их определения привлекаются четыре дополнительных уравнения. Это два условия совместности перемещений стержней в трещине

$$u_{sx} = v_{sy}, \quad u_{sy} = v_{sx}, \quad (6.196)$$

в которые преобразуются более общие условия совместности (6.118), где u_i — осевые, v_i — тангенциальные перемещения стержней ($i = x, y$).

Значения u_{si}, v_{si} определяются соотношениями (6.26), (6.35). Пренебрегая в этих соотношениях влиянием деформаций бетона $\tilde{\epsilon}_{bi}$, находим

$$u_{sx} = \frac{l_{cr,n} \sigma_{sx} \psi_{sx}}{2 E_{sx} \sin \alpha}; \quad u_{sy} = \frac{l_{cr,n} \sigma_{sy} \psi_{sy}}{2 E_{sy} \cos \alpha}; \quad (6.197)$$

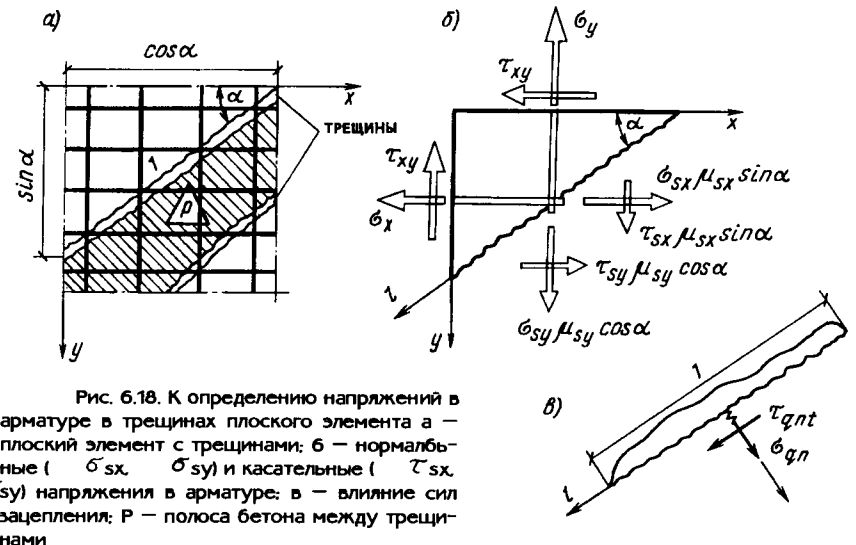


Рис. 6.18. К определению напряжений в арматуре в трещинах плоского элемента а — плоский элемент с трещинами; б — нормальные (σ_{sx}, σ_{sy}) и касательные (τ_{sxy}, τ_{syx}) напряжения в арматуре; в — влияние сил зацепления; П — полоса бетона между трещинами

$$v_{sy} = \frac{l_{cr,n} n_{\tau y} \tau_{syx} \psi_{sy}}{2 E_{sy} \cos \alpha} \quad v_{sx} = \frac{l_{cr,n} n_{\tau x} \psi_{sx} \tau_{sxy}}{2 E_{sx} \sin \alpha} \quad (6.198)$$

Перемещения u_{sx} , u_{sy} согласно (6.119) можно выразить через раскрытие трещин $a_{cr,n}$ и сдвиг берегов трещин Δ_{nl} ,

$$u_{sx} = 0,5(a_{cr,n} \sin \alpha - \Delta_{nl} \cos \alpha), \quad (6.199)$$

$$u_{sy} = 0,5(a_{cr,n} \cos \alpha + \Delta_{nl} \sin \alpha).$$

Внося значения перемещений (6.198) в условия (6.196), находим

$$\frac{\sigma_{sx} \psi_{sx}}{E_{sx} \sin \alpha} = \frac{\tau_{syx} n_{\tau y} \psi_{sy}}{E_{sy} \cos \alpha}; \quad (6.200)$$

$$\frac{\sigma_{sy} \psi_{sy}}{E_{sy} \cos \alpha} = \frac{\tau_{sxy} n_{\tau x} \psi_{sx}}{E_{sx} \sin \alpha}.$$

Формулы (6.124) по определению напряжений зацепления записываются (при $\tilde{\epsilon}_{bi} \approx 0$),

$$\sigma_{qn} = E_{qn} \left(-\frac{\sigma_{sx} \psi_{sx}}{E_{sx}} + \frac{\sigma_{sy} \psi_{sy}}{E_{sy}} \right); \quad (6.201)$$

$$\tau_{qnl} = E_{qnl} \left(-\frac{\sigma_{sy} \psi_{sy}}{E_{sy}} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sigma_{sx} \psi_{sx}}{E_{sx}} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Внося значения τ_{syx} , τ_{sxy} , σ_{qn} , τ_{qnl} из (6.200)–(6.201) в уравнения (6.195), можно записать:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha &= \\ &= \frac{1}{\lambda_x} \sigma_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha + \lambda_4 \sigma_{sy} \mu_{sy} \sin \alpha; \\ \sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha &= \\ &= \frac{1}{\lambda_y} \sigma_{sy} \mu_{sy} \cos \alpha + \lambda_3 \sigma_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (6.202)$$

где введены следующие обозначения отдельных групп величин:

$$\frac{1}{\lambda_x} = 1 + \frac{E_{sy} \psi_{sx} \mu_{sy} \cos^2 \alpha}{E_{sx} \psi_{sy} \mu_{sx} n_{\tau y} \sin^2 \alpha} + \frac{\psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} \times$$

$$\times (E_{qn} + E_{qnl} \operatorname{ctg}^2 \alpha);$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = 1 + \frac{E_{sx} \psi_{sy} \mu_{sx} \sin^2 \alpha}{E_{sy} \psi_{sx} \mu_{sy} n_{\tau x} \cos^2 \alpha}$$

$$+ \frac{\psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} \times (E_{qn} + E_{qnl} \operatorname{tg}^2 \alpha); \quad (6.203)$$

$$\lambda_4 = -\frac{\psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} (E_{qn} - E_{qnl});$$

$$\lambda_3 = -\frac{\psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} (E_{qn} - E_{qnl}),$$

Если принять $\lambda_4 = \lambda_3 \approx 0$, то соотношения (6.202) упрощаются:

$$\begin{aligned} \sigma_{sx} &\approx \frac{\sigma_{sx} + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha}{\mu_{sx}} \lambda_x; \\ \sigma_{sy} &\approx \frac{\sigma_{sy} + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha}{\mu_{sy}} \lambda_y, \end{aligned} \quad (6.204)$$

Формулы (6.204) можно использовать для подбора арматуры. При этом можно принять упрощенные зависимости (6.203), полагая $E_{sy} \psi_{sx} / E_{sx} \psi_{sy} = 1$, $E_{qn} \approx E_{qnl} \approx 0$, $n_{\tau x} = n_{\tau y} \approx n_{\tau}$, в результате

$$\frac{1}{\lambda_x} \approx 1 + \frac{\mu_{sy} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\mu_{sx} n_{\tau}}; \quad \frac{1}{\lambda_y} \approx 1 + \frac{\mu_{sx} \operatorname{tg}^2 \alpha}{\mu_{sy} n_{\tau}}, \quad (6.205)$$

где параметр n_{τ} может изменяться в широких пределах ($n \approx 15 \dots 25$).

В эксплуатационной стадии деформирования элементов с трещинами $n \approx 5 \dots 10$.

Физические соотношения (6.137), (6.146) с учетом рекомендаций табл. 6.5 можно привести к виду:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.206)$$

где элементы матрицы податливости $[c]_x$ равны:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\lambda_x \psi_{sx}}{\mu_{sx} E_{sx} \chi_x} + \frac{(1 - \lambda_x \psi_{sx}) \cos^2 \alpha}{E_p \chi_x}; \quad c_{12} = 0; \\ c_{13} &= \frac{\lambda_x \psi_{sx} \operatorname{ctg} \alpha}{\mu_{sx} \chi_x E_{sx}} - \frac{(1 - \lambda_y \psi_{sx}) \sin 2\alpha}{2 E_p \chi}; \\ c_{22} &= \frac{\lambda_y \psi_{sy}}{\mu_{sy} E_{sy} \chi_y} + \frac{(1 - \lambda_y \psi_{sx}) \sin^2 \alpha}{E_p \chi_y}; \\ c_{23} &= \frac{\lambda_y \psi_{sy} \operatorname{tg} \alpha}{\mu_{sy} \chi_y E_{sy}} - \frac{(1 - \lambda_y \psi_{sy}) \sin 2\alpha}{2 E_p \chi_y}; \\ c_{33} &= \frac{\lambda_x \psi_{sx} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\chi_x \mu_{sx} E_{sx}} + \frac{1}{E_p \chi_x} [1 + \lambda_x \psi_{sx} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \\ &- (1 - \lambda_x \psi_{sx}) \cos^2 \alpha] + \frac{\lambda_y \psi_{sy} \operatorname{tg}^2 \alpha}{\chi_y \mu_{sy} E_{sy}} + \\ &+ \frac{1}{E_p \chi_y} [1 + \lambda_y \psi_{sy} \operatorname{tg}^2 \alpha - (1 - \lambda_y \psi_{sy}) \sin^2 \alpha]; \end{aligned} \quad (6.207)$$

здесь

$$\chi_x = 1 + \frac{E_{sx}}{E_p} (1 - \lambda_x \psi_{sx}) \mu_{sx} \cos^2 \alpha;$$

$$\chi_y = 1 + \frac{E_{sy}}{E_p} (1 - \lambda_y \psi_{sy}) \mu_{sy} \sin^2 \alpha;$$

Элементы (6.206) относятся к схеме непересекающихся трещин. Элементы матрицы податливости в соотношениях (6.206) для схем пересекающихся трещин приближенно следуют из элементов податливости (6.207) на основании следующих преобразований [139]: слагаемые, содержащие множители $1/E_p$, принимаются равными нулю; параметры λ_x , λ_y принимаются равными единице; элементы c_{11} и c_{12} вычисляются дважды: при α и при замене α на $90^\circ + \alpha$ и из двух значений принимаются большие; элементы c_{13} , c_{23} , c_{33} определяются дважды: при α и при замене α на $90^\circ + \alpha$ и в расчет вводится алгебраическая сумма каждых двух величин.

Более точными для схемы 2 трещин являются соотношения (6.178); для схемы 1 трещин соотношения (6.207) и (6.178) являются эквивалентными, хотя при вычислении элементов (6.207) следует учитывать некоторые особенности (они указаны ниже), в то время как формулы (6.178), (6.179) в этом плане универсальны.

Особенности в вычислении элементов (6.207) возникают, если одна или несколько величин из ряда μ_{sx} , μ_{sy} , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ становятся равными нулю. В этом случае прежде чем вычислять элементы (6.207), необходимо раскрыть неопределенности, перемножив входящие в элементы величины. Например, при $\mu_{sx} = 0$ сначала рассматривается группа величин $\mu_{sx} E_{sx} / \psi_{sx} \lambda_x$. Внося сюда значение λ_x из (6.195), находим

$$\frac{\mu_{sx} E_{sx}}{\psi_{sx} \lambda_x} = \frac{\mu_{sx} E_{sx}}{\psi_{sx} \lambda_x} + \frac{E_{sy} \mu_{sy} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\psi_{sy} n_{Ty}} +$$

$$+ E_q + E_{qnl} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Таким образом при $\mu_{sx} = 0$

$$\frac{\mu_{sx} E_{sx}}{\psi_{sx} \lambda_x} = \frac{\mu_{sy} E_{sy} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\psi_{sy} n_{Ty}} + E_q + E_{qnl} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Рассмотрим еще один частный случай. Так, при $\alpha = 0$ имеем: $\operatorname{ctg} \alpha = \infty$; $\lambda_x = 0$. Перемножая величины $\lambda_x \operatorname{ctg} \alpha$ и затем полагая $\alpha = 0$, находим, что неопределенность $\lambda_x \operatorname{ctg} \alpha = 0$. ∞ раскрывается как $\lambda_x \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Аналогичным образом следует поступать и в других случаях.

6.11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ. ВХОДЯЩИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

В элементы матриц податливости, представленные в пп. 4.30—4.33, входят параметры ψ_{sx} , ψ_{sy} , E_{qn} , E_{qnl} , E_p , n_i , которые были установлены на основании экспериментов Н.И. Карпенко,

А.Ф. Яременко, И.Е. Прокоповича, Л.М. Григорьянц, Н.А. Гусейнова, Е.У. Енькова, А.Я. Мельникова и др. [53, 43, 47, 61, 73, 119, 167—169] на плоских образцах с фиксированными трещинами и косым расположением арматуры к направлениям трещин (рис. 6.19). Параметры представляются функциями относительных деформаций или напряжений, что позволяет строить два алгоритма формирования матрицы жесткости или податливости — через напряжения или деформации.

Коэффициенты нагельного эффекта рекомендуется вычислять по формуле

$$n_{Ti} = 0,75 E_{si}^0 \eta / E_b^0, \quad (6.208)$$

где η — уровень напряжений

$$1 \leq \eta = \sigma_n / \sigma_{n,cr},$$

здесь $\sigma_{n,cr}$ — напряжение σ_n в момент образования трещины.

Модуль деформации бетонных связей зацепления вдоль нормали к трещинам E_{qn} и модуль сдвига E_{qnl} (или G_{qnl}) рекомендуется вычисляться по формулам:

$$E_{qn} \approx \frac{0,5 E_b^0}{\eta_d^2 + 1}; \quad G_{qnl} \approx \frac{0,5 E_b^0}{\eta_d^{1,5} + 1}, \quad (6.209)$$

где η_d — уровень относительных деформаций,

$$1 \leq \eta_d = \varepsilon_n / \varepsilon_{n,cr}$$

здесь ε_n — относительные деформации элемента вдоль нормали к трещинам; $\varepsilon_{n,cr}$ — аналогичные деформации элемента вдоль нормали к трещинам в момент образования трещин в бетоне (допускается принимать $\varepsilon_{n,cr} \approx 10^{-4}$).

Коэффициенты ψ_{si} ($i = x, y$) в упругой стадии деформирования арматуры вычисляются по одной из формул:

$$0,25 \leq \psi_{si} = 1 - 0,75 \varphi_{1s} \varphi_{ps} \frac{R_{bt} \lambda_1}{\sigma_{si} \mu_{si}} \quad (6.210)$$

$$0,25 \leq \psi_{si} \approx \left[1 + 0,75 \varphi_{1s} \varphi_{ps} \frac{R_{bt} \lambda_1}{E_{si} \varepsilon_i} \right]^{-1}.$$

где φ_{1s} — коэффициент, определяемый по табл. 36 СНиП 2.03.01—84 в зависимости от профиля арматуры и длительности действия нагрузки; R_{bt} — прочность бетона на растяжение (средняя, нормативная или расчетная — в зависимости от вида расчетов); n_i ($i = x, y$) — принимается по табл. 6.5; ε_i — относительные деформации вдоль осей $i = x, y$; σ_{si} — напряжения в арматуре в трещинах, определяемые по формулам (6.202) или (6.204); $\lambda_1 = \max\{\lambda_x, \lambda_y\}$ равна максимальной из двух величин (λ_x, λ_y), определяемых в момент трещинообразования; допускается прини-

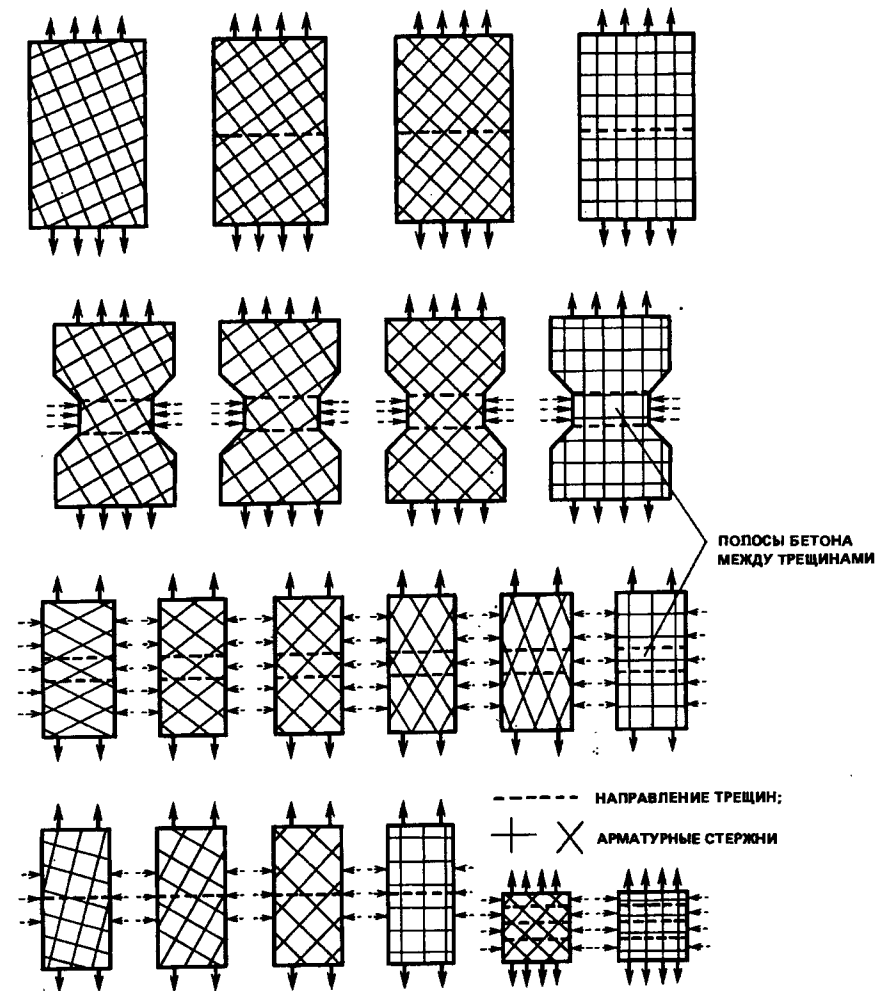


Рис. 6.19. Опытные образцы и их армирование по изучению: напряжений и деформаций в трещинах, средних между трещинами, а также деформаций и прочности полос бетона вдоль трещин

мать $\max\{\lambda_x, \lambda_y\}$ в текущий момент, если это упрощает расчетный алгоритм; φ_{ps} — коэффициент, учитывающий влияние сжимающих напряжений в полосах бетона между трещинами на сцепление арматуры с бетоном [168],

$$\varphi_{ps} = 1 + 1,2 \eta - 2,4 \eta^2,$$

здесь

$$0,8 \geq \eta = \left| \frac{\sigma_i}{R_b} \right| \quad \text{или} \quad 0,8 \geq \eta = \left| \frac{\varepsilon_i}{200 \cdot 10^{-5}} \right|$$

(σ_l, ϵ_l — напряжения и относительные деформации вдоль оси l , определяемые по формулам (6.178), R_b — призмная прочность бетона на сжатие (принимается по аналогии с R_{bt}).

Остановимся еще на определении модуля деформации полос бетона между трещинами E_p . Если полосы бетона являются сжатыми, то

$$E_p = E_b^0 \nu_p, \quad (6.211)$$

где ν_p — коэффициент изменения секущего модуля деформации бетона вдоль трещин. Этот коэффициент определяется на основании модифицированной диаграммы деформирования бетона, представляемой формулами (3.1) — (3.13).

В этих формулах ν_b заменяется на ν_p и $\hat{\epsilon}_b$ на $\hat{\epsilon}_p$, где $\hat{\epsilon}_p$ — значение ν_p в вершине диаграммы. Кроме того, изменяются формулы по определению уровней напряжений η и уровней деформаций χ_a . Рассмотрим эти зависимости.

Вначале определяется прочность полос бетона между трещинами R_p . Величина R_p ввиду поврежденности структуры бетона макротрещинами (вблизи берегов трещин) и внутренними микротрещинами становится меньше начальной прочности R_b . Как показано в [73, 139], проявление этого фактора зависит от ширины раскрытия трещин. Косвенно влияние этого фактора можно выразить через относительные деформации элемента ϵ_n по нормали к трещинам. Согласно [73]

$$R_p = \frac{R_b}{220 \omega_n \epsilon_n + 0,9} = R_b \gamma_{bp}, \quad (6.212)$$

где ω_n — коэффициент влияния толщины элемента на степень повреждения полос бетона трещинами,

$$0,7 < \omega_n = 1,3 - h/h_s,$$

здесь h — толщина элемента; $h_s = 10$ см — эталонная толщина.

Относительные деформации $\hat{\epsilon}_p$, соответствующие вершине диаграммы деформирования полос бетона между трещинами согласно [73] равны

$$2,5 \cdot 10^{-3} > \hat{\epsilon}_p = (0,05 + 1,5 \sqrt{(R_p/R_b)^3}) \cdot 2 \cdot 10^{-3}. \quad (6.213)$$

Определив значения R_p и $\hat{\epsilon}_p$, можно перейти к вычислению уровней напряжений и деформаций;

$$\eta = \frac{\sigma_{bl}}{R_p}; \quad \eta_a = \frac{\epsilon_l}{\hat{\epsilon}_p}, \quad (6.214)$$

где напряжения σ_{bl} вычисляются по формуле (6.185), а деформации ϵ_l — по формуле (6.178).

В случае ортотропного армирования формула (6.185) может быть преобразована к виду (если приближенно принять $\chi_x \chi_y \approx 1$):

$$\sigma_{bl} \approx \sigma_x (1 - \lambda_x \psi_{sx}) \cos^2 \alpha + \sigma_y (1 - \lambda_y \psi_{sy}) \sin^2 \alpha - \tau_{xy} (2 + \lambda_x \psi_{sx} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \lambda_y \psi_{sy} \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (6.215)$$

Коэффициент ν_p в вершине диаграммы составляет

$$\hat{\nu}_p = \frac{R_p}{E_b^0 \hat{\epsilon}_p}. \quad (6.216)$$

Представленными выше формулами описывается случай; когда полосы бетона являются сжатыми ($\sigma_{bl} < 0$; $\epsilon_l < 0$). Если полосы бетона подвергаются растяжению, которое еще не приводит к образованию трещин, тогда используется диаграмма, соответствующая одноосному растяжению. Эта диаграмма описывается формулами (3.1), (3.2), (3.13). При этом прочность бетона R_{bt} умножается на коэффициент уменьшения 0,9, а уровень напряжений $\eta \approx \sigma_{bl}/0,9R_{bt}$.

Формулы (6.210), учитывающие влияние сцепления арматуры с бетоном на деформации арматуры, находящейся в бетонном элементе с трещинами, справедливы только в линейной стадии деформирования. Диаграммы деформирования реальной арматуры (см. гл. 5) имеют как линейный, так и существенно нелинейный отрезки. Для элементов с трещинами, следуя [70, 74], можно ввести среднюю диаграмму, связывающую напряжения в арматуре в трещинах σ_{si} с осевыми деформациями, которые обозначим ϵ_{smi} .

При использовании средней диаграммы формально во всех формулах, представленных выше, значения E_{si}^0/ψ_{si} заменяются на значения E_{smi} — средние модули деформации

$$E_{smi} = E_{si}^0 \nu_{smi}, \quad (6.217)$$

где ν_{smi} — коэффициенты изменения секущего модуля деформации арматуры (по усредненной диаграмме); E_{si}^0 — модуль упругости арматуры.

Ниже индекс i опустим, рассмотрев диаграмму для некоторого произвольного арматурного стержня. Средняя диаграмма представляется в виде

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_{sm}} = \frac{\sigma_s}{E_s^0 \nu_{sm}}. \quad (6.218)$$

Средняя диаграмма так же, как и реальная диаграмма свободной (вне бетона) арматуры имеет два участка. На первом — линейном участке

$$\nu_{sm} = 1/\psi_s,$$

где коэффициент ψ_s вычисляется по формулам (6.210) или по представленным новым формулам, которые были установлены в [74].

Эти формулы представляются более удобными в использовании. Согласно этим формулам коэффициент ψ_s может вычисляться в функции от напряжений в арматуре σ_s

$$\psi_s = 1 - \left(\frac{1}{\psi_{s,cr}} - 1 \right)^{-1} \varphi_{1s} \frac{\epsilon_{sm,cr} E_s^0}{\sigma_s} \quad (6.219)$$

или средних деформаций ϵ_{sm} (они равны деформациям элемента по соответствующему направлению арматуры)

$$\psi_s = \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{sm} + \left(\frac{1}{\psi_{s,cr}} - 1 \right) \varphi_{1s} \epsilon_{sm,cr}} \quad (6.220)$$

φ_{1s} — коэффициент, определяемый по табл. 36 СНиП 2.03.01—84; $\psi_{s,cr} \approx 0,45$ — значение коэффициента ψ_s в момент образования трещин; $\epsilon_{sm,cr}$ — средние деформации арматуры на участке между трещинами, вычисляемые при $\psi_s = \psi_{s,cr}$.

Концу первого участка соответствуют деформации

$$\epsilon_{sm,el} = \sigma_{s,el} \psi_{s,el} / E_s^0, \quad (6.221)$$

где $\psi_{s,el}$ — коэффициент ψ_s при $\sigma_s = \sigma_{s,el}$ (при напряжениях, соответствующих пределу упругости).

Формально первый участок средней диаграммы может быть представлен зависимостями (5.6) — (5.8), если принять

$$\nu_0 = 1 / \psi_s.$$

Второй участок (при $\sigma_s > \sigma_{s,el}$ или $\epsilon_{sm} > \epsilon_{sm,el}$). На этом участке коэффициент изменения секущего модуля средней диаграммы ψ_{sm} определяется в зависимости от вида арматуры. Для арматуры без физической площадки текучести и на первой нелинейной части диаграммы арматуры с физической площадкой текучести параметры ψ_{sm} вычисляются по формулам (5.6) — (5.10), заменяя в них

$$\begin{aligned} \nu_0 \text{ на } \hat{\nu}_{0m}; \quad \nu_s \text{ на } \hat{\nu}_{sm}; \quad \nu_{0,2} \text{ на } \nu_{0,2m}; \\ \epsilon_{0,2} \text{ на } \epsilon_{0,2m}; \quad \hat{\nu}_s \text{ на } \hat{\nu}_{sm}; \quad \eta_d \text{ на } \eta_{dm}; \\ \hat{\epsilon}_s \text{ на } \hat{\epsilon}_{sm}, \end{aligned}$$

где дополнительный нижний индекс m указывает на характеристики средней диаграммы, и полагая

$$\begin{aligned} \nu_{0m} = \frac{1}{\psi_{s,el}}; \quad \nu_{0,2m} = \frac{2 \nu_{0,2}}{1 + \nu_{0,2}}; \quad \nu_{sm} = \frac{2 \hat{\nu}_s}{1 + \hat{\nu}_s}; \\ \epsilon_{0,2m} = \frac{R_{s,ser}}{E_s \nu_{0,2m}}; \quad \hat{\epsilon}_{sm} = \frac{\hat{\epsilon}_s \hat{\nu}_s}{\hat{\nu}_{sm}}; \quad \eta_{dm} = \frac{\epsilon_{sm}}{\hat{\epsilon}_{sm}}. \end{aligned}$$

Второй участок средней диаграммы арматуры с физической площадкой текучести, так же как и второй участок диаграммы свободной арматуры, описывается формулами (5.10) — (5.18), в которых следует дополнительно заменить

$\nu_{s(k)}$ на $\nu_{s(k)m}$, ϵ_{su} на ϵ_{sum} , $\hat{\nu}_{su}$ на $\hat{\nu}_{sum}$, полагая

$$\nu_{0m} = \frac{2,5 \hat{\nu}_s}{(1 + 1,5 \hat{\nu}_s)}; \quad \nu_{s(k)m} = \frac{2,5 \nu_{s(k)}}{(1 + 1,5 \nu_{s(k)})};$$

$$\hat{\nu}_{sum} = 1,1 \hat{\nu}_{su}; \quad \epsilon_{sum} = 0,9 \epsilon_{su}; \quad \eta_{dm} = \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{sum}}.$$

Единообразную запись диаграмм деформирования свободной арматуры и арматуры в бетоне с трещинами используют для составления компактных алгоритмов расчета.

6.12. ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММ НАГРУЖЕНИЯ

Сложные режимы нагружения элементов с трещинами рассматриваются на основе представления физических соотношений в конечных приращениях. Сами физические соотношения при этом не изменяются, изменяются лишь параметры, входящие в коэффициенты физических соотношений. В первую очередь, это относится к диаграммам деформирования бетона по нормали к трещинам, которые до зажатия берегов трещины выступают как диаграммы деформирования связей зацепления, и средних деформаций арматурных стержней на участках между трещинами. При этом опустим индексы, указывающие на направление деформаций, полагая, что в бетоне их направление совпадает с направлением нормали к наклонным трещинам, а в арматуре, естественно, с направлением тех или иных арматурных стержней. В общем случае неодноосного напряжения рассмотренные деформации относятся к диагональным деформациям (см. пп. 3.5, 3.7).

Деформации бетона. Распространенный режим нагружения бетонного волокна, особенно при знакопеременном нагружении конструкции, представляется в виде растяжения с образованием и раскрытием трещин, а затем разгрузки растяжения с последующим сжатием. Рассмотрим аналитическое описание диаграммы деформирования бетона в таком режиме, следуя [75]. В случае если в волокне ранее не образовывались трещины, то участок растяжения на диаграмме (участок 0—1 на рис. 6.20) отличен от нуля и продолжается вплоть до предельной деформации растяжения $\bar{\epsilon}_{bt}$, при которой образуются

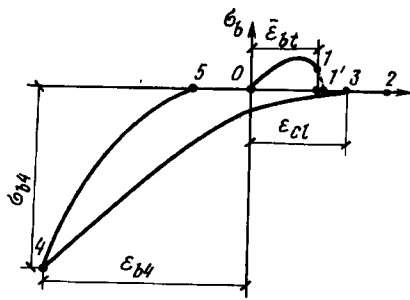


Рис. 6.20. Диаграмма сжатия бетона по нормали к трещинам после их образования вследствие растяжения

макротрещины. Значение $\bar{\epsilon}_{bt}$ определяется с учетом влияния градиента деформаций по формуле

$$\bar{\epsilon}_{bt} = \epsilon_{b0} + \bar{\epsilon}_{\Delta bt}, \quad (6.222)$$

где ϵ_{b0} — деформация, при которой напряжения в волокне были равны нулю; $\bar{\epsilon}_{\Delta bt}$ — вычисляется по формуле (3.16) или (3.17), в которых ϵ_{Rt} заменяется на $\epsilon_{\Delta bt}$, определяемое с учетом предшествующего нагружения по формулам (3.47); в случае если ранее в волокне уже образовывались трещины, диаграмма растяжения отсутствует и принимается $\bar{\epsilon}_{\Delta bt} = 0$.

При дальнейшем увеличении деформации волокна напряжение растянутого бетона в сечении с трещиной $\sigma_{bt} = 0$, но трещины раскрываются (участок 1—2 на рис. 6.20). На участке нагрузки (участок 2—3) происходит закрытие трещин, однако напряжения в сечении с трещиной остаются равны нулю вплоть до некоторого значения усредненной деформации волокна ϵ_{ct} (точка 3), при котором берега трещины начинают соприкасаться. При $\epsilon_b < \epsilon_{ct}$ в сечении с трещиной возникают сжимающие напряжения в бетоне. Экспериментальные исследования работы железобетонных балок при одном цикле знакопеременного нагружения показывают, что бетон и волокне с трещиной начинает работать на сжатие при величине относительной деформации, превышающей деформацию образования трещин, т.е. $\epsilon_{ct} > \bar{\epsilon}_{bt}$.

Экспериментальные исследования работы железобетонных призм при малоцикловом знакопеременном нагружении, проведенные Н.И. Карпенко и А.М. Кокаревым [75], позволили определить значения ϵ_{ct} на разных циклах (на первом цикле они составили $30 \cdot 10^{-5}$, а на втором и последующих — $15 \cdot 10^{-5}$). М.А. Сапожников, анализируя балочные элементы, пришел к выводу, что связь между ϵ_{ct} и $\bar{\epsilon}_{bt}$ для любого цикла практически одинакова и может быть выражена в виде $\epsilon_{ct} = \bar{\epsilon}_{bt} + 10^{-4}$. Однако, видимо, правильнее принимать эту величину переменной.

Деформации бетона на участке сжатия, следующего за растяжением (участок 3—4 на рис. 6.20), складывается из двух деформаций: $\Delta \epsilon_{ct}$ — усредненных на участке между трещинами деформаций от

зажатия берегов трещины и $\Delta \epsilon_b$ — деформаций блоков бетона между трещинами. На основании этого по аналогии с (3.12) можно записать

$$\epsilon_{\Delta b} = \Delta \epsilon_{ct} + \Delta \epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0} \left(\frac{1}{\nu_{ct}} + \frac{1}{\nu_b} \right), \quad (6.223)$$

где ν_{ct}, ν_b — коэффициенты изменения секущего модуля деформаций бетона соответственно вследствие зажатия берегов трещины и сжатия блоков между трещинами.

Анализ указанных выше экспериментов на призмах показал, что

$$\nu_{ct} \approx \frac{(\epsilon_{\Delta b})^2}{a} + b, \quad (6.224)$$

где a, b — эмпирические коэффициенты (для первого цикла нагружения $a \approx 0,966 \cdot 10^6$; для второго и последующих $a \approx 0,257 \cdot 10^6$; $b = 0,07$ для всех циклов).

Заметим, что при использовании зависимости (6.224) необходимо несколько корректировать точки отсчета $\epsilon_{\Delta b}$, принимая: на первом цикле $\epsilon_{ct} = 31,5 \cdot 10^{-5}$, на втором $12,5 \cdot 10^{-5}$, на третьем $8,5 \cdot 10^{-5}$, на четвертом $5,5 \cdot 10^{-5}$, на пятом и последующих циклах $2,5 \cdot 10^{-5}$. Эта корректировка приводит к лучшему согласованию теоретических и опытных диаграмм.

Деформации зажатия $\Delta \epsilon_{ct}$ в процессе расчетов могут вычисляться для всех циклов по формуле

$$\Delta \epsilon_{ct} = \frac{\epsilon_{\Delta b}}{0,709 + 1513 \epsilon_{\Delta b}}, \quad (6.225)$$

которая также хорошо согласовывается с данными опытов. Деформации бетона при этом составят

$$\Delta \epsilon_b = \epsilon_{\Delta b} - \Delta \epsilon_{ct}. \quad (6.226)$$

Связь между деформациями $\Delta \epsilon_b$ и напряжениями σ_b осуществляется по формулам (3.1) — (3.11), заменяя ϵ_b на $\Delta \epsilon_b$. Коэффициент ν_b вычисляется по формуле (3.2) или (3.11) соответственно через уровни деформаций или уровни напряжений. Заметим, что и параметр ν_{ct} можно определить через уровни напряжений η

$$\nu_{ct} = c + e \eta, \quad (6.227)$$

где c, e — эмпирические коэффициенты (для первого цикла нагружения $c = 0,04$, $e = 2,6$, для второго и последующих циклов $c = 0,1$, $e = 4,9$).

Если до начала цикла растяжение — сжатие бетон предварительно подвергался сжатию до величины $|\sigma_b^0|$, то, по данным исследования М.А. Сапожникова, в формуле (6.224) коэффициенты a и b следует принимать

$$a = a_1 = (1 - 2,5 \frac{|\sigma_b^0|}{R_b}) 10^{-6} \geq a_2; \quad (6.228)$$

$$a = a_2 = 0,25 \cdot 10^{-6}; \quad b \leq 0,1$$

где a_1 — значение коэффициента a на первом цикле нагружения; a_2 — на втором и последующих циклах.

Для участка разгрузки сжатия (отрезка 4—5 на рис. 6.20) связь между приращениями напряжений $\sigma_{\Delta m}$ и деформаций $\epsilon_{\Delta m}$ осуществлялась по формулам (3.44) — (3.46). Возможно, здесь потребуется еще уточнить значение параметра $\hat{\nu}_{\Delta m}$.

Диаграммы деформирования арматуры на приращениях. По аналогии с бетоном связь между приращениями напряжений арматуры $\sigma_{\Delta s}$ и приращениями деформаций $\epsilon_{\Delta m}$ записываются в виде

$$\sigma_{\Delta s} = E_{\Delta m} \nu_{\Delta m} \epsilon_{\Delta m} \quad (m = s, sm), \quad (6.229)$$

где, если $m = s$, то рассматриваются деформации свободной (вне бетона) арматуры или деформации ее в трещинах, а если $m = sm$, то рассматриваются средние деформации арматуры на участках между трещинами.

Приращения деформаций и напряжений могут отсчитываться от любой точки на диаграмме, однако в практических расчетах эти точки выбираются исходя из некоторого физического смысла или упрощений расчетных алгоритмов. Коэффициенты $\nu_{\Delta m}$ изменения секущих модулей на приращениях определяются по формулам (5.8) или (5.15) в зависимости от уровня приращений напряжений или относительных деформаций с заменой в этих формулах

$$\nu_0 \text{ на } \nu_{\Delta 0}; \quad \hat{\nu}_s \text{ на } \hat{\nu}_{\Delta m};$$

$$\eta \text{ на } \eta_{\Delta}; \quad \eta_d \text{ на } \eta_{\Delta d},$$

где $\nu_{\Delta 0}$ — коэффициент изменения секущего модуля в начале отрезка диаграммы; $\hat{\nu}_{\Delta m}$ — коэффициент изменения секущего модуля в конце отрезка диаграммы

$$\hat{\nu}_{\Delta m} = \frac{\hat{\sigma}_{\Delta m}}{E_{\Delta m} \hat{\epsilon}_{\Delta m}}; \quad (6.230)$$

$\eta_{\Delta}, \eta_{\Delta d}$ — уровни приращений напряжений и относительных деформаций

$$\eta_{\Delta} = \frac{\sigma_{\Delta m}}{\hat{\sigma}_{\Delta m}}; \quad \eta_{\Delta d} = \frac{\epsilon_{\Delta m}}{\hat{\epsilon}_{\Delta m}}; \quad (6.231)$$

$\hat{\sigma}_{\Delta m}$ — приращение напряжений для конца выделяемого отрезка диаграммы; $\hat{\epsilon}_{\Delta m}$ — приращение относительных деформаций для конца выделяемого отрезка диаграммы.

Существенным вопросом при определении коэффициентов физических соотношений в приращениях является установление зависимостей для описания связи между напряжениями арматуры в трещине σ_s и усредненными на участке между трещинами деформациями ϵ_{sm} (усредненной диаграммы арматуры) на ветвях разгрузки и повторного нагружения.

Отличие ветви разгрузки усредненной диаграммы деформирования арматуры от соответствующего отрезка диаграммы свободной арматуры (разгрузка свободной арматуры происходит по линейному закону) обусловлено неравномерностью деформирования арматуры на участке с трещинами. В связи с этим ветвь разгрузки (отрезок 1—2—3 на рис. 3.9) можно описать зависимостью (3.25), принимая

$$\nu_{\Delta sm} = 1 / \psi_{\Delta s}, \quad (6.232)$$

где $\psi_{\Delta s}$ — коэффициент, учитывающий неравномерность деформирования арматуры на участке с трещинами и работу растянутого бетона между трещинами в терминах приращений

$$\psi_{\Delta s} = \Delta \epsilon_{sm} / \Delta \epsilon_s, \quad (6.233)$$

где $\Delta \epsilon_{sm}, \Delta \epsilon_s$ — соответственно приращения деформаций арматуры, усредненных на участке между трещинами и непосредственно в сечении с трещиной.

Параметр $\psi_{\Delta s}$ исследовался группой исследователей (А.М. Кокаревым, Т.А. Мухамедиевым, М.А. Сапожниковым) под руководством Н.И. Карпенко. Проводились специальные экспериментальные исследования на призмах, а также численное моделирование опытов на балках.

В результате анализа результатов численного моделирования удалось выявить общую закономерность изменения значения $\psi_{\Delta s}$ на участке разгрузки растяжения усредненной диаграммы деформирования арматуры, описываемой для любого цикла нагружения в виде

$$\psi_{\Delta s} = \frac{\sqrt{|\epsilon_{\Delta sm}|}}{\sqrt{|\epsilon_{\Delta sm}|} + \sqrt{\left(\frac{1}{\psi_{s, crc}} - 1\right) \epsilon_{sm, crc}}} \quad (6.234)$$

где $\epsilon_{sm, crc}$ — приращение средних деформаций арматуры в момент образования трещин, принимается равным предельной растяжимости бетона, определяемой так же, как в формуле (6.222); в случае если $\bar{\epsilon}_{bt} = 0$, то в качестве $\epsilon_{sm, crc}$ принимается последнее, отличное от нуля значение $\bar{\epsilon}_{bt}$ в процессе нагружения (начиная с значения $\bar{\epsilon}_{bt}$, определяемого по формулам (3.16), (3.17)); $\epsilon_{\Delta sm}$ — отсчитывается от точки начала разгрузки (точка 1 на рис. 6.21); $\psi_{s, crc}$ — значение коэффициента ψ_s в момент образования трещин; $\psi_{s, crc}$ может изменяться от 0,35 до 0,45 в зависимости от характеристик бетона и арматуры, процента продольного

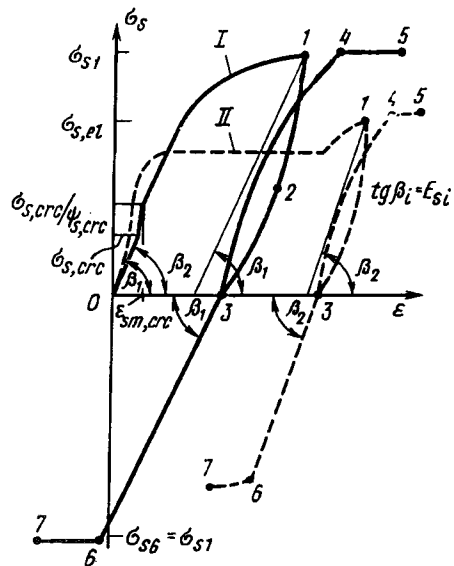


Рис. 6.21. К описанию средней диаграммы деформирования арматуры без физической (I) и с физической (II) площадками текучести при режимном нагружении

армирования, условий работы конструкции и других факторов; в практических расчетах допускается принимать $\psi_{s,crc} = 0,4$.

Учитывая (6.233) и то, что разгрузка свободной арматуры происходит по линейному закону (т.е. $\sigma_{\Delta s} = E_s^0 \epsilon_{\Delta s}$), можно на основании (6.234) выразить значение $\psi_{\Delta s}$ через приращения напряжений в трещине:

$$\psi_{\Delta s} = \frac{\sqrt{\delta^2 + 4} - \delta}{4}; \quad (6.235)$$

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{1}{\psi_{s,crc}} - 1\right) c \epsilon_{sm,crc} \frac{E_s^0}{\sigma_{\Delta s}}}$$

В формулах (6.234), (6.235) коэффициент c по данным численного моделирования принимает значения от 0,9 до 1,5. В практических расчетах железобетонных конструкций допускается полагать $c = 1$.

На участке повторного нагружения (участок 3-4, рис. 6.21) усредненная диаграмма записывается зависимостью (6.229), в которой

$$\nu_{\Delta sm} = \delta_{\psi} / \psi_{\Delta s}, \quad (6.236)$$

где $\psi_{\Delta s}$ — вычисляется по формуле (6.234) или (6.235), в которых $\epsilon_{\Delta sm}$ и $\sigma_{\Delta s}$ отсчитываются от деформаций и напряжений, соответствующих точке начала повторного нагружения (точке 3 на рис. 6.21); δ_{ψ} — поправочный коэффициент,

устанавливаемый так, чтобы участок повторного нагружения (участок 3-4 на рис. 6.21), заканчивался в точке 4, выбранной из условий:

$$\sigma_{s4} = \sigma_{s1}; \quad \epsilon_{sm4} - \epsilon_{sm1} \approx 0,05 (\epsilon_{sm1} - \epsilon_{sm3}) \quad (6.237)$$

Учитывая условия (6.237), коэффициент δ_{ψ} может быть определен по формуле

$$\delta_{\psi} = \frac{(\sigma_{s1} - \sigma_{s3}) \psi_{\Delta s}^{3-4}}{1,05 E_s (\epsilon_{sm1} - \epsilon_{sm3})}, \quad (6.238)$$

где $\psi_{\Delta s}^{3-4}$ вычисляется по формуле (6.234) при $\epsilon_{\Delta sm} = 1,05(\epsilon_{sm1} - \epsilon_{sm3})$.

При деформациях, превышающих ϵ_{sm4} на участке повторного нагружения (участок 4-5 на рис. 6.21), деформирование происходит по кривой, описываемой зависимостями для исходной усредненной диаграммы с учетом условного сдвига ее начала координат вправо по оси деформаций на величину $(\epsilon_{sm4} - \epsilon_{sm1})$.

Участок повторного нагружения в области сжатия (участки 3-6 и 6-7, рис. 6.21) описывается зависимостями для режимной диаграммы свободной арматуры, т.е. до точки 6 ($\sigma_{s6} = -\sigma_{s1}$) диаграмма линейна, а на участке 6-7 совпадает с исходной диаграммой свободной арматуры с учетом сдвига ее начала координат по оси деформаций. Вообще вследствие введенной предпосылки о совместности работы бетона и арматуры при $\sigma_s < 0$ участки усредненной диаграммы в области сжатия совпадают с соответствующими участками диаграммы свободной арматуры, хотя эта предпосылка еще требует уточнения. В случае если после нагружения в области сжатия производится повторное нагружение в области $\sigma_s > 0$, соответствующий участок диаграммы описывается либо зависимостями для исходной усредненной диаграммы деформирования (если в процессе предыдущего нагружения трещины в волокне не образовывались), либо аналогично участку 3-4.

Диаграмма деформирования арматуры в трещинах при нагрузках и разгрузках представлена на рис. 6.22 (она повторяет диаграмму деформирования свободной арматуры). Разгрузка при этом осуществляется по прямым линиям — по линейному закону с начальным модулем упругости арматуры E_s^0 , по линиям 1-3. При повторной нагрузке (линии 3-4), так и при нагружении напряжениями обратного знака (линии 3-6), линейный закон действует до значений напряжений, при которых начиналась разгрузка, затем движение осуществляется по оставшемуся участку начальной криволинейной диаграммы. Таким образом создается возможность выполнять расчеты железобетонных конструкций с трещинами при различных сложных режимных нагружения, хотя, естественно, этот вопрос еще требует проведения дополнительных исследований.

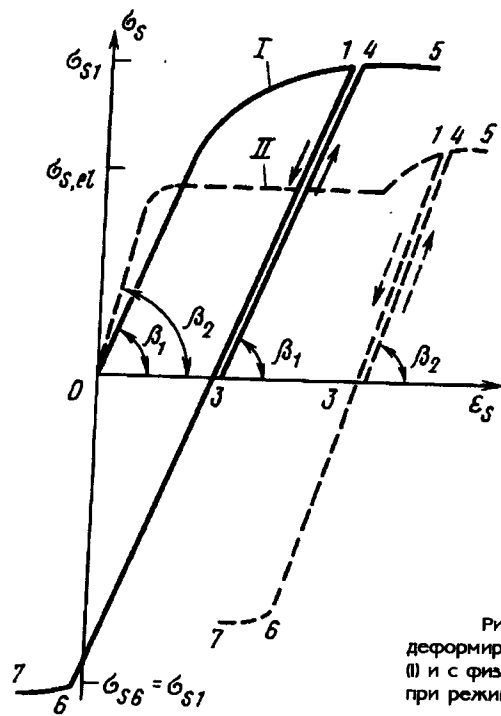


Рис. 6.22. К описанию диаграммы деформирования арматуры без физической (II) и с физической (I) площадками текучести при режимном нагружении

6.13. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ

Методика расчета конструкций типа стен с учетом физической нелинейности. Разрешающие уравнения железобетонных конструкций в форме МКЭ будут нелинейными:

$$[K(g)]\{g\} = \{P\}, \quad (6.239)$$

где $[K(g)]$ — матрица жесткости (МЖ) всей системы; $\{g\}$ — вектор-столбец узловых перемещений; $\{P\}$ — вектор-столбец узловых нагрузок.

Используются, как правило, треугольные и прямоугольные КЭ. Построение МЖ выполняют специальные операторы, которые освобождают от необходимости хранения в памяти всей МЖ и сокращают объем вычисления.

Матрица жесткости $[K(g)]$ формируется на основании физических жесткостей d_{ij} из (6.178), вычисляемых для каждого КЭ. Жесткости d_{ij} , как уже указывалось, зависят от уровня напряженного состояния, количества трещин, их ориентации и других факторов; они принимают различные значения для различных КЭ. Таким образом задача расчета железобетонных конструкций сводится к решению алгебраических уравнений с переменными (нелинейными) коэффициентами.

Решение нелинейной системы ищется в виде некоторой сходящейся последовательности решения линейных задач. Такая идея впервые была применена А.А. Ильюшиным [51] для решения задач теории пластичности и получила название метода упругих решений. В программах реализуются несколько вариантов метода упругих решений: метод переменных параметров упругости; метод начальных напряжений; метод начальных деформаций. При расчете в приращенных используется дискретный метод Ньютона в модификации Рафсона или Кантаровича [52]. Процесс последовательных приближений считается законченным, если его результаты отвечают некоторому критерию сходимости. Основными являются критерии сходимости по напряжениям и перемещениям. В качестве нормы невязки неизвестных выступает октаэдрическая и Евклидова нормы, иногда используется Чебышевская норма (см. п. 7.3).

Указанная выше методика была реализована в виде вычислительного комплекса «Икарус-ЕС» (разработчики Г. Балан, З. Поляк, Н. Карпенко, Л. Ярин) и «Радуга» (разработчики М. Розенберг, Н. Карпенко).

Примеры расчета стен с учетом процесса образования трещин. Представим вначале примеры расчета конструкций, которые были исследованы экспериментально. Рассматривались части стен высоких зданий, возводимых в Москве. Отдельные здания по транспортным и другим соображениям поднимаются над уровнем земли на специальных железобетонных колоннах. На эти колонны укладывается один ряд усиленных балок-стенок, а затем на этих балках-стенках возводится здание из типовых панелей (пластин). На рис. 6.23 представлены результаты расчета такой балки-стенки.

Балка-стенка (БС-1) испытывалась в московском институте НИИМосстрой [21] (рис. 6.23, а — расчетная схема половины балки-стенки, s — армирование; рис. 6.23, б — напряженное состояние). Расчет по предложенной нелинейной модели железобетона с учетом образования трещин хорошо согласовывается с данными экспериментов по различным параметрам: прогибам (рис. 6.23, в; в точке М); схемам образования трещин (рис. 6.23, г); деформациям арматуры по длине балки-стенки (рис. 6.23, д); ширине раскрытия трещин (рис. 6.23, е, 1 — нормальные; 1' — наклонные трещины; 2, 2' — расчетные значения ширине раскрытия трещин). Расчет выполнялся по программе Икарус-ЕС и «Радуга». Заметим, что учет трещинооб-

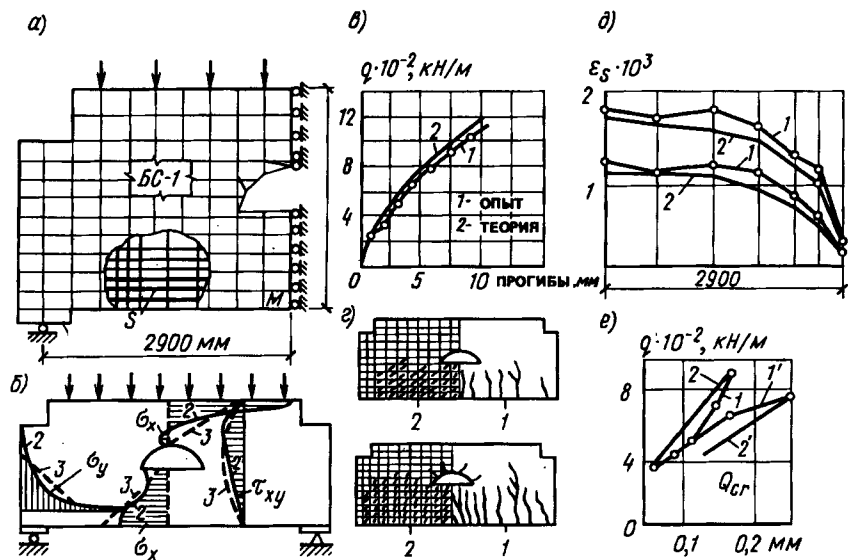


Рис. 6.23. Результаты расчета балки-стенки

разования приводил к уменьшению напряжений в растянутой зоне и, наоборот, к увеличению напряжений сжатия в верхней зоне стенок и в приопорных зонах (рис. 6.23, б, 2 — теория; 3 — расчет в линейной постановке). Касательные напряжения τ_{xy} в зонах с трещинами также снижались и перераспределялись на участки сжатой зоны без трещин. Учет этих факторов позволил предложить более рациональное армирование.

Отдельные панели крупнопанельных зданий не имеют армирования или имеют некоторое слабое армирование.

Встает проблема определения прочности пластин при действии горизонтальных нагрузок. Экспериментальные исследования таких пластин проводились в московском институте ЦНИИЭП жилища (по схеме на рис. 6.24, а: А — пластина; 1 — схема разрушения опытная; 2 — то же, расчетная; 3 — опытные трещины; 4 — расчетные трещины; 5 — нагрузочное устройство). Результаты численных исследований схем разрушения пластин (рис. 6.24, б) соответствовали данным их испытаний (рис. 6.24, б). Установка небольшого армирования в пластине А приводила к более пластичному характеру разрушения. Разрушение происходило в результате среза сжатой зоны за вершиной магистральной трещины. Наклонная магистральная трещина образовывалась в растянутой зоне и распространялась постепенно вдоль всей диагонали панели. С увеличением силы N поперечная сила Q , соответствующая разрушению, повышалась (до

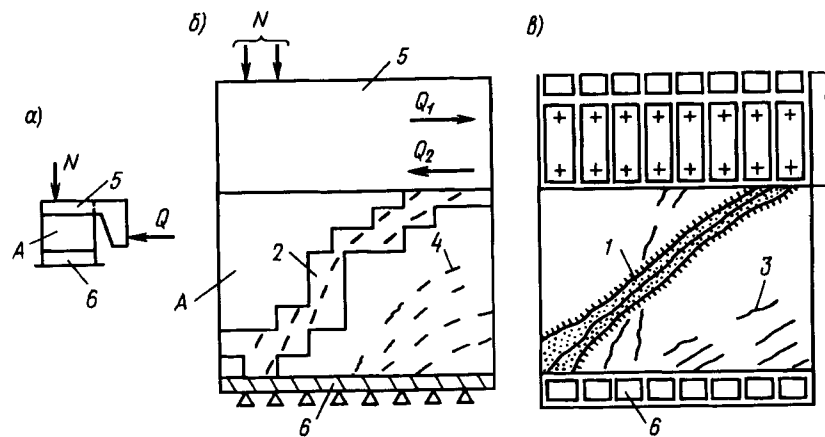


Рис. 6.24. Результаты моделирования схемы разрушения стен на сжатие силой N и сдвиг силой Q

определенного предела). Расчет, выполненный по программе «Радуга», в которой заложена представленная выше теория, подтвердил эти особенности [139, 146].

Укладываемые на балки-стенки (см. рис. 6.23) пластины верхних этажей существенно влияют на их напряжения и деформации. Этот фактор исследовался экспериментальным и теоретическим путями. Эксперименты выполнялись в московском институте НИИМосстрой на моделях многоярусных балок-стенок (рис. 6.25, а — образец состоит из нижней балки-стенки 1, фрагмента перекрытия 2 и верхней пластинки 3; рис. 6.25, б — образец состоит из нижней балки-стенки 1, двух фрагментов перекрытия 4 и двух панелей-пластин 3. Нагружение образцов, как и в рассмотренных выше случаях, производилось поэтапно. Каждый этап составлял 10% расчетной разрушающей нагрузки. Физический эксперимент дублировался расчетом с применением программы «Икарус-ЕС». Получено хорошее согласование теории и опыта по основным факторам: образованию трещин (рис. 6.25, а, б; 4 — опытные трещины; 5 — теоретические), деформациям растянутой арматуры и сжатого бетона, ширине трещин.

Выявлено, что вышележащие панели существенно уменьшают усилия в растянутой арматуре нижней балки-стенки и локализуют зону образования трещин. Что касается перераспределения напряжений вследствие образования трещин, то они в основном происходят в нижней балке-стенке и слабо распространяются на пластины, в которых трещины не образуются (рис. 6.25, в, г; 6 — теоретические эпюры напряжений, вычисленные с учетом трещинообразования; 8 — то же, в линейной постановке без учета трещин). Замечена концентрация напряжений сжатия в приопорных зонах (8 — разрушение

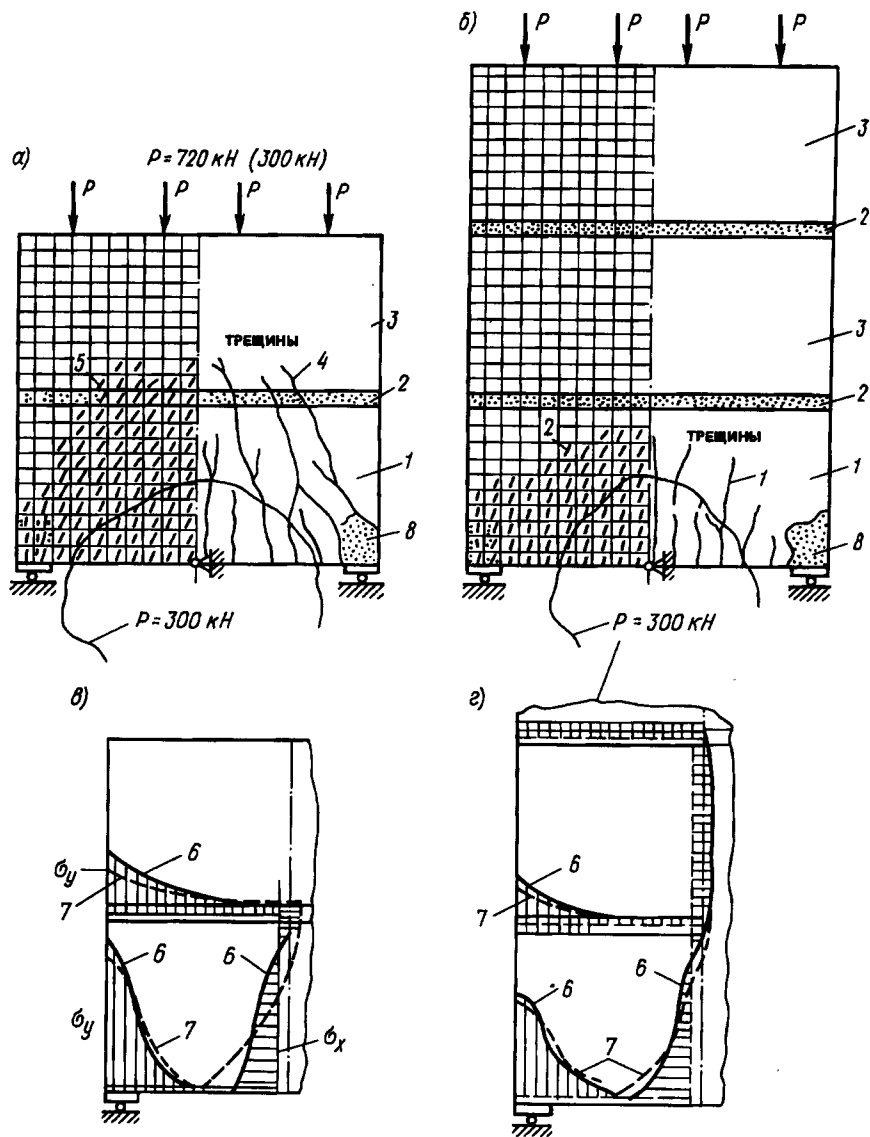


Рис. 6.25. Результаты расчета высоких составных балок-стен

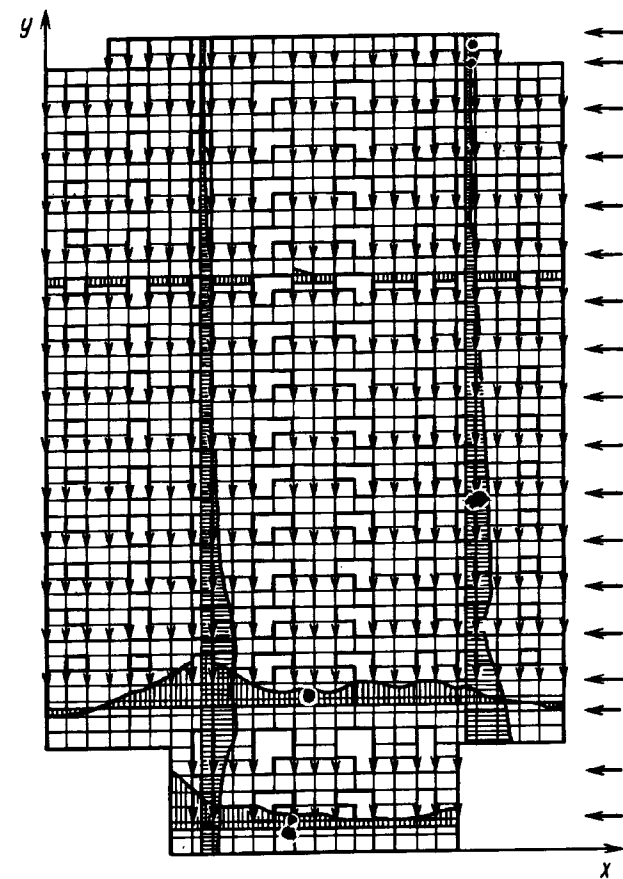


Рис. 6.26. Напряженное состояние монолитной железобетонной стены здания при совместном действии вертикальной и горизонтальной нагрузок

приопорных зон). Эти зоны требуют специального усиления, чтобы избежать преждевременного разрушения.

Были также просчитаны большеразмерные монолитные стены для зданий в Кишиневе (рис. 6.26). Учет трещинообразования привел к снижению напряжений растяжения и к уменьшению армирования на 10 – 15%. В то же время повысились напряжения сжатия в зонах без трещин и в некоторых случаях потребовалось усиление этих зон, чтобы избежать хрупкого разрушения.

Расчет перекрытий. Теория расчета железобетонных перекрытий с учетом трещинообразования разработана в работах [45, 54, 58, 61, 62, 103, 152, 170]. В силу физической нелинейности железобетона

и влияния трещин напряжения по толщине плиты будут изменяться по существенно криволинейным эпюрам. Чтобы это учесть, плита разделяется по толщине на условные тонкие или обобщенные слои, для которых считаются справедливыми соотношения (61, 78). Полагая справедливой гипотезу прямых нормалей (применительно к средним деформациям на участках между трещинами) и вводя численное интегрирование напряжений по толщине по правилу прямоугольников или трапеций, приходим к следующим общим физическим соотношениям:

$$\{M\} = [D]\{k\}, \quad (6.240)$$

где $[D]$ — матрица жесткости железобетона размером 6×6 ; $\{M\}$ — вектор-столбец моментов и мембранных сил

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}\}^T;$$

$\{k\}$ — вектор-столбец кривизны и относительных удлинений

$$\{k\} = \{(-d^2w/dx^2; -d^2w/dy^2; -2d^2w/dx dy; du/dx, dv/dy; (du/dy + dv/dx))\}^T.$$

Здесь T — знак транспонирования; w — прогибы; u, v — горизонтальные перемещения на уровне выбранной координатной поверхности xy .

В практике проектирования часто встречаются плиты, которые не закреплены по контуру от горизонтальных перемещений (работают без распора). Расчет таких плит можно выполнять по преобразованной системе (6.240)

$$\{k\} = [D]^{-1}\{M\}, \quad (6.241)$$

полагая $N_x \approx N_y \approx N_{xy} \approx 0$.

При равенстве нулю мембранных сил система разделяется на две самостоятельные системы размером 3×3 . Построение матрицы жесткости конечного элемента с использованием разделяющейся системы и расчет плит рассмотрены в [65, 103]. В соответствии с геометрическими характеристиками плит наибольшее применение нашли прямоугольные конечные элементы с тремя и четырьмя степенями свободы в узле. Если используется полная система (6.225), то количество степеней свободы в узле возрастает до пяти. Алгоритм составления системы разрешающих уравнений для ансамбля предусматривает поузловое формирование. Нелинейная задача решается методом переменных параметров упругости. Используемый алгоритм дает вполне устойчивое в смысле сходимости решение. Указанная методика реализована в виде программы МИКРОН (разработчики М. Леви, Н. Карпенко, В. Леньшин).

Остановимся на двух примерах. На рис. 6.27, *a–г* представлены результаты расчета схем развития трещин (рис. 6.27, *б, в*) и прогибов (рис. 6.27, *г*) двухпролетной неразрезной плиты из опытов немецких исследователей G. Vach и O. Graf [177] (плита нагружалась

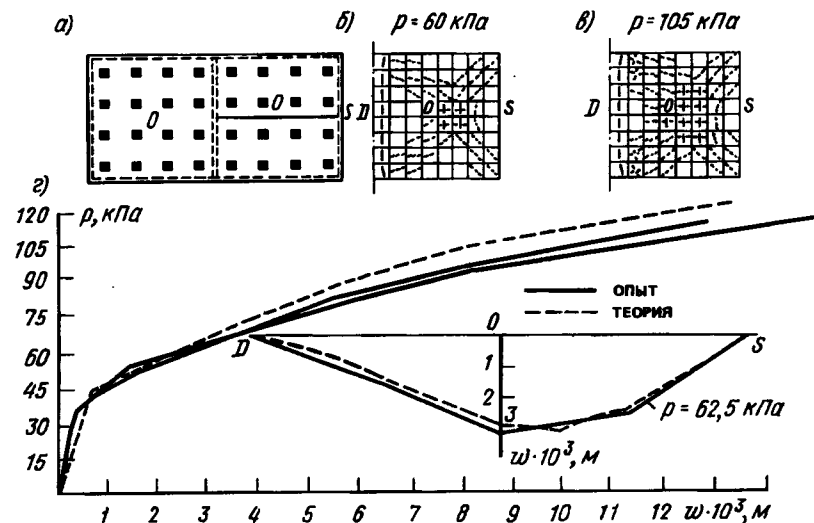


Рис. 6.27. Расчет двухпролетной неразрезной плиты перекрытия

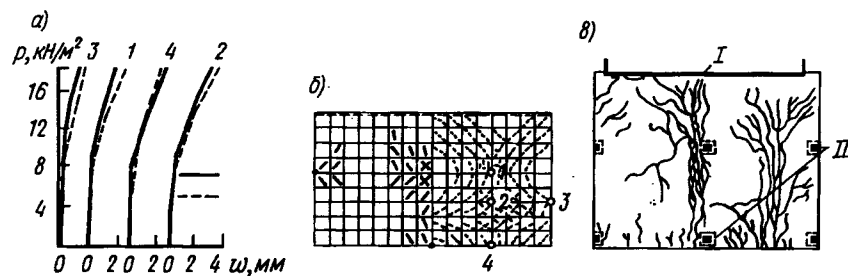


Рис. 6.28. Результаты расчета модели монолитного перекрытия, опертого на колонны и лдро жесткости

32 грузами, рис. 6.27, *a*). В строительстве высотных зданий в Москве нашли применение монолитные безбалочные перекрытия сплошной конфигурации. Эти перекрытия располагаются вокруг ядер жесткости 7 и опираются, как правило, на нерегулярно расположенные колонны II . На рис. 6.28 представлены некоторые результаты расчета модели такого перекрытия (из опытов Т.А. Мухамедиева). Сопоставлены теоретические и опытные значения прогибов w в различных точках перекрытия (И-1 — И-4, рис. 6.28, *a*) и схемы развития трещин (рис. 6.28, *б, в*). Эксперимент проводился Московским инженерно-строительным институтом (МИСИ). Программа МИКРОН-ЕС на-

шла применение при расчете различных перекрытий жилых зданий в Москве. Выявлено перераспределение моментов по полю плиты и существенное увеличение прогибов после образования трещин.

Из изложенного видно, что физическая нелинейность, конструкционная и приобретаемая вследствие трещинообразования анизотропия, а также неоднородность связей между напряжениями и деформациями являются основными факторами железобетона, которые необходимо учитывать в современных моделях и методах расчета конструкций различных зданий. Учет указанных свойств железобетона при расчете конструкций позволяет получать достоверную картину распределения усилий и перемещений при силовых и деформационных воздействиях и выявлять рациональные решения конструкций современных зданий.

6.14. О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ КРИТЕРИЯХ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ТРЕЩИНАМИ

Развитие условий прочности. Начальная база для построения общих условий прочности железобетонных элементов была заложена еще в 30—40 годы. В этой связи следует отметить: выдвинутый в эти годы А.Ф. Лолейтом основополагающий принцип построения условия прочности балок из пластического железобетона по нормальной трещине, результаты его развития и экспериментального исследования многими авторами; теоретическое обоснование метода предельного равновесия, данное А.А. Гвоздевым [31]; разработанные К. Йогансенем и А.А. Гвоздевым [31, 34] первые условия прочности работающих в двух направлениях плит по кривой трещине.

Развитие «плитных» условий по существу и по форме записи, их экспериментальная проверка, попытки построения некоторых вариантов теории пластичности железобетона и другие вопросы рассматривали Р. Вуд, Ш. Массоне, М. Сав, К. Кемп, А.А. Гвоздев, М. Корнелис, Н.И. Карпенко, С. Морли, М.И. Рейтман, И. Леншоу, А. Созен, П. Ленкей и др. Подробный обзор этих работ и вывод «плитных» условий приведены в монографии автора [61] и работах [34, 55, 56, 57], поэтому здесь не приводятся.

Указанные условия за некоторой доработкой основаны на следующих, ставших теперь классическими, предпосылках: разрушение происходит по некоторым трещинам, в общем случае косо расположенным к стержням арматурной сетки; в трещинах разрушения все стержни, ее пересекающие, достигают текучести, а бетон сжатой зоны — прочности на сжатие (соблюдается принцип А.Ф. Лолейта); в стержнях возникают лишь нормальные, направленные вдоль оси стержня напряжения; в процессе деформирования стержни не изменяют своей первоначальной ориентации; арматура

задается в виде коэффициентов армирования; применяется принцип сглаживания (распределения) арматуры по шагу стержней.

На базе этих предпосылок были получены достаточно простые условия прочности для плоских элементов типа балок-стенок, плит при совместном действии изгибающих и крутящих моментов, нормальных и касательных сил, а также объемных элементов с трещинами практически при произвольном косоугольном армировании. Это выполнено в работах автора [54, 57, 59, 61]. В них было показано, что для элементов с трещинами, работающими при плоском и объемном напряженном состоянии, одной проверки прочности по арматуре недостаточно, необходимо дополнительно проверять прочность блоков или, при плоском напряженном состоянии, — полос бетона между трещинами на сжатие. Были разработаны определенные критерии, однако окончательного решения этот вопрос еще не нашел.

Рассматриваемые условия можно использовать для определения прочности или подбора требуемой арматуры по величинам напряжений в элементах, соответствующим стадии истощения прочности. Указанные усилия (для подбора арматуры) можно определять на основе статической теоремы метода предельного равновесия или в процессе нелинейного деформационного расчета. Сам метод предельного равновесия и работы, его развивающие, здесь не рассматриваются.

Если, модифицируя вторую предпосылку, предположить, что в момент разрушения напряжения в бетоне без трещин достигают поверхности прочности, а напряжения в стержнях — предела текучести, то можно получить общие условия прочности (пластичности) железобетона без трещин. Такие условия были получены Г.А. Гениевым в первой половине 60-х годов.

Следует отметить, что указанные предпосылки «плитных» условий в принципе не являются идеальными, они неоднократно подвергались справедливой и несправедливой критике и попыткам модификации. Одно время (примерно в начале 60-х годов) во многих зарубежных работах стала подвергаться критике четвертая предпосылка и делались попытки изменить ее. Так, в работе Р. Вуда была выдвинута идея «полного перегиба», согласно которой арматура при текучести в трещинах перегибается так, что становится нормальной к трещинам. В других работах выдвигалась идея не полного перегиба, однако экспериментальные исследования Б. Баус и С. Толача не выявили указанного эффекта для арматуры реальных диаметров. Обзор этих работ также приведен в [61]. Здесь остановимся лишь на выводе общих критериев прочности железобетона при объемном напряженном состоянии, которые в литературе нашли малое освещение: Критерии были установлены в работах [57, 59].

Общие критерии прочности железобетона с трещинами. Теоретические исследования, как и ранее, будем проводить на примере малого элемента, выделяемого из некоторой конструкции (или

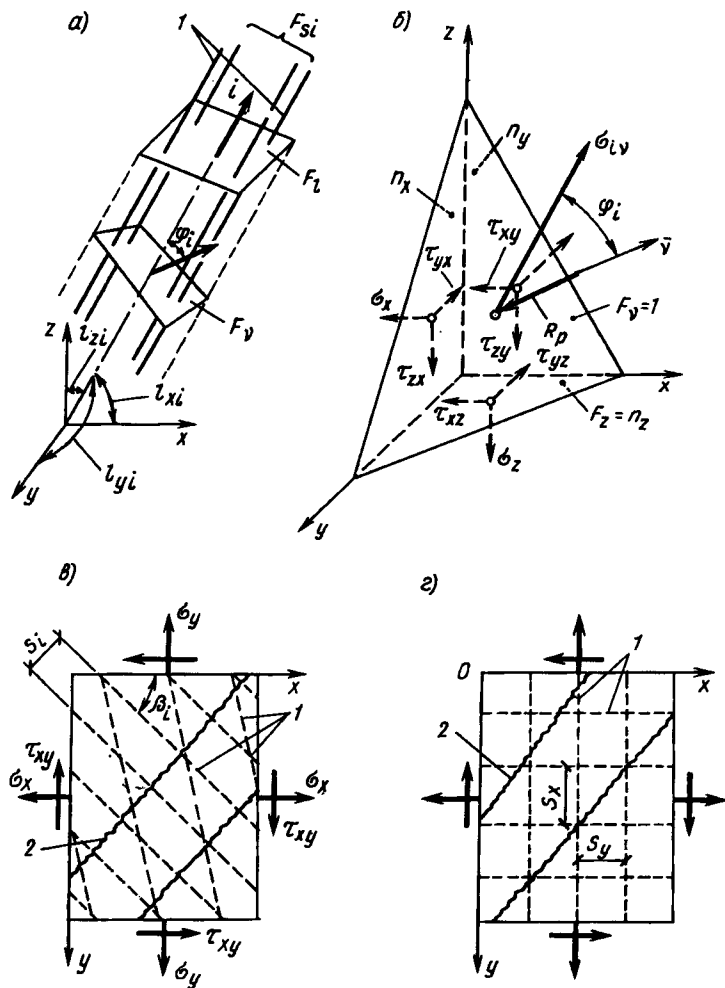


Рис. 6.29. К выводу общих условий прочности а, б — случай объемного напряженного состояния; в, г — случай плоского напряженного состояния; 1 — арматурные стержни; 2 — трещины

массива). Этот известный из механики сплошных сред прием позволяет проводить анализ в общем виде, не привязываясь к конкретному объекту.

Примем декартову систему координат и поясним характер задания армирования. Пусть армирование осуществляется несколькими (n) группами прямолинейных стержней. Каждая группа i ($i = 1, 2, \dots, n$) будет характеризоваться параллельными стержнями одного i -

го направления, направленными вдоль вектора i , и коэффициентом армирования μ_{si} (рис. 6.29, а). Проводим площадку с нормалью i . Величина μ_{si} будет представлять площадь арматуры i , отнесенную к единице площади этой площадки. Пусть, например, F_i — площадь площадки, а \tilde{F}_{si} — площадь арматурных стержней, пересекающих ее, тогда $\mu_{si} = \tilde{F}_{si} / F_i$. Если стержни делят площадку F_i на отдельные прямоугольники со сторонами a_1 и a_2 (стержни проходят через вершины прямоугольников), тогда $\mu_{si} = F_{si} / a_1 a_2$, где F_{si} — площадь одного стержня.

Таким образом, здесь, как и выше, вводится принцип направленного распределения дискретного армирования, что значительно облегчает задачу исследований. Однако при ярко выраженной дискретности в расположении стержней принцип распределения (сглаживания) может оказаться неприменимым. Этот вопрос требует еще уточнения на основании экспериментов, хотя, как было показано в [59], для некоторых таких конструкций получалось (при определенном способе определения величин μ_{si}) хорошее совпадение результатов теории и опыта.

Направляющие косинусы нормали i к осям x, y и z обозначим соответственно через l_{xi}, l_{yi}, l_{zi} (см. рис. 6.29, а). Для дальнейшего анализа понадобятся также коэффициенты армирования $\mu_{\varphi i}$, отнесенные к наклонной площадке. Пусть наклонная площадка такова, что пересекает лишь выделенный на рис. 6.29, а поток стержней i . Обозначим ν — единичную нормаль к наклонной площадке; n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы соответственно к осям x, y и z ; F_{ν} — площадь площадки; φ_i — угол между i и ν , тогда (см. рис. 6.29, а):

$$F_{\nu} = F_i / \cos \varphi_i; \mu_{\varphi i} = \tilde{F}_{si} / F_{\nu} = \mu_{si} \cos \varphi_i = \mu_{si} (l_{xi} n_x + l_{yi} n_y + l_{zi} n_z). \quad (6.242)$$

Условие прочности полос (блоков) бетона между трещинами. Предполагаем, что разрушение полосок бетона между трещинами происходит в момент, когда максимальные по модулю главные сжимающие напряжения в бетоне $\sigma_{b, \min} > R_p$, где R_p — характеристика прочности бетона между трещинами на сжатие. Выделим из массива малый тетраэдр так, чтобы наклонная грань его прошла по площадке действия $\sigma_{b, \min}$. Обозначим: ν — нормаль к наклонной площадке; F_{ν} — площадь этой площадки; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ — компоненты тензора напряжений. Примем $F_{\nu} = 1$, тогда площади остальных граней тетраэдра будут равны значениям направляющих косинусов n_x, n_y, n_z нормали ν (см. рис. 6.29, б).

Рассмотрим условия равновесия тетраэдра для момента, когда $\sigma_{b, \min} = R_p$. Исследования величины R_p указаны в п. 6.9. Кроме усилий R_p на наклонной грани будут усилия в арматуре, которые обозначим $\sigma_{i, \nu}$. В полосах бетона напряжения в арматуре из-за

сцепления с бетоном будут меньше, чем в трещинах. При определении прочности полосок бетона в расчет будем вводить средние напряжения в арматуре σ_{si}^m . Согласно (6.242), можно установить, что

$$\sigma_{iv} = \sigma_{si}^m \mu_{\varphi i} = \sigma_{si}^m \mu_{si} (l_{xi} n_x + l_{yi} n_y + l_{zi} n_z), \quad (6.243)$$

а проекции этих усилий на оси x , y и z соответственно составят: $\sigma_{iv} l_{xi}$; $\sigma_{iv} l_{yi}$; $\sigma_{iv} l_{zi}$.

Если наклонную площадку пересекают стержни n направлений ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), то суммарные проекции усилий на оси x , y и z будут соответственно равны: $\sum_{i=1}^n \sigma_{iv} l_{xi}$; $\sum_{i=1}^n \sigma_{iv} l_{yi}$; $\sum_{i=1}^n \sigma_{iv} l_{zi}$.

Проектируя приложенные к тетраэдру все силы на оси x , y и z , и, введя обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sx}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{xi}^2; & \tilde{\sigma}_{sy}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{yi}^2; \\ \tilde{\sigma}_{sz}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{zi}^2; & \tilde{\tau}_{sxy}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{xi} l_{yi}; \end{aligned} \quad (6.244)$$

$$\tilde{\tau}_{sxz}^m = \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{xi} l_{zi}; \quad \tilde{\tau}_{syz}^m = \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m l_{yi} l_{zi}$$

получим, записав условия в виде неравенств, характеризующих область прочных состояний:

$$\begin{aligned} (R_p + \sigma_x - \tilde{\sigma}_{sx}^m) n_x + (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m) n_y + (\tau_{xz} - \tilde{\tau}_{sxz}^m) n_z &\geq 0; \\ (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m) n_x + (R_p + \sigma_y - \tilde{\sigma}_{sy}^m) n_y + (\tau_{yz} - \tilde{\tau}_{syz}^m) n_z &\geq 0; \\ (\tau_{xz} - \tilde{\tau}_{sxz}^m) n_x + (\tau_{yz} - \tilde{\tau}_{syz}^m) n_y + (R_p + \sigma_z - \tilde{\sigma}_{sz}^m) n_z &\geq 0. \end{aligned}$$

В этой системе однородных линейных уравнений n_x , n_y и n_z (в предельной стадии неравенства обращаются в равенства) одновременно не могут быть равными нулю, так как $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, значит определитель ее должен обращаться в нуль. Отсюда условие прочности будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} (R_p + \sigma_x - \tilde{\sigma}_{sx}^m), & (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m), & (\tau_{xz} - \tilde{\tau}_{sxz}^m) \\ (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m), & (R_p + \sigma_y - \tilde{\sigma}_{sy}^m), & (\tau_{yz} - \tilde{\tau}_{syz}^m) \\ (\tau_{xz} - \tilde{\tau}_{sxz}^m), & (\tau_{yz} - \tilde{\tau}_{syz}^m), & (R_p + \sigma_z - \tilde{\sigma}_{sz}^m) \end{vmatrix} \geq 0. \quad (6.246)$$

$$\begin{aligned} \text{При этом} \\ (R_p + \sigma_x - \tilde{\sigma}_{sx}^m) \geq 0, \quad (R_p + \sigma_y - \tilde{\sigma}_{sy}^m) \geq 0. \\ (R_p + \sigma_z - \tilde{\sigma}_{sz}^m) \geq 0. \end{aligned} \quad (6.247)$$

При обращении неравенства (6.246) в равенство элемент переходит в предельное состояние.

Значения $\tilde{\sigma}_{sx}^m$, $\tilde{\sigma}_{sy}^m$, $\tilde{\sigma}_{sz}^m$, $\tilde{\tau}_{sxy}^m$, $\tilde{\tau}_{sxz}^m$, $\tilde{\tau}_{syz}^m$ представляют собой компоненты тензора средних усилий в арматуре. При ортотропном армировании (армировании тремя группами стержней, расположенными соответственно вдоль осей x , y и z , т.е. при $i = x, y, z$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sx}^m &= \sigma_{sx}^m \mu_{sx}; & \tilde{\sigma}_{sy}^m &= \sigma_{sy}^m \mu_{sy}; \\ \tilde{\sigma}_{sz}^m &= \sigma_{sz}^m \mu_{sz}; & \tilde{\tau}_{sxy}^m &= \tilde{\tau}_{syz}^m = \tilde{\tau}_{sxz}^m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.248)$$

Условие прочности арматуры. Теперь пусть наклонная трещина проходит по площадке, на которой напряжения в бетоне равны нулю, а напряжения в арматуре достигают предельной текучести. Тогда, повторяя с учетом этих особенностей весь представленный выше вывод, приходим к следующему условию текучести арматуры:

$$\begin{vmatrix} (\tilde{\sigma}_{sx} - \sigma_x), & (\tilde{\tau}_{sxy} - \tau_{xy}), & (\tau_{sxz} - \tau_{xz}) \\ (\tilde{\tau}_{sxy} - \tau_{xy}), & (\tilde{\sigma}_{sy} - \sigma_y), & (\tilde{\tau}_{syz} - \tau_{yz}) \\ (\tilde{\tau}_{sxz} - \tau_{xz}), & (\tilde{\tau}_{syz} - \tau_{yz}), & (\tilde{\sigma}_{sz} - \sigma_z) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (6.249)$$

где $\tilde{\sigma}_{sj}$ и $\tilde{\tau}_{sjk}$ ($j, k = x, y, z$) — компоненты тензора предельных усилий в арматуре, которые можно вычислять по формулам (6.244) соответственно так же, как значения $\tilde{\sigma}_{si}^m$ и $\tilde{\tau}_{sjk}^m$, заменив лишь σ_{si}^m на $\hat{\sigma}_{si}$ ($\hat{\sigma}_{si}$ — напряжения текучести в стержнях).

Обращение неравенства (6.249) в равенство характеризует наступление текучести во всех стержнях.

Уточнение прочности бетона. Из (6.249) следует, что с увеличением коэффициентов армирования прочность элементов по арматуре будет возрастать, но, как следует из (6.246), это увеличение при наличии сжимающих напряжений не может быть беспредельным, так как наступит разрушение по бетону.

Входящие в (6.246) значения средних усилий в арматуре $\tilde{\sigma}_{si}^m$, $\tilde{\tau}_{sjk}^m$ будут зависеть от уровня напряженного состояния. В результате значения нагрузки, при котором разрушится переармированный элемент при сложном напряженном состоянии, очевидно, наиболее точно может быть определено лишь в процессе деформационного расчета. Однако ответить на вопрос, является ли элемент переармированным или нет, и, таким образом, оценить правильность решений, получен-

ных при использовании условий текучести арматуры (6.249), на основании (6.246) можно сравнительно просто. Пусть арматура в элементе достигла текучести. В этом случае средние напряжения в арматуре σ_{si}^m можно выразить (с некоторым приближением) в функции от $\hat{\sigma}_{si}$, приняв

$$\tilde{\sigma}_{si}^m = \psi_{si} \hat{\sigma}_{si}, \quad (6.250)$$

где в среднем при начале текучести арматуры коэффициент $\psi_s \approx 0,8, \dots, 0,9$. Естественно, условия (6.248) можно принимать лишь для растянутой арматуры, пересекающей трещины; средние напряжения в арматуре, расположенные вдоль трещин, можно находить из условия ее совместной работы с бетоном. При этом все необходимые величины в условиях (6.246) становятся известными (значения R_p приведены выше). Если при этом условие (6.246) будет нарушаться, элемент разрушится по бетону до начала текучести арматуры.

Плоское напряженное состояние ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$). Для плоского напряженного состояния представленные выше условия значительно упрощаются. Запишем их применительно к элементам пластин (см. рис. 6.29, в, з), учтя специфику их армирования. Пусть (в общем случае) пластина армирована по толщине n слоями арматуры, расположенными параллельно ее срединной поверхности. Слой i будет представлять собой часто расположенные стержни одного i -го направления и характеризоваться углом наклона β_i стержней i к оси x и коэффициентом армирования $\mu_{si} = F_{si}/s_i h$, где F_{si} — площадь стержня; s_i — шаг стержней в слое; h — толщина пластины. Если однотипных слоев (с одинаковым β_i) по высоте расположено несколько (k), то $\mu_{si} = \sum F_{si}/s_i h$. Чтобы не усложнять чертежи, на рис. 6.29, в показано двухслойное косоугольное армирование. Для ортотропного армирования (в виде ортогональной сетки, см. рис. 6.29, з) ($\mu_{si} = F_{si}/s_i h$ ($i = x, y$), т.е. будет два коэффициента армирования — μ_{sx} и μ_{sy}). Учитывая, что $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$; $l_{xi} = \cos \beta_i$; $l_{yi} = \cos(90^\circ - \beta_i) = \sin \beta_i$; $l_{zi} = 90^\circ = 0$, из (6.245) получим

$$\begin{vmatrix} (R_p + \sigma_x - \tilde{\sigma}_{sx}^m), & (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m) \\ (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m), & (R_p + \sigma_y - \tilde{\sigma}_{sy}^m) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (6.251)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{sx}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m \cos^2 \beta_i; & \tilde{\sigma}_{sy}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m \sin^2 \beta_i; \\ \tilde{\tau}_{sxy}^m &= \sum_{i=1}^n \mu_{si} \sigma_{si}^m \sin \beta_i \cos \beta_i. \end{aligned} \right\} \quad (6.252)$$

Раскрывая определитель, условие (6.246) можно записать

$$(R_p + \sigma_x - \tilde{\sigma}_{sx}^m)(R_p + \sigma_y - \tilde{\sigma}_{sy}^m) - (\tau_{xy} - \tilde{\tau}_{sxy}^m)^2 \geq 0. \quad (6.253)$$

Аналогично условие прочности по арматуре (6.248) для плоского напряженного состояния можно преобразовать к виду

$$(\tilde{\sigma}_{sx} - \sigma_x)(\tilde{\sigma}_{sy} - \sigma_y) - (\tilde{\tau}_{sxy} - \tau_{xy})^2 \geq 0, \quad (6.254)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{sx} = \sum_{i=1}^n \mu_{si} \hat{\sigma}_{si} \cos^2 \beta_i; \quad \tilde{\sigma}_{sy} = \sum_{i=1}^n \mu_{si} \hat{\sigma}_{si} \sin^2 \beta_i;$$

$$\tilde{\tau}_{sxy} = \sum_{i=1}^n \mu_{si} \hat{\sigma}_{si} \sin \beta_i \cos \beta_i.$$

Для ортотропного армирования условия (6.253) и (6.254) будут соответственно иметь вид (обозначим $\tau_{xy} = \tau$):

$$(R_p + \sigma_x - \mu_{sx} \tilde{\sigma}_{sx}^m)(R_p + \sigma_y - \mu_{sy} \tilde{\sigma}_{sy}^m) - \tau^2 \geq 0; \quad (6.255)$$

$$(\hat{\sigma}_{sx} \mu_{sx} - \sigma_x)(\hat{\sigma}_{sy} \mu_{sy} - \sigma_y) - \tau^2 \geq 0. \quad (6.256)$$

6.15. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА СИЛОВЫЕ И ТЕРМОСИЛОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Остановимся на некоторых уже реализованных способах расчета железобетонных конструкций с учетом объемного напряженного состояния, построенных на основе представленной в гл. 6 теории деформирования железобетона с трещинами (будем следовать обзору, составленному автором этой книги совместно с С.Ф. Клованичем).

Расчет бетонных и железобетонных конструкций методом конечных элементов на различные воздействия приводит к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность разрешающих уравнений МКЭ обусловлена прежде всего нелинейностью определяющих соотношений материала, которые приведены в гл. 3–6. Кроме того, она может быть вызвана большими перемещениями, соизмеримыми с размерами конструкции, например на стадиях, близких к предельным, когда возникает необходимость учета изменения расчетной схемы сооружения в процессе нагружения. Однако математическая формулировка задачи в обоих случаях одинакова и рассматривается с единых методических позиций. Нелинейность задачи приводит к нарушению принципа суперпозиции. Ее

решение существенным образом зависит от истории и пути нагружения и может быть получено лишь на основе шагово-итерационного метода последовательных приближений.

Один из вариантов такого метода был уже рассмотрен выше (см. п. 6.13). Процедура расчета конструкций сводилась к решению системы уравнений (6.222) на ряд постепенно увеличивающихся значений внешней нагрузки от некоторой малой $\{P\}_1$ до нагрузки $\{P\}_n$, приводящей к разрушению конструкции. В качестве неизвестных на каждом шаге выступали компоненты вектора узловых перемещений $\{q\}$. Итерационная процедура использовалась для уточнения матрицы жесткости железобетона в конечных элементах (матрицы упругости по терминологии МКЭ в линейных задачах), а затем и матрицы жесткости всей конструкции $[k(\{q\})]$.

Однако связь между векторами полных нагрузок $\{P\}_i$ и векторами полных узловых перемещений $\{q\}_i$, установить не всегда удается, особенно при сложных режимах нагружения. В этом случае удобно выполнять расчет в приращениях на основе шагового метода с последовательным суммированием найденных в пределах каждого шага решений. Этот вариант шагово-итерационного метода нашел развитие в докторских работах Т.А. Балана и С.Ф. Клованича, выполненных под руководством автора этой книги. Ниже укажем и на некоторые, не менее интересные, подходы других авторов.

Фактически использовалась наиболее общая форма шагового метода, сформулированная В.И. Феодосьевым, а применительно к МКЭ детально разработанная К.Ю. Бате. Процесс деформирования как при кратковременных, так и при длительных воздействиях отождествляется с движением точек конструкции. В процессе движения она переходит из конфигурации ${}^m C$ в смежную ей конфигурацию ${}^{m+\Delta m} C$, а уравнение равновесия МКЭ формулируется как зависимость между приращениями узловых сил $\{\Delta P\}$ и перемещений $\{\Delta q\}$, обусловленными таким переходом, т.е. в инкрементальной форме

$$[K(\{^m q\})\{\Delta q\} - \{\Delta P(\{^m q\})\}] = 0. \quad (6.257)$$

Решение задачи отыскивается в виде

$$\{^{m+\Delta m} q\} = \{^m q\} + \{\Delta q\}. \quad (6.258)$$

Матрица жесткости системы $[K(\{^m q\})]$ и вектор $\{\Delta P(\{^m q\})\}$ являются функциями ее состояния и определяются с помощью стандартных процедур МКЭ по матрицам жесткости и векторам приращений узловых внешних сил отдельных элементов. При решении реальных задач приходится иметь дело с конечными временными интервалами, что ведет к «дрейфу» приближенного решения от точного. Для устранения этого «дрейфа» обычно применяются различные итерационные алгоритмы. Пусть известно приближенное решение уравнения (6.257) $\{\Delta q\}^i$, полученное, например, в результате упругого расчета, причем

$$[K(\{^m q\})\{\Delta q\}^i - \{\Delta P(\{^m q\})\}] = \{\delta F\}^i = 0. \quad (6.259)$$

Точное решение этого же уравнения

$$\{\Delta q\} = \{\Delta q\}^i + \{\delta \Delta q\}^i.$$

Невязка $\{\delta \Delta q\}^i$ получается из (6.257) и (6.258) и имеет вид

$$\{\delta \Delta q\}^i = -[K(\{^m q\})]^{-1} \{\delta F\}^i. \quad (6.260)$$

В результате решения на шаге ΔT можно вычислить путем последовательных приближений по формуле

$$\{\Delta q\}^{i+1} = \{\Delta q\}^i + \{\delta \Delta q\}^i. \quad (6.261)$$

Различные итерационные схемы, как известно, отличаются выбором матрицы $[k(\{^m q\})]$ в (6.260). Осуществлялся сопоставительный анализ метода Ньютона — Конторовича, когда матрица жесткости пересчитывается с использованием текущих значений матриц, характеризующих свойства элемента, и метода Ньютона — Рафсона с использованием касательной линеаризации или линеаризации по хордам в виде методики конечных приращений. Установлено, что оптимальными являются последние два метода, причем метод Ньютона — Рафсона рекомендуется использовать при расчете конструкций без трещин, переменных параметров упругости — на стадиях работы с трещинами и близких к предельным.

Шагово-итерационная формулировка метода конечных элементов использовалась для разработки программных комплексов расчета бетонных и железобетонных конструкций на силовые (Т.А. Баланом и другими) и термосиловые (в работах С.Ф. Клованича) воздействия. Поскольку нелинейный анализ конструкций является определенной последовательностью решения линейных задач, то любой программный комплекс, как известно, содержит программные модули, составляющие основу линейного расчета. К ним относятся процедуры ввода и вывода информации, организации библиотеки элементов, формирования и решения системы линейных алгебраических уравнений и т.д. От удачно выбранных вычислительных алгоритмов, положенных в основу этих модулей, зависит эффективность комплекса. Исследован имеющийся опыт разработки этих алгоритмов, содержащийся в исследованиях А.С. Городецкого, Л.Г. Дмитриева, В.С. Здоренко, А.И. Козачевского, В.А. Постнова, А.С. Сахарова, И.Я. Хархурима, Н.Н. Шапошникова, К.-Ю. Бате, О. Зенкевича, Е. Вильсона и других, направленный на уменьшение трудоемкости подготовки исходных данных, оптимальное распределение памяти ЭВМ, сокращение времени счета и наглядность выводимой информации.

Комплексы содержат библиотеку криволинейных изопараметрических неоднородных плоских, осесимметричных и объемных конечных элементов, допускающих рассчитывать конструкции широкого класса и назначения. Основные характеристики элементов получены численным интегрированием, причем используются коэффицици-

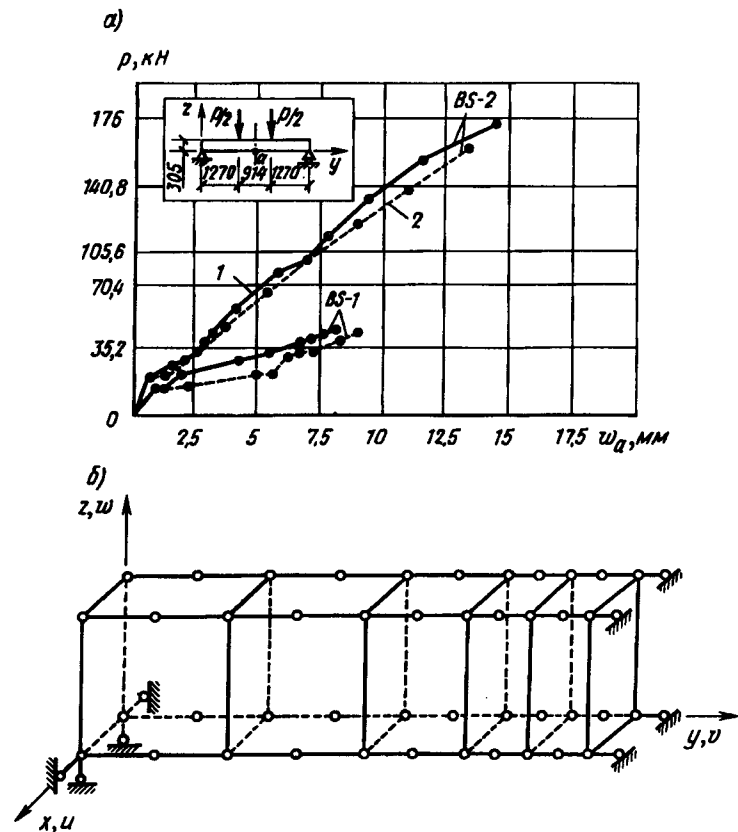


Рис. 6.30. Результаты расчета балок BS-1 и BS-2 1 — расчет; 2 — опыт

енты физических соотношений материала, вычисляемые в точках интегрирования в зависимости от состояния элемента в этих точках. Комплексы носят открытый характер, что позволяет по мере необходимости дополнять их новыми элементами.

С помощью разработанных методов были проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния бетонных и железобетонных конструкций. При этом на первом этапе рассчитывались статически определимые железобетонные балки прямоугольного сечения (рис. 6.30, где представлены отдельные результаты расчета балок $BS = 1$ и $BS = 2$ из опытов М. Сьюдента и В. Шнобриха, полученные Т.А. Баланом). Расчетная схема балок представлялась в виде ансамбля объемных конечных элементов (рис. 6.30, б). Результаты расчета в виде прогибов точки, расположенной на середине пролета балки, сравнивались с данными эксперимента (рис. 6.30, а)

и получено удовлетворительное согласование опыта и расчета. Однако этот пример носит иллюстративный характер, показывающий возможности объемных конечных элементов. Для практических расчетов стержневых конструкций больше подходят специальные одномерные конечные элементы, хотя и учитывающие все шесть компонент напряжений объемного состояния. Они разработаны в [88] Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиевым и М.А. Сапожниковым.

Трехмерные неоднородные конечные элементы со специальными внутренними областями расположения арматуры дают возможность производить расчеты изгибаемых плит. Такой прием был применен Т.А. Баланом при расчете свободно опертых по контуру железобетонных плит из опытов Г. Баха и О. Графа [177], в частности, плиты (рис. 6.31). На рис. 6.31, а приведено сопоставление опытных и теоретических значений прогибов в узлах плиты, а на рис. 6.31, в схем образования трещин. Схема конечно-элементной разбивки плиты Р-822 представлена на рис. 6.31, б.

Здесь также следует заметить, что, видимо, рациональными при расчете плит могут оказаться слоистые модели конечных элементов плиты, позволяющие свести трехмерные элементы к двумерным. Теория такого приведения представлена в работах [68, 83], а конечно-элементная реализация — в [90].

Целый ряд интересных решений получил С.Ф. Клованич на основе термосиловой модели железобетона [80] — Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованича, рассматривая различные конструкции, подвергнутые силовым воздействиям совместно с неравномерным по высоте сечения нагревом. Представим кратко эти решения.

Осуществлялись расчеты плосконапряженных железобетонных колец, неравномерно нагретых по толщине, из опытов В.И. Милонова и В.Н. Горячева (рис. 6.32, а — г, где соответственно на первом — конструкция и расчетная схема, на втором — распределение температуры по толщине, на третьем — деформации кольцевой арматуры, на четвертом — эпюры напряжений). Определены расчетные значения: нормальных, касательных напряжений, деформаций кольцевой арматуры (средних и в трещине), ширины раскрытия трещин. Сопоставление этих значений с экспериментальными данными также свидетельствует о достоверности предлагаемой методики. Отметим, что для расчета плосконапряженных конструкций использовались восьмиузловые четырехугольные изопараметрические криволинейные неоднородные конечные элементы, имеющие по три точки интегрирования в направлениях осей координат.

Покрытия защитных систем в энергетических и тепловых агрегатах цилиндрической формы чаще всего выполняются в виде толстостенных сферических пологих сводов-оболочек. Такие конструкции характерны для биологической защиты реакторов, резервуаров, печей и т.д. По этой причине проблема расчета и проектирования железобетонных сводов при тепловых воздействиях давно привлекает

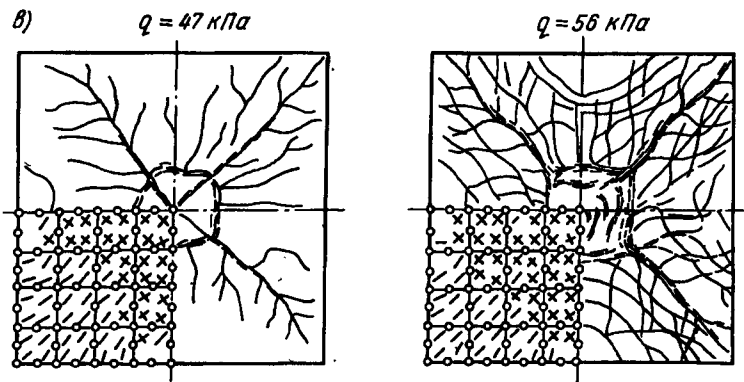
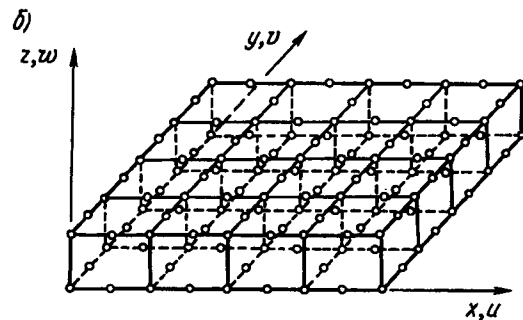
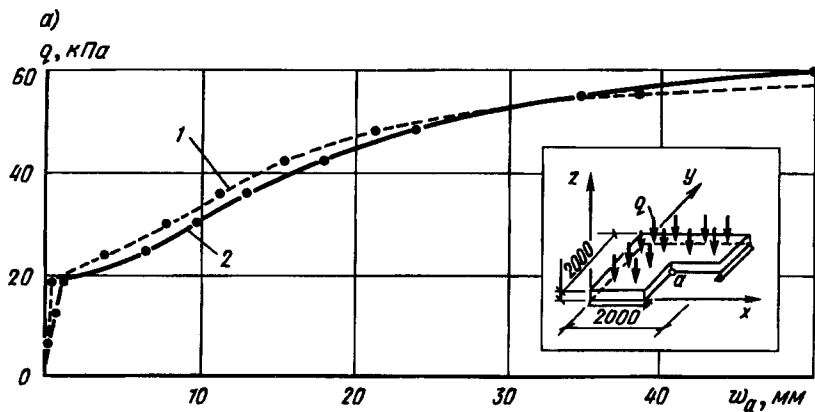


Рис. 6.31. Результаты расчета плиты Р-822 1 — расчет; 2 — опыт

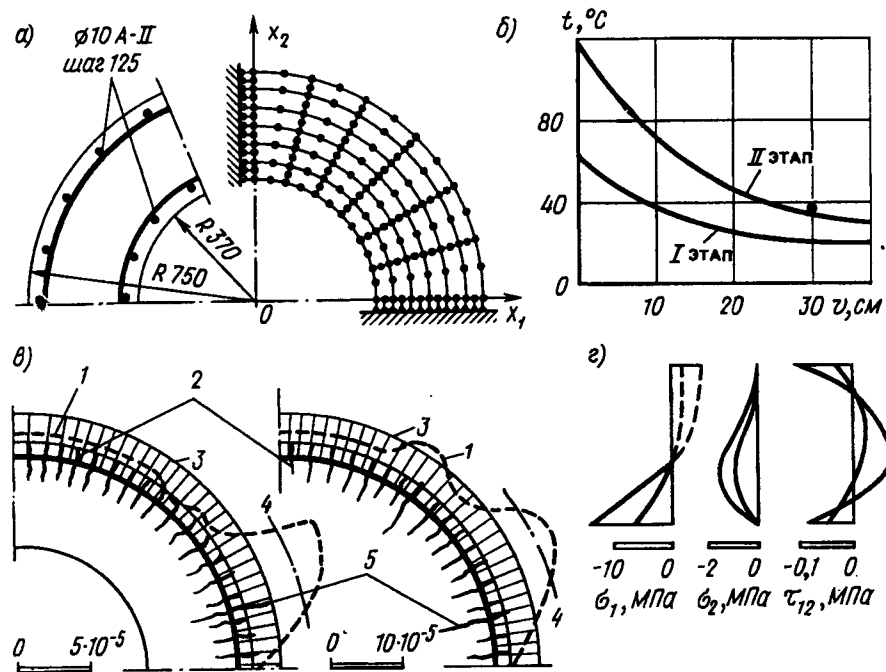


Рис. 6.32. Результаты расчета кольцевого железобетонного образца 1 — опытные деформации; 2 — теоретические трещины; 3 — средние деформации; 4 — максимальные деформации; 5 — опытные трещины

внимание. Здесь, в частности, следует отметить целый комплекс исследований, проведенных в НИИЖБе, а также зарубежные исследования, например З. Веерта. Учитывая широкое распространение этих конструкций, по разработанной методике были осуществлены численные исследования железобетонных фрагментов в виде сводоболочек из опытов З. Веерта. Конструкция опытных образцов HNB 110-1 и HNB 200-2-Q (ΔT) представлена на рис. 6.33, а.

Фрагмент HNB 110-1 испытывался сначала при нормальной температуре, затем аналогичный образец подвергался равномерному нагреву до 110°C . Загружение осуществлялось сосредоточенной силой, приложенной в центре. Характеристики материалов, из которых изготовлен образец, равны $R_b = 44,8 \text{ МПа}$, $R_{bt} = 2,5 \text{ МПа}$, $E_b^0 = 3,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\mu_b^0 = 0,2$, $\alpha_b^0 = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$; $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R_s = 1583 \text{ МПа}$, $\alpha_s^0 = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$.

Расчетная схема образца в виде совокупности изопараметрических криволинейных объемных элементов представлена на рис. 6.33, б. Учитывая наличие двух осей симметрии, анализировалась работа

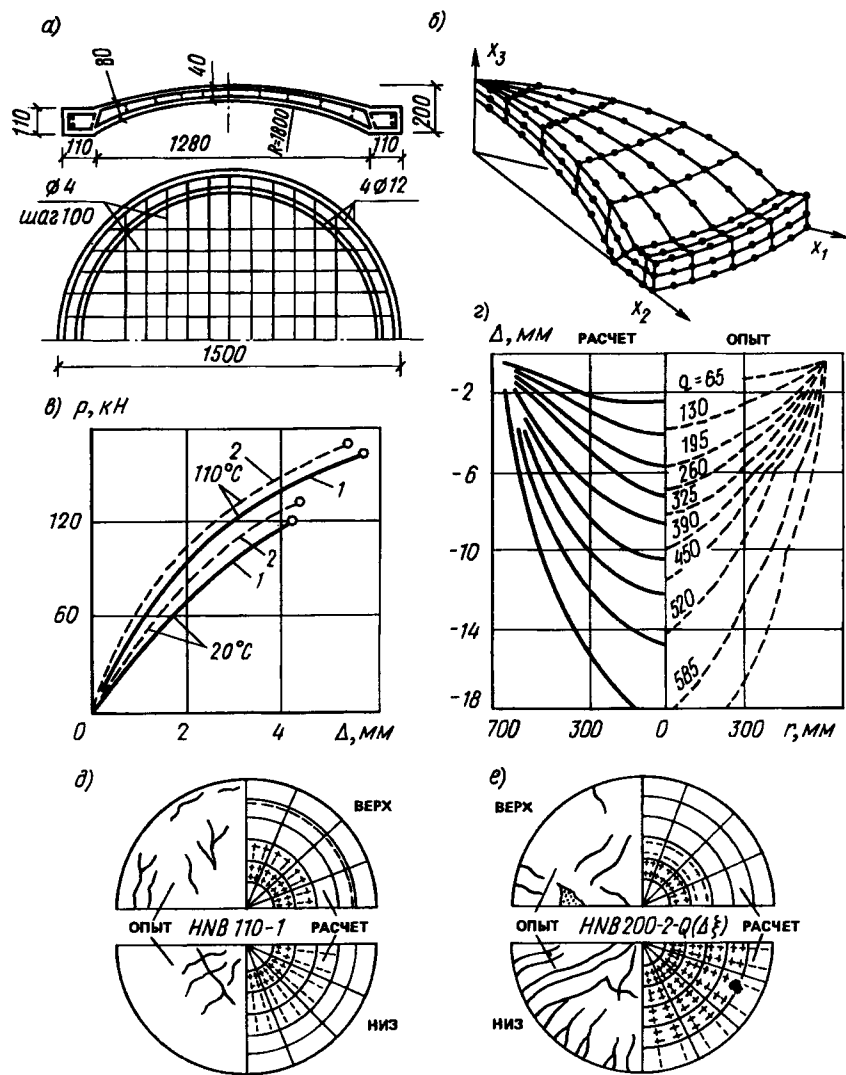


Рис. 6.33. Результаты расчетов сводов оболочек 1 — расчет; 2 — опыт

1/4 части свода. Расчетная нагрузка прикладывалась ступенями, аналогичными опытными. При этом первая ступень нагружения рассматривалась чисто температурной. По результатам расчетов определены перемещения узловых точек, напряжения и деформации в точках интегрирования конечных элементов, установлены процесс трещинообразования, а также значение разрушающей нагрузки.

На рис. 6.33, в приведены расчетные значения прогибов в центре свода. Здесь же представлены опытные данные. Расчетные и опытные данные разрушающих нагрузок, полученные на холодных образцах, составили $P_{\text{теор}}/P_{\text{оп}} = 120/130$ кН, при этом прогиб был равен $W_{\text{теор}}/W_{\text{оп}} = 4,12/4,43$ мм. Аналогичные данные по нагретым образцам: $P_{\text{теор}}/P_{\text{оп}} = 160/168$ кН; $W_{\text{теор}}/W_{\text{оп}} = 5,82/5,42$ мм. На рис. 6.33, д представлен процесс трещинообразования на верхней и нижней поверхностях свода в момент разрушения. Видно, что в целом по всем сопоставляемым параметрам совпадение удовлетворительное. Отклонения не превышают 15%.

Фрагмент $HNB 200-2-Q(\Delta T)$ характеризовался неравномерным нагревом по толщине. При этом температура на нижней грани равнялась 120°C , на верхней — 20°C . Загружение фрагмента осуществлялось вертикальной равномерно распределенной нагрузкой, прикладываемой ступенями, равными 65 кН/м^2 , вплоть до разрушения.

Исходные данные для расчетов принимались на основе результатов опытов следующими: $R_b = 49,4 \text{ МПа}$, $E_b^0 = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $R_{bt} = 2,5 \text{ МПа}$, $\mu_b^0 = 0,2$, $\alpha_b^0 = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$, $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R_s = 1583 \text{ МПа}$, $\alpha_s^0 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}$. На рис. 6.33, з представлены вертикальные перемещения точек образца, полученные в опытах и расчетным путем. Разрушение фрагмента в расчетах произошло при нагрузке $q_{\text{теор}} = 585 \text{ кН/м}^2$, прогиб в этот момент составил $W_{\text{теор}} = 25 \text{ мм}$. Аналогичные опытные величины равны $q_{\text{оп}} = 618 \text{ кН/м}^2$, $W_{\text{оп}} = 28,86 \text{ мм}$. На рис. 6.33, е представлены теоретическая и опытная картины трещинообразования и изломов верхней и нижней поверхностей в момент разрушения. Совпадение расчетных и экспериментальных значений по всем параметрам удовлетворительное и в качественном и количественном отношении.

Значительная часть массивных бетонных и железобетонных сооружений, подвергаемых в процессе эксплуатации нагреву, работает в условиях осесимметричного напряженного состояния. К ним относятся корпуса высокого давления, дымовые трубы, силосы и т.д. Иллюстрацией эффективности предлагаемого метода расчета применительно к таким сооружениям могут служить два примера, по которым имеются достаточно надежные экспериментальные данные.

В первом примере рассматривался расчет бетонного пустотелого цилиндра, нагруженного вдоль образующей, при равномерном нагреве из опытов И. Андерберга. Геометрические размеры цилиндра и расчетная схема в виде совокупности восьмиузловых кольцевых изопараметрических элементов представлена на рис. 6.34, а. Механи-

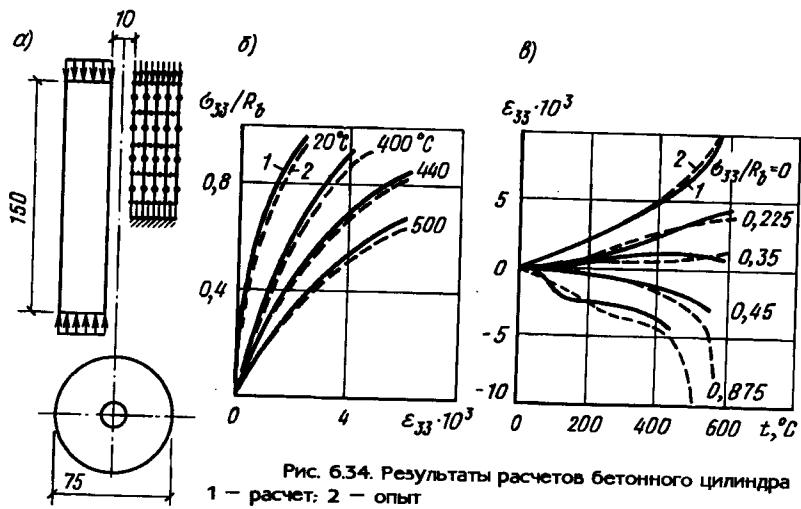


Рис. 6.34. Результаты расчетов бетонного цилиндра
1 — расчет; 2 — опыт

ческие характеристики бетона при нормальной температуре принимались следующими: $R_b = 42,25$ МПа, $E_b^0 = 2,58 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_b^0 = 0,18$, $\alpha_b^0 = 1,1 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. Расчетные изменения этих характеристик в результате нагрева определялись согласно опытным данным.

Расчет цилиндра осуществляется двумя этапами. На первом этапе образец сначала нагревался, затем при постоянной температуре прикладывалась внешняя нагрузка ступенями, равными примерно 0,1 Р. Расчетные и опытные значения деформаций при различных температурах представлены на рис. 6.34, б, в. На втором этапе на первой ступени прикладывалась внешняя вертикальная нагрузка, которая в дальнейшем оставалась постоянной, затем осуществлялся равномерный нагрев ступенями по 100°C. По результатам расчетов строились графики изменения деформаций (рис. 6.34, в), начиная со второй ступени, в зависимости от температуры нагрева, которые сопоставлялись с опытными данными.

Видно, что теоретические кривые на рис. 6.34, б и 6.34, в удовлетворительно согласуются с экспериментальными результатами. Отметим, что во втором случае удовлетворительного совпадения с опытом удалось достигнуть, только учитывая эффект Пиккета, который впервые установил, что в бетонных образцах, защемленных с двух сторон, значения напряжений при нагреве значительно меньше ожидаемых, равных $\sigma_b = E_b \alpha_b t$, где E_b — модуль деформации бетона при $t^\circ\text{C}$. С.Ф. Клованич предположил, что эффект Пиккета есть следствие быстроснатекающей части деформаций ползучести, которая успевает проявиться за более короткий срок, чем при нормальной температуре и должен быть учтен в расчетах на кратковременный нагрев.

Во втором примере рассматривался расчет модели осесимметричного предварительно напряженного железобетонного корпуса реактора, работающего при нагреве. Конструкция модели представлена на рис. 6.35, а. Усилия предварительного натяжения в вертикальных стержнях 12,7 мм составляли 112 кН в каждом, в кольцевой арматуре 2,44 мм — по 21,12 кН. Изнутри действовало избыточное давление, а также нагрев. Выбор такой конструкции объясняется тем, что по ней имеются тщательно выполненные экспериментальные исследования М. Созена и С. Паула.

Как правило, этот пример рассматривается в большинстве тестовых расчетов при моделировании бетона при сложном напряженном состоянии, например в работах Т.А. Балана, А.С. Сахарова, А.Л. Козака, К.-Ю. Бате, О. Зенкевича, А. Мачертаса, Д. Овена, Д. Филлипа. К сожалению, М. Созеном и С. Паулом не исследовалось влияние повышенных температур. Однако имеются результаты расчетов этой конструкции при нагреве по различным методикам, полученные О. Зенкевичем, Д. Овеном и Д. Филлипсом, которые были приняты контрольными при расчете по предложенному способу.

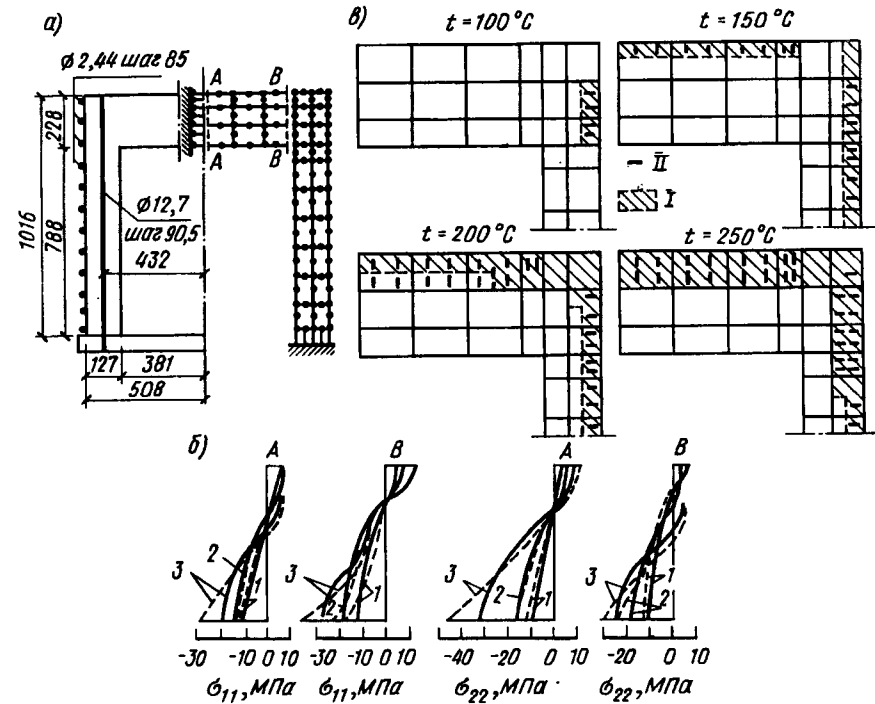


Рис. 6.35. Результаты расчетов модели корпуса реактора 1 — $t = 100^\circ\text{C}$; 2 — $t = 150^\circ\text{C}$; 3 — $t = 200^\circ\text{C}$; I — радиальные трещины; II — окружные трещины

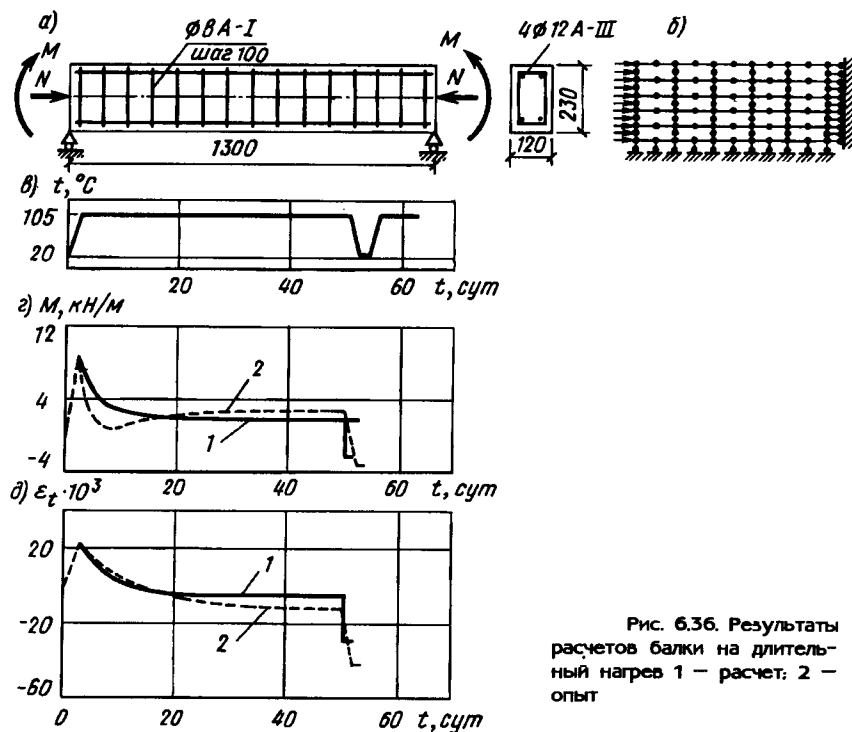


Рис. 6.36. Результаты расчетов балки на длительный нагрев 1 — расчет; 2 — опыт

Армирование конструкции, которое носит в данном случае дискретный характер, потребовало применения специальных изопараметрических бетонных элементов, содержащих в своем составе сосредоточенную арматуру. Описание таких элементов впервые дано Д. Филлипсом и О. Зенкевичем. Разработанные процедуры по этим элементам были включены в состав библиотеки.

Расчетная схема фрагмента представлена на рис. 6.35, а. Были осуществлены два расчета. Первый выполнен без учета влияния температуры только от усилий предварительного натяжения и избыточного давления. Полученные в результате расчеты перемещения точек фрагмента, деформации в процессе трещинообразования сопоставлялись с опытными данными. Наблюдалось достаточно хорошее их совпадение. Отклонения не превышали 5—12%. Второй расчет, результаты которого представлены на рис. 6.35, б, в, осуществлялся на совместное действие усилий предварительного натяжения и перепада температур. Температура на внутренней грани t_b изменялась пятью ступенями по 50°C, на наружной грани оставлялась постоянной, равной $t_n = 20^\circ\text{C}$. Расчетные данные в виде эпюр напряжений (рис. 6.35, б, сплошные линии) в процессе трещинообразования

сопоставлялись с результатами расчетов Д. Филлипса и О. Зенкевича (на рис. 6.35, б, пунктир). Имеющиеся отклонения объясняются тем, что Д. Филлипс и О. Зенкевич не учитывали изменения механических характеристик материалов в результате нагрева.

В Макеевском ИСИ под руководством А.П. Кричевского проводились экспериментальные исследования железобетонных балок прямоугольного сечения с неизгибаемой продольной осью на длительный неравномерный нагрев. Рассматривался расчет одной из таких балок. Ее конструкция представлена на рис. 6.36, а.

Балка изготовлялась из бетона класса В30 и армировалась арматурой класса А-II. Нижняя грань нагревалась до 105°C, на верхней поддерживалась постоянная температура 20°C. Распределение температуры по высоте сечения принималось параболическим. К балке прикладывалась продольная сила 300 кН. Расчетная схема, представленная на рис. 6.36, б, была принята с учетом симметрии конструкции. Закрепление узлов осуществлялось из условия обеспечения неподвижности продольной оси. Режим нагрева показан на рис. 6.36, в. Из расчетов получены напряжения, деформации в элементах, перемещения узлов. По величинам горизонтальных опорных реакций вычислялись изгибающие моменты. На рис. 6.36, г представлено значение этих моментов, на рис. 6.36, д — температурные деформации нейтральной оси. Здесь же дано сопоставление с опытными данными. Имеется хорошее качественное и неплохое количественное совпадение результатов.

Среди других решений следует выделить решения, полученные А.С. Сахаровым и А.Л. Козаком [94] и другими на базе синтеза представленной в гл. 6 теории деформирования железобетона с трещинами с деформационной теорией пластичности бетона Г.А. Гениева, применяемой для областей конструкций без трещин (рис. 6.37, 6.38). Рассматривался расчет различных массивных железобетонных фундаментов совместно с основанием. В расчетах использовались специальные моментные конечные элементы, разработанные А.С. Сахаровым.

На рис. 6.37 представлены результаты расчета круглого фундамента с учетом трещинообразования в плите и нелинейных деформаций основания. Расчетная схема плиты и основания показана на рис. 6.37, а. В процессе нагрузки фундамента силой Q происходило развитие радиальных I и кольцевых II трещин (рис. 6.37, б) и увеличение осадок основания. Учет трещинообразования приводил к значительному перераспределению напряжений и повышению несущей способности фундаментов. К таким же результатам пришел раньше В.И. Соломин и И.И. Шишов [152], используя для расчета плит более приближенную модель деформирования плиты с трещинами, предложенную в работах [54, 61] автора монографии. Картина образования трещин (I — кольцевых, II — радиальных) и разрушения бетона от раздробления (III) в более массивных фундаментах

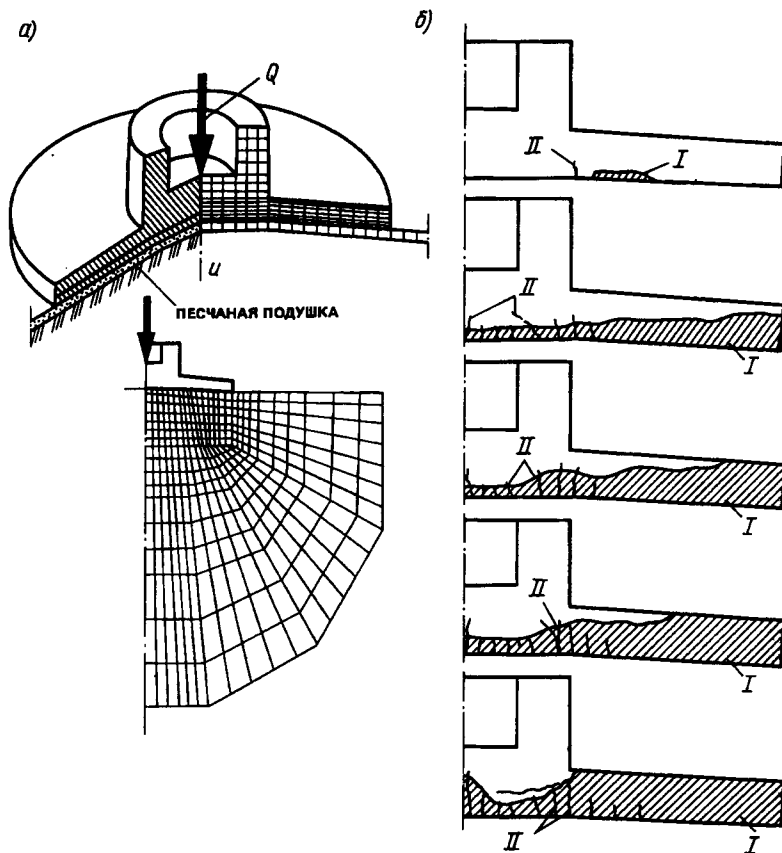


Рис. 6.37. Результаты расчетов круглого фундамента

представлена на рис. 6.38. Здесь в отличие от рассмотренного на рис. 6.37 примера учет пластических деформаций в грунте привёл к заметному повышению несущей способности. При этом вокруг фундамента создавалось подобие некоторой грунтовой обоймы.

Представленная здесь теория деформирования железобетона с трещинами нашла применение и в расчетах других конструкций. Так, В.М. Круглов и А.Н. Донец рассмотрели расчет различных мостовых конструкций на базе изопараметрических конечных элементов; В.С. Кукунаев и А. Джанкулаев рассмотрели расчет плит с учетом действия поперечных сил, ряд сложных задач были решены под руководством А.И. Козачевского. Можно было указать и на другие решения.

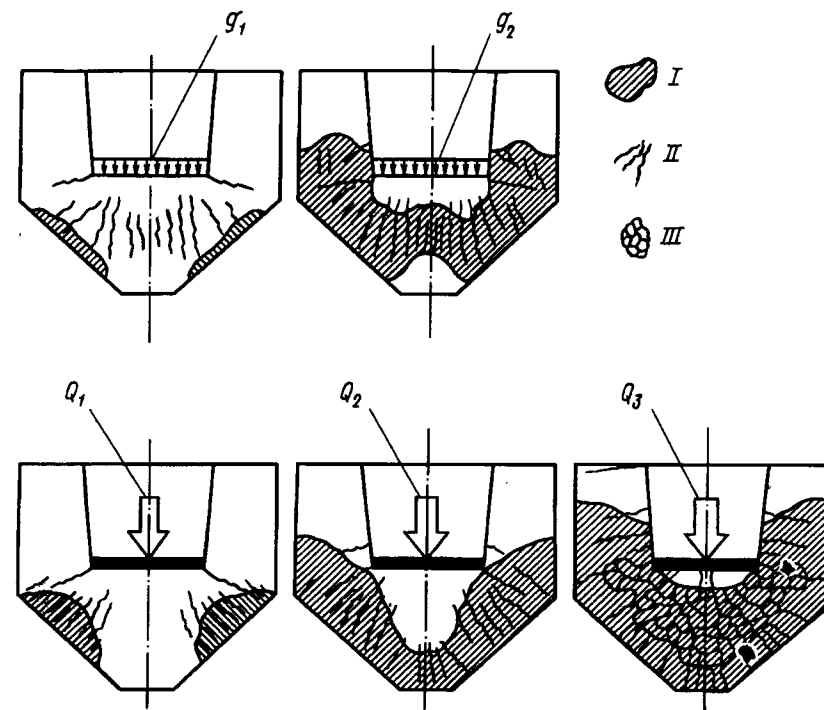


Рис. 6.38. Результаты расчетов массивного фундамента

Указанные примеры иллюстрируют большие возможности разработанной модели деформирования железобетона в сочетании с МКЭ и другими вычислительными методами. Фактически создается возможность полностью автоматизировать все этапы нелинейного расчета и реального проектирования железобетонных конструкций различной сложности.

7.1. ОСОБЕННОСТИ РАЗВИВАЕМОГО ПОДХОДА

В представленных выше формулах, хотя и учитывалось реальное расположение арматурных стержней (этот весьма важный фактор должен учитываться в различных моделях), однако площадь стержней сглаживалась — распределялась равномерно на определенную, в некоторых случаях довольно малую как, например, при учете одиночных стержней, площадь того или иного сечения, нормального к направлениям соответствующих стержней арматуры. Такую модель условно можно отнести к модели железобетона с сглаженными характеристиками арматуры. Сглаженная модель значительно упрощает решение задач и позволяет получить хорошее согласование с данными экспериментов.

В то же время в зонах анкеровки арматуры, при расчете арматуры в виде отдельных анкеров в бетоне, при расчете закладных деталей и отдельных узлов и в ряде других случаев, указанные ранее подходы сглаженной модели могут приводить или к погрешностям или оказаться мало применимыми. Для более точного решения таких задач железобетон уже необходимо рассматривать как систему, состоящую из двух элементов — бетона и дискретно расположенных стержней арматуры.

Такая система включает в себя: модель бетона, как правило, при объемном напряженном состоянии; соответствующую модель арматурных стержней и модель механического взаимодействия (сцепления) арматурного стержня с бетоном, учитывающую особенности сложного напряженно-деформированного состояния контактной зоны. Модели бетона и арматуры в отдельности рассмотрены в работах [61, 69, 74, 77 и др.]; они также приведены в гл. 3—6. Поэтому здесь остановимся на третьей части модели, конкретно на моделировании сцепления арматуры с бетоном.

Традиционные теории сцепления, изложенные в работах [36, 133, 161] и других, базируются на задании в той или иной форме эмпирической характеристики контакта (закона сцепления), выражающей связь между взаимными смещениями (сдвигами) арматуры и бетона и контактными касательными напряжениями.

Далее делается попытка отказаться от эмпирического описания свойств контактного слоя и смоделировать действительное напряженно-деформированное состояние бетона контактной зоны. Это позволяет с единых позиций рассмотреть вопросы определения осевых смещений арматуры относительно бетона, раскалывания бетона арматурой, а также характер искривления (депланации) бетона вокруг

арматурного стержня, которые обычно изучались разрозненно. Основы такого подхода разработаны в работе Н.И. Карпенко [60], а затем развиты в [71, 71 а].

В модель сцепления входят: учет влияния местного смятия бетона под выступами арматуры (в зависимости от профиля) на смещение арматуры относительно бетона; формулировка условий, определяющих образование и развитие различного рода контактных трещин конических и радиальных; моделирование процесса деформирования и разрушения бетона конических оболочек с учетом перехода на ниспадающую ветвь; учет влияния деформаций бетона в зоне контактных трещин на смещение арматуры относительно границы указанной зоны. Отдельно стоит задача по определению взаимодействия бетона контактной зоны с прилегающим к ней бетоном конструкции.

В связи с этим контактная зона условно разделена на две зоны: зону I, включающую в себя бетонные консоли, непосредственно находящиеся под выступами арматуры, и следующую за бетонными выступами зону II развития конических 1' и радиальных 2' трещин (рис. 7.1, а, б). Эти зоны исследуются в общем виде применительно к различным задачам сцепления арматуры с бетоном и с различным профилем арматуры. За зоной конических трещин следует сплошная бетонная оболочка или обойма III, (рис. 7.1, а), описание которой здесь дано для бетонных призм с центрально расположенными

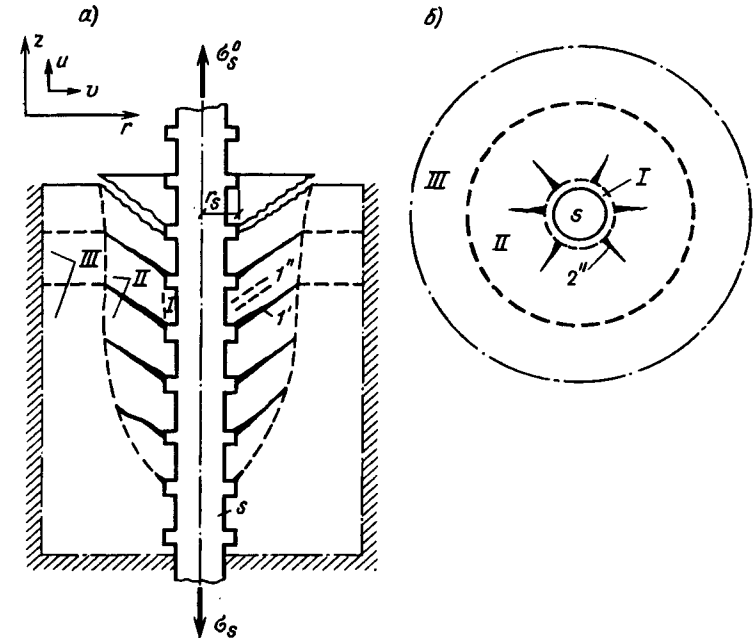


Рис. 7.1. Зона сцепления арматуры s с бетоном и ее элементы

стержнями при нагружении их по схеме выдергивания арматуры из бетона или по схеме выдергивания арматуры из бетона по схеме центрально-растянутых образцов. Эти образцы выбраны с единственной целью — обеспечить подсчет большого экспериментального материала и проверить «работоспособность» модели контактной зоны. В практических расчетах модель контактной зоны следует увязать с моделью всего железобетонного элемента или конструкции, рассчитываемых методом конечных элементов или другими общими методами решения задач.

7.2. МЕСТНОЕ СМЯТИЕ БЕТОННЫХ КОНСОЛЕЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ МЕЖДУ ВЫСТУПАМИ АРМАТУРЫ

Здесь, следя существовавшей ранее традиции, сжимающие напряжения примем за положительные. Взаимодействие арматуры периодического профиля с бетоном носит сложный характер. На рис. 7.2, а, б (слева) показана схема контактных напряжений, действующих на поверхность бетонной консоли, заключенной между двумя арматурными выступами, при смещении стержня в бетоне вдоль оси z (τ_c — касательные напряжения склеивания, а затем трения бетона с гладкой частью поверхности арматуры; σ_z^c — напряжения сжатия (смятия) бетона под выступами арматуры; σ_z^o — напряжения отрыва с обратной стороны выступов арматуры; σ_r^k — радиальные напряжения). Предполагаем, что резко неоднородная картина напряженного состояния бетона носит локальный характер и

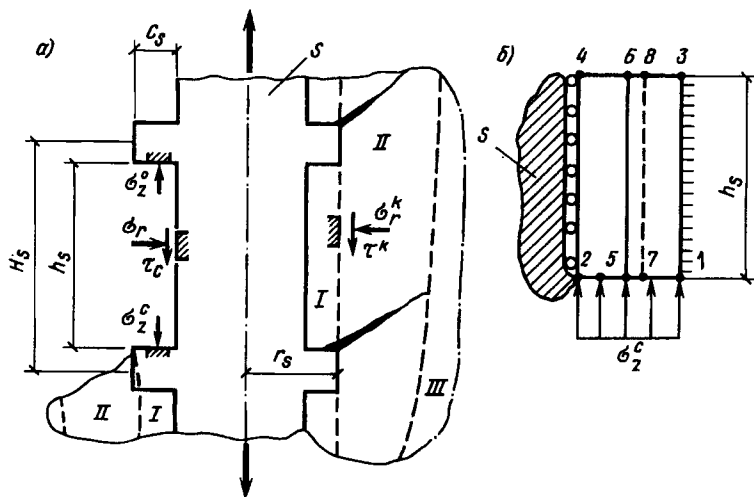


Рис. 7.2. К анализу смятия бетона под выступами арматуры в зоне I

должна учитываться только при расчете деформаций бетонных консолей и при учете влияния этих деформаций на смещение арматуры относительно бетона. Наиболее значительными из указанных выше напряжений являются напряжения смятия σ_z^c . Значения τ_c и σ_z^o носят вспомогательный характер и их вклад в сцепление составляет 5–15%. Ниже эти напряжения не будем выделять отдельно, предполагая, что работа бетона под выступом профиля арматуры определяется в основном напряжениями σ_z^c .

При рассмотрении напряженного состояния бетона за выступами арматуры (см. рис. 7.2, а справа) полагаем, что воздействие арматуры на бетон носит более однородный характер и определяется условными контактными касательными τ^k и радиальными напряжениями σ_r^k . Эти величины непосредственно фигурируют в модели, поэтому через них выражаются все локальные напряжения, в том числе и напряжения

$$\sigma_z^c = \frac{2\tau^k H_s r_s}{C_s (2r_s - C_s)} \quad (7.1)$$

Расчет бетонной консоли осуществляется двумя способами. В одном случае решалась осесимметричная объемная задача теории упругости с включением части бетона, прилегающего к консоли, в другом случае — консоль рассматривалась как плоская с граничными условиями, показанными на рис. 7.2, б (по линии 1–3 — упругое защемление, по линии 2–4 — катковые опоры).

Данные предварительных расчетов показали, что напряженно-деформированное состояние в плоскости консоли 1–2–4–3, ограниченной контуром 2–4–8–7 и охватывающей 2/3 площади рассматриваемой плоскости, мало зависит от условий закрепления вдоль линии 1–3 и от того, решается плоская или объемная задача. Поэтому при исследовании работы бетонных консолей принималась простая расчетная схема (см. рис. 7.2, б), а решение объемной осесимметричной задачи теории упругости использовалось в последующем лишь для определения момента возникновения и характера развития контактных трещин.

Расчет бетонной консоли как плоской конструкции проводили методом конечных элементов с использованием конечных элементов треугольной формы. При этом напряжения определяли как средние из значений для двух смежных элементов, образующих один прямоугольный элемент. В результате проведенных вычислений были получены значения вертикальных u и горизонтальных v перемещений и соответствующих касательных τ и нормальных σ_z , σ_r напряжений для отдельных элементов консоли.

Расчетные эпюры напряжений для консолей аппроксимировались некоторыми кусочно-линейными зависимостями и в таком виде

уже использовались в последующих вычислениях. Аппроксимации приведены в работе [60] (форма эпюры σ_z по высоте консоли изменяется в зависимости от отношения ее высоты h_s к вылету C_s). Напряжения сжатия σ_z в бетонных консолях от давления на них выступов арматуры использовались при определении перемещений арматуры g_k вследствие сжатия этих консолей.

Анализ данных расчета по методу конечных элементов показал, что вертикальные перемещения точек консоли, расположенных на ее нижней поверхности, более чем на порядок ниже, чем перемещения точек, расположенных по верхней грани. На основании этого перемещение точки *b* на линии 5–6 можно было принять равным нулю и вычислить перемещение точки *5*, исходя из укорочения линии 5–6. Результаты численного эксперимента представилось возможным аппроксимировать простой зависимостью в виде

$$g_k = \frac{\sigma_z^c C_s \beta}{E_b^0 \nu_b}, \quad (7.2)$$

где β — параметр, зависящий от геометрических размеров профиля (от отношения h_s/C_s , при $h_s/C_s = 2:1$ $\beta = 0,85$; при $3:1$ $\beta = 1,05$; при $4:1$ $\beta = 1,18$; при $5:1$ $\beta = 1,25$; при $10:1$ $\beta = 1,38$; при $20:1$ $\beta = 1,75$); ν_b — коэффициент изменения секущего модуля деформации бетона, определяемый по формуле (3.2), заменяя $\hat{\nu}_b$ на $\hat{\nu}_{b3}$

$$\nu_b = \hat{\nu}_{b3} + (1 - \hat{\nu}_{b3}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}$$

при уровнях напряжений η , принимаемых

$$\eta = \sigma_z / R_{bc} \gamma^c, \quad \hat{\nu}_{b3} = \hat{\nu}_b / \gamma^c; \quad (7.3)$$

здесь R_{bc} — призматическая прочность бетона; средняя, нормативная или расчетная в зависимости от вида проверок; γ^c — коэффициент, учитывающий увеличение прочности бетона в зоне *I* при стесненном объемном напряженном состоянии (в среднем равен 2,5; коэффициент согласовывается с результатами, полученными по критериям прочности [72, 102, 172]).

Напряжения, приводящие к большему увеличению коэффициента γ^c , как показали численные расчеты, не могут реализовываться в бетоне консоли из-за того, что раньше наступало разрушение бетонной конической оболочки, заключенной между коническими трещинами, в местах ее примыкания к консоли, где указанное стеснение деформаций может происходить только по двум направлениям. Это говорит о том, что, если в опыте при изучении сцепления нарушать образование регулярной системы конических оболочек, то будут получены завышенные характеристики предельных напряжений смятия и соответственно значения перемещений g_k .

Определение деформаций бетона в зонах смятия можно будет уточнить на основе физических соотношений, представленных в гл. 3 (они были установлены уже после проведения данного исследования), хотя предварительно необходимо учесть влияние масштабного фактора

на деформации и прочность консолей. В этом плане параметр γ^c может представляться как параметр, учитывающий влияние и этого фактора.

Выражая напряжение σ_z^c через средние касательные напряжения на основании (7.1), формулу (7.2) можно представить в виде

$$g_k = \tau^k B_q; \quad (7.4)$$

$$B_q = \frac{2 H_s r_s \beta}{(2 r_s - C_s) E_b^0 \nu_b}, \quad (7.5)$$

где B_q — величина, характеризующая жесткость бетонных консолей смятию бетона под выступами арматуры.

Кроме того, по результатам решения бетонных консолей по методу конечных элементов были определены также средние значения радиальных напряжений σ_r^k по контакту с арматурой на стадии до появления контактных трещин

$$\sigma_r^k = \frac{2 e_k \tau^k r_s}{(2 r_s - C_s)} \left(1 - \frac{2 C_s}{3 r_s} \right), \quad (7.6)$$

где e_k — коэффициент, зависящий от формы консоли (при $h_s/C_s = 2:1$; $e_k = 0,146$; при $h_s/C_s = 3:1$; $e_k = 0,177$; при $h_s/C_s = 5:1$; $e_k = 0,192$).

Значения σ_r^c в дальнейшем используются при расчете горизонтальных перемещений внешней бетонной обоймы до образования конических трещин.

7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ КОНТАКТНЫХ КОНИЧЕСКИХ И РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН

Конические трещины. Как показывают результаты экспериментальных исследований [162, 207], внутренние контактные трещины образуются у вершин поперечных выступов арматуры периодического профиля. Представим способ определения углов наклона конических контактных трещин и радиусов их проникновения r_c . Экспериментальное выявление характера концентрации напряжений в бетоне, определяющего динамику распространения контактных трещин, связано со значительными трудностями, а в отдельных случаях практически неосуществимо. В то же время, используя современные методы расчета и вычислительную технику, можно получить достаточно достоверную и подробную картину напряженного состояния бетона в зоне, примыкающей к арматуре периодического профиля.

С этой целью была численно решена осесимметричная объемная задача теории упругости. Из бетонной среды у контакта с арматурой выделялась некоторая расчетная область ω (рис. 7.3, а) в виде условного цилиндрического тела, упруго заделанного в окружающую

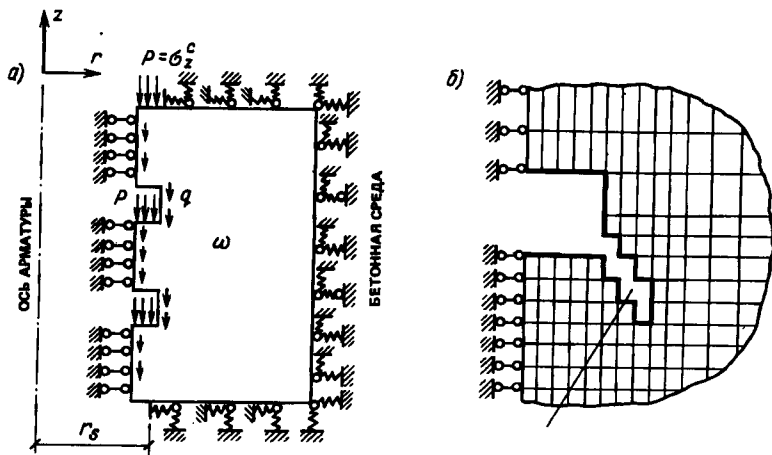


Рис. 7.3. Расчетные схемы

бетонную среду и находящегося под воздействием нагрузки. Взаимодействие выделенной локальной области с окружающей бетонной средой моделируется упругими связями, жесткость которых определяется с помощью коэффициента постели для бетона.

На поверхности внутренней плоскости выделенного цилиндра, копирующей рельеф арматуры (выступы и впадины), задаются условия, отвечающие характеру совместной работы арматуры с бетоном. Расчет модельной области проводился разностным методом на неоднородной прямоугольной сетке (рис. 7.3, а, б, где показан фрагмент области ω).

В вариантах расчета из этих прямоугольных элементов компоновались микротрещины, имитирующие местные трещины, развивающиеся от вершин поперечных выступов арматуры в глубь бетона (рис. 7.3, б). Этот прием позволял определить напряженно-деформируемое состояние бетона после образования в нем трещин и изменение напряженного состояния в устье щели по мере ее развития. Щель продолжалась по элементам, в которых главные растягивающие напряжения становились наибольшими. Методика расчета подробно изложена в работе [71] и др. Здесь приведем лишь окончательные результаты расчетов.

В осесимметричном случае отличными от нуля могут быть только четыре компоненты тензора напряжений $\sigma_z, \sigma_r, \tau_{rz}, \sigma_\theta$ и деформаций $\varepsilon_z, \varepsilon_r, \gamma_{rz}, \varepsilon_\theta$, показанные на рис. 7.4, а; σ_1, σ_2 — главные напряжения (σ_1 — максимальные, σ_2 — минимальные).

Напряженно-деформированное состояние осесимметричных тел при осесимметричном нагружении полностью определяется двумя компонентами перемещений: радиальными перемещениями v вдоль оси Or и осевыми u вдоль оси симметрии Oz .

Угол α между направлением наибольшего главного напряжения σ_1 и осью r :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\tau_{rs}} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_z}{\tau_{rz}}. \quad (7.7)$$

Положительное значение угла α показано на рис. 7.4, б.

При расчете полагали, что радиальные перемещения цилиндрической поверхности бетона по контуру с арматурой отсутствуют. Поэтому в этих местах вводятся жесткие двусторонние связи (см. рис. 7.3, а). Действующие нагрузки p, q задавались на площадках под поперечными выступами арматуры и по боковой поверхности контакта арматуры с бетоном.

Принимали, что доля нагрузки, передаваемая через поперечные выступы арматуры, составляет 85% всей нагрузки, действующей в пределах шага выступов. В расчетах рассматривался бетон класса В22,5 с модулем упругости $E^0 = 31\,000 \text{ Н/мм}^2$, коэффициентом Пуассона $\mu_k^0 = 0,2$ и коэффициентом постели $k = 350 \text{ Н/мм}^3$. Изучалось напряженное состояние от условной нагрузки, передаваемой с арматуры на бетон в пределах одного шага поперечных выступов арматуры, равной 10 кН.

На рис. 7.5, а, б представлены некоторые результаты расчетов: изолинии максимальных главных напряжений σ_1 (рис. 7.5, а) и

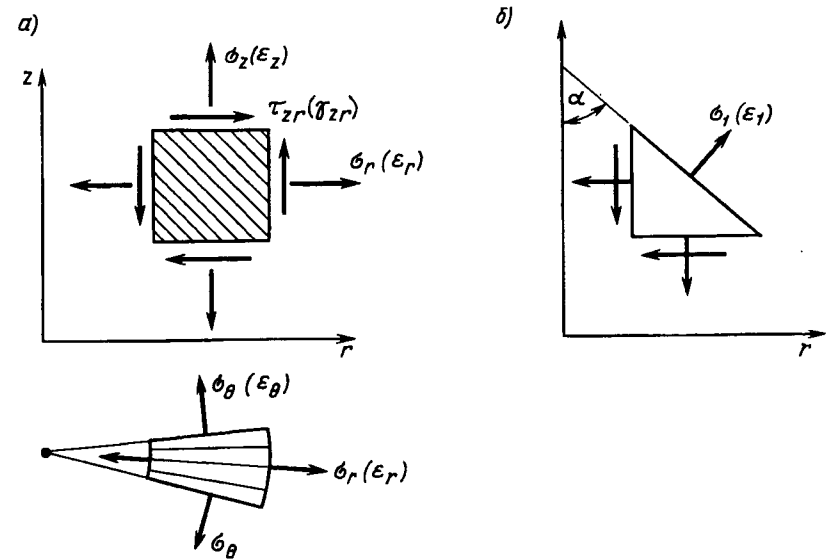


Рис. 7.4. Компоненты напряженно-деформированного состояния

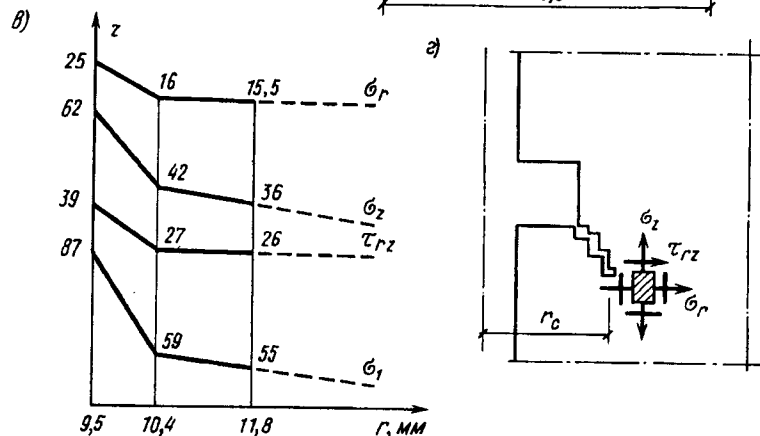
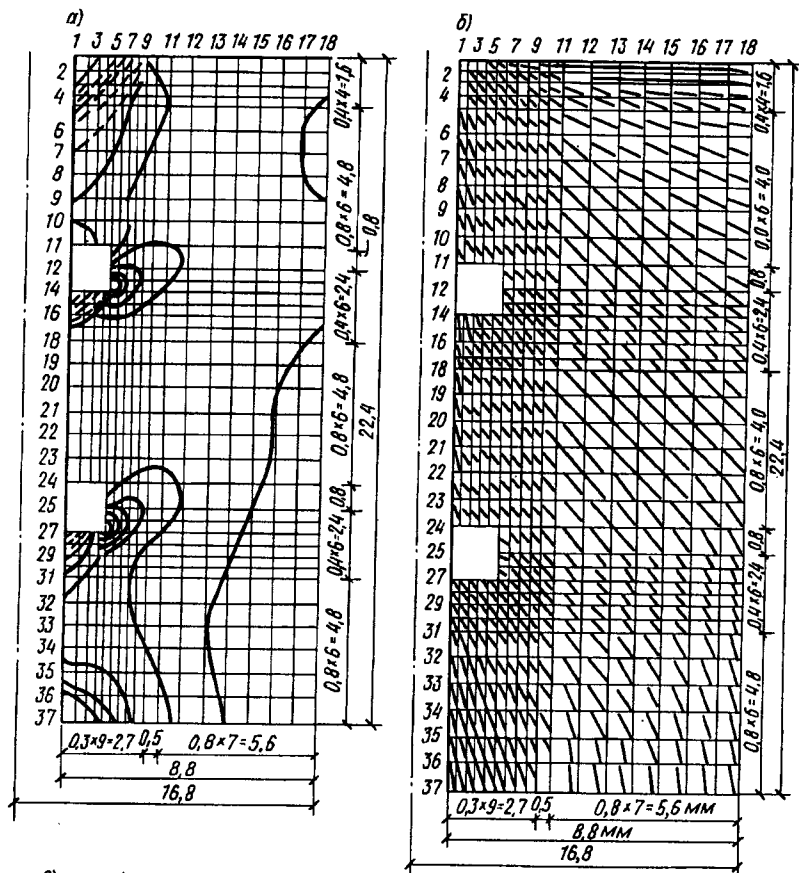


Рис. 7.5. К определению напряжений в устье трещины а — изолинии главных напряжений; б — ориентация главных площадок; в, г — график и схема напряжений в устье щели-трещины

соответствующим образом ориентированные площадки (рис. 7.5, б) по которым они действуют. На поле изолиний напряжений σ_1 хорошо прослеживается резкая концентрация растягивающих напряжений у вершин поперечных выступов арматуры. Аналогичная картина наблюдается и для вариантов расчета модельной области с заданными трещинами. Диаграммы изменения напряжений в устье трещины, точнее прорези, по мере ее проникновения в глубь бетона (в функции от r , рис. 7.5, з) показаны на рис. 7.5, в.

Анализ полученных напряжений в устье развивающейся контактной трещины показал, что их можно аппроксимировать некоторыми кусочно-линейными функциями, от величины \tilde{r} — относительной радиальной координаты вершины (устья) трещины, отсчитываемой от оси арматурного стержня ($\tilde{r} = r/r_s$, где r_s — радиус арматуры), и величины τ^k . Так, при $1 < \tilde{r} < 1,08$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \tau^k [2,04 + 9,1 (1,095 - \tilde{r})]; \\ \tau_{rz} &= \tau^k [1,26 + 6,45 (1,095 - \tilde{r})]; \\ \sigma_r &= \tau^k [0,71 + 5 (1,095 - \tilde{r})] \end{aligned} \right\} \text{при } 1,08 < \tilde{r} < 1,22:$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \tau^k [2,11 + 2,5 (1,22 - \tilde{r})]; \\ \tau_{rz} &= \tau^k [1,09 + 1,34 (1,22 - \tilde{r})]; \\ \sigma_r &= \tau^k [0,55 + 1,18 (1,22 - \tilde{r})]; \end{aligned} \right\} \text{при } \tilde{r} > 1,22:$$

где R — внешний радиус бетонного образца.

Представленные зависимости получены для диаметров арматуры, близких к 16 мм. Их применимость для других диаметров требует дополнительного анализа.

По вычисленным компонентам напряжений $\sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_r$ определялись главные напряжения σ_1 и σ_2 . При этом величина σ_2 , вычисляемая по формулам (7.8), суммировалась с величиной σ_3 , определяемой ниже для сплошной бетонной обоймы, окружающей цилиндрическую зону с контактными трещинами.

Считали, что контактные трещины образуются в плоскости rz , если нарушается условие (2.51), которое можно записать в виде

$$\sigma_1 \leq R_{bt} \gamma_{bt} \gamma_{btg}, \quad (7.9)$$

где γ_{bt} — коэффициент, учитывающий влияние других главных напряжений (σ_2 и σ_3 , в данном случае $\sigma_3 = \sigma_\theta$) на образование трещин

$$\gamma_{bt} = k_{t2} k_{t3} / k_{o2} k_{o3}; \quad (7.10)$$

здесь параметры k_{ti} ($i = 2, 3$) вычисляются по формулам (2.52), (2.53):

$$k_{ti} = 1 - \left[\frac{(1 - 2C) S_i}{1 - 2CS_i} \right]^2;$$

$$S_i = \frac{\sigma_i + pR_{bt}}{pR_{bt} - R_{bc} k_c}; \quad (7.11)$$

$$-0,3 \leq C = \frac{0,3(22 - R_{bn})}{11} \leq 0,3;$$

здесь параметры 22 и 11 принимаются в МПа; k_c вычисляется по формуле (2.30); в данных задачах в среднем можно принимать $k_c \approx 1,25$; $0 < p < 2$; в данных задачах $p \approx 0$; k_{oi} вычисляются по формулам для k_{ti} , полагая $S_i = 0$; γ_{btg} — коэффициент, учитывающий влияние градиентов напряжений на момент трещинообразования (при рассмотрении радиальных трещин $\gamma_{btg} \approx 1,25$).

Если расчет выполняется в линейной стадии деформирования, то вместо параметра γ_{btg} вводится произведение двух параметров (γ_n , γ_{btg}), где γ_n учитывает влияние перераспределения напряжений на момент трещинообразования; этот параметр рассмотрен ниже. Расчеты показали, что угол наклона контактных трещин к оси арматуры может изменяться в пределах 18–60°.

Радиальные трещины возникают вследствие раскалывания арматурой бетонного окружения. Исследованиями [71а] установлено, что в этом случае можно использовать решение Ляме для толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением (рис. 7.6). Последнее корректируется с учетом следующих факторов: перераспределения напряжений в результате развития нелинейных деформаций в бетоне (оценивается параметром $\gamma_n = 2 - \beta_1$), изменения максимальных растягивающих напряжений при развитии радиальных трещин вследствие условного увеличения радиуса внутреннего отверстия (оценивается параметром β_1/β), а также влияния радиальных и осевых напряжений (σ_r и σ_z) на площадках, ортогональных к площадке развития трещины у ее устья, на снижение сопротивления бетона растяжению по сравнению с прочностью R_{bt} при одноосном растяжении (учитывается параметром γ_{bt}). Параметры β , β_1 определялись по формулам:

$$\beta_1 = (R_B + l_R) / R_n; \quad \beta = R_B / R_n, \quad (7.12)$$

l_R — длина радиальных трещин с началом отсчета от поверхности R_B , здесь от поверхности арматуры ($R_B = r_s$); R_n — наружный радиус (радиус окружности, описанной вокруг стержня так, чтобы ее линия касалась наружной поверхности конструкции или элемента; в простейшем случае $R_n = r_s + a_s$, где a_s — толщина защитного слоя бетона;

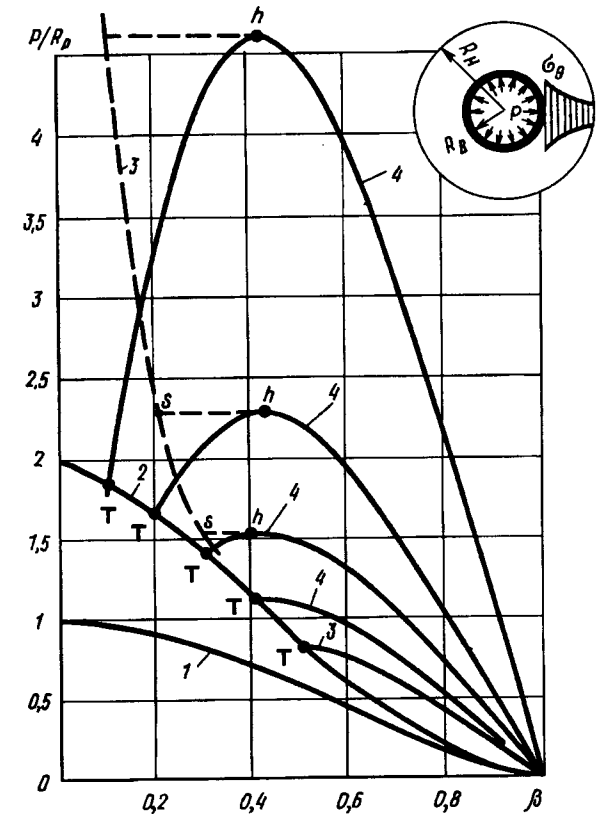


Рис. 7.6. К расчету на раскалывание арматурой толстостенной бетонной обоймы

параметр k_{bt} вычисляли по формуле (7.10); приближенно вводя вместо σ_1 и σ_2 значения σ_r и σ_z .

В общем виде условие нераспространения радиальных макротрещин записывается в виде

$$\frac{p}{R_{bt}} \leq \frac{\gamma_{bt} \gamma_{btg} (2 - \beta_1) (1 - \beta_1^2)}{\beta (1 + \beta_1^2)}, \quad (7.13)$$

где $p = \sigma_r$ в устье трещины (до образования трещин $\sigma_r = \sigma_z$, см. формулу (7.6), затем используются формулы, приведенные в гл. 7.3).

Полагая в (7.13) $\gamma_{bt} = \gamma_{btg} = (2 - \beta_1) = 1$, приходим к известному решению Ляме для толстостенной трубы.

В начальной стадии проверяли выполнение условия (7.13) при $l_R = 0$. Если условие трещиностойкости соблюдается, то трещины считаются отсутствующими; если оно нарушается, то необходимо найти последовательным приближением такое значение β_1 , которое

приводит к соблюдению условия (7.13) в виде равенства. Если такое значение отсутствует на всех расчетных участках, то трещина пронизывает бетонную оболочку насквозь.

Результаты расчета для бетона $R_{bc} = 12 R_{bt}$ представлены на рис. 7.6. Кривая 1 отражает результаты расчета начала образования трещины раскалывания на внутренней поверхности толстостенной бетонной обоймы, работающей как упругоизотропное тело. Кривая 2 показывает аналогичные результаты, соответствующие обойме при упругопластической работе бетона; вычисляется по формуле (7.13) при $l_R = 0$. Кривая 3 — разрушающие нагрузки, т.е. те, при которых трещины раскалывания расчлениют все тело толстостенной обоймы и выходят на ее внешнюю поверхность сразу после их образования. Кривые 4 относятся к нагрузкам, вызывающим дальнейшее продвижение трещины раскалывания для обойм с различной характеристикой массивности β (t — точки начала образования трещин, th — отрезки, при которых развитие трещин нуждается в увеличении внутреннего давления, $sh = l_R$ — длины трещин в вершинах максимальной прочности; ts — отрезки повышения радиального давления в зависимости от коэффициента массивности β ; s — кривая указанных резервов повышения внутреннего давления).

Сопоставление этих данных свидетельствует о том, что учет перераспределения усилий в бетоне позволяет вывить значительные резервы прочности при $\beta < 0,4$, т.е. для массивных элементов. В то же время для бетонных обойм, толщина стенок которых не превышает половины их наружного радиуса ($\beta > 0,5$), трещины, образовавшиеся на внутренней поверхности, распространяются на всю толщину стенки без дальнейшего повышения давления p .

7.4. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЗОНЫ КОНИЧЕСКИХ ТРЕЩИН. ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ ОБРАЗОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ТРЕЩИН

Приведенные выше исследования позволили определить границы зоны II — проникновения конических контактных трещин. Внешняя граница этой зоны определяется переменным радиусом $r = f(z)$, а внутренняя — радиусом арматуры r_s . Обозначим $\tilde{r} = r/r_s$; $\tilde{r}_c = r_c/r_s$, где r — радиальная координата железобетонного образца.

В расчетной модели принято, что контактные конические трещины могут зарождаться у вершин каждого из поперечных выступов периодического профиля арматуры, разделяя бетон у контакта на отдельные бетонные конические оболочки. Регулярно расположенные конические оболочки отличаются граничным радиусом r_c и углом наклона α к оси арматуры z ; эти величины могут изменяться вдоль оси z в зависимости от характера напряженного состояния элемента. Одна из таких оболочек выделена на рис. 7.7, а, б; H_s — толщина бетонной оболочки ($H_0 = H_s \sin \alpha$, где H_s — шаг выступов арматуры периодического

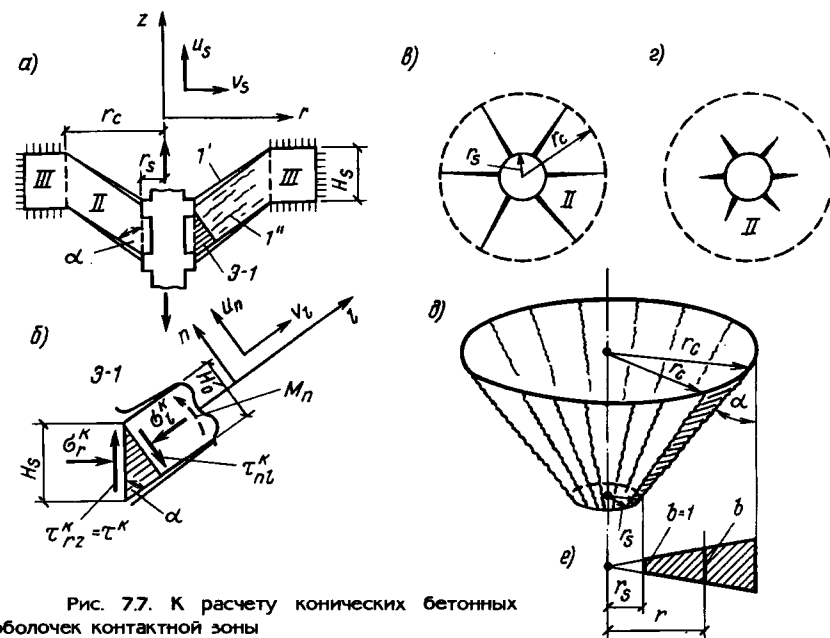


Рис. 7.7. К расчету конических бетонных оболочек контактной зоны

профиля). Конические оболочки, кроме того, могут иметь или не иметь радиальные трещины раскалывания, развивающиеся по плоскостям, проходящим через ось арматуры и разделяющие конические бетонные оболочки на консольные балочные элементы.

При определении расчетной схемы конических бетонных оболочек можно выделить два случая: случай 1, когда бетон конической оболочки дополнительно разделен на полоски радиальными трещинами (рис. 7.7, в), и случай 2, когда радиальные трещины отсутствуют или имеются на части оболочки (рис. 7.7, г). Рассмотрим случай 1, который принят в качестве основного.

В случае 1 расчетные конические оболочки пронизаны радиальными трещинами и таким образом разделены на некоторые начальные расчетные полоски или расчетные призмы переменной ширины (одна из таких полосок заштрихована на рис. 7.7, д, е). Выделим одну из таких полосок (рис. 7.8, а), направив оси l вдоль образующей срединной поверхности оболочки, а ось n нормально к ней в плоскости rz . Пусть r — радиальная координата, тогда переход к координате l можно осуществить по формулам:

$$l = r / \sin \alpha = r_s \tilde{r} / \sin \alpha; \quad l_s = r_s / \sin \alpha;$$

$$dl = dr / \sin \alpha = r_s d\tilde{r} / \sin \alpha; \quad \tilde{l}_s = l / l_s = \tilde{r},$$

где α — угол наклона образующей оболочки к оси z .

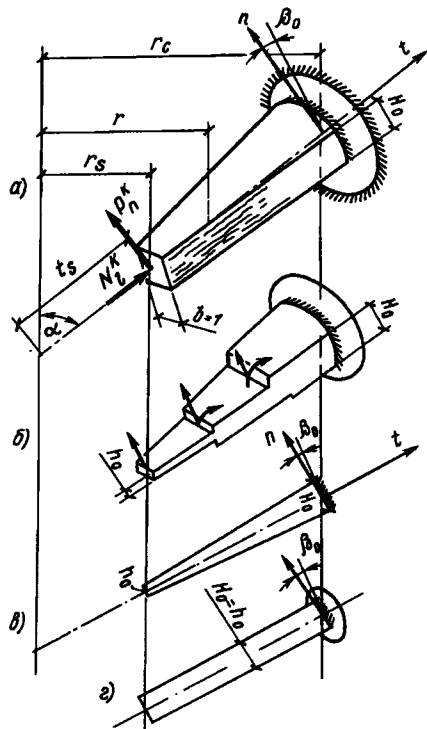


Рис. 7.8. К анализу изгиба и сжатия полосок бетона между коническими и радиальными трещинами

Обозначим через u_s перемещения арматуры вдоль оси z , а через v_s поперечные перемещения точек поверхности арматуры вдоль оси r . Перемещения полос бетона в зоне II вдоль осей z и r обозначим соответственно в виде u и v (u^k, v^k и u^o, v^o — перемещения полос бетона соответственно на границах r_s и r_c). В расчете непосредственно определяются перемещения полос бетона — значения u_n и v_l соответственно вдоль осей n и l (u_n^k, v_l^k и u_n^o, v_l^o — это перемещения u_n и v_l на границах r_s и r_c). Учитывая, что

$$u = u_n \sin \alpha + v_l \cos \alpha; \quad v = -u_n \cos \alpha + v_l \sin \alpha \quad (7.14)$$

или

$$u_n = u \sin \alpha - v \cos \alpha; \quad v_l = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad (7.15)$$

перемещения полос бетона на границе r_s — на контакте с арматурой, можно связать с перемещениями арматуры следующими очевидными равенствами:

$$\left. \begin{aligned} u_s - g_k &= u^k = u_n^k \sin \alpha + v_l^k \cos \alpha; \\ v_s &= v^k = -u_n^k \cos \alpha + v_l^k \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

где g_k — взаимные смещения между арматурой и бетоном у контакта. Перемещения u^o и v^o выражаются через перемещения u_n^o и v_l^o на границе r_c также по формулам (7.15).

Кроме того, предполагается, что полосы бетона на границе r_c упруго закреплены от поворотов (граничный поворот равен β_0), а на границе r_s поворот сечения свободен (имеется шарнирное соединение). Ввиду развития пластических деформаций и дополнительных трещин в расчетных полосах бетона у контакта некоторым пренебрежением полос на границе r_s пренебрегаем. На контакте с арматурой полосы бетона имеют перемещения u_n^k и v_l^k , зависящие от деформированного состояния арматурного стержня. Чтобы вызвать u_n^k , к расчетному элементу полосы бетона (рис. 7.8, а) необходимо приложить силу $P_n^k = \tau_{nl}^k H_0$, где τ_{nl}^k — средние касательные напряжения по сечению H_0 от поперечной силы $Q_k = P_n^k$. Перемещения v_l^k будут вызываться силой сжатия полос бетона $N_l^k = \sigma_l^k H_0$, направленной вдоль оси l расчетной полосы (σ_l^k — напряжения сжатия полосы бетона).

В зоне II, следуя сложившейся в теории сцепления традиции, сжимающие напряжения σ_l приняты за положительные, при этом также изменены на обратные и положительные направления касательных напряжений. Естественно, переходя к обычному в теории упругости правилу знаков, необходимо формально изменить в представленных ниже зависимостях знаки перед напряжениями на обратные. Ширина расчетного элемента определяется на уровне его срединной поверхности и изменяется вдоль оси l по закону $b = l/l_s = \tilde{r}$ (рис. 7.7, е, у контакта $b = 1$). Напряжения сжатия σ_l , средние касательные напряжения τ_{nl} и изгибающие моменты M_l в сечении l равны:

$$\tau_{nl} = P_n^k / b H_0 = \tau_{nl}^k / \tilde{r}; \quad \sigma_l = \sigma_l^k / \tilde{r}; \quad (7.17)$$

$$M_l = P_n^k r_s (\tilde{r} - 1) / \sin \alpha = \tau_{nl}^k H_0 r_s (\tilde{r} - 1) / \sin \alpha.$$

Образование отдельных контактных трещин оказывает сдерживающее влияние на характер развития соседних трещин, при этом гасятся растягивающие напряжения в бетоне по поверхности первой трещины. В связи с этим возможно, что не все трещины, образованные у контакта, равномерно проникают в толщу бетона (см. рис. 7.8, а). Это влияние подтверждается также экспериментально. Следовательно, расчет выделенной бетонной полоски в общем виде производится с учетом ступенчатого изменения ее толщины h_l (см. рис. 7.8, б). При этом с целью упрощения расчетного аппарата было принято считать изменение толщины оболочек h_l вдоль оси l плавным, изменяющимся по линейному закону (см. рис. 7.8, в) в виде

$$h_l = h_0 [1 + n_c (\tilde{r} - 1)]; \quad n_c = (H_0 / h_0 - 1) / (\tilde{r}_c - 1), \quad (7.18)$$

где h_0 — минимальная толщина полосок у контакта, входящих в выделенную расчетную полосу (рис. 7.8, б): при $\tilde{r} = 1$, $h_l = h_0$ (при $\tilde{r} = \tilde{r}_c$) $h_l = H_0$; в частном случае полосок постоянной толщины $h_l = h_0$, $n_c = 0$. Коэффициент n_c в данном случае представляется как коэффициент изменения плотности контактных трещин.

Момент в некотором сечении h_l такого стержня принимается

$$M_l = \tau_{nl}^k h_l r_s (\tilde{r} - 1) / \sin \alpha, \quad (7.19)$$

исходя из условия, чтобы момент, приходящийся на единицу толщины элемента, по сравнению с моментом (M_l/H_0) не менялся. Момент сопротивления расчетного сечения высотой h_l будет

$$I_l = bh_l^3/12 = \tilde{r}h_0^3(1 + n_c\tilde{r} - \tilde{n}_c)^3/12. \quad (7.20)$$

Модуль деформации E_{bl} и модуль сдвига G_{bl} полос бетона очевидно изменяются вдоль оси l с изменением напряженного состояния бетона. На контакте с арматурой ввиду развития дополнительных микротрещин значение модулей будет меньше, чем на границе r_c . Чтобы это учесть, было принято

$$E_{bl} = E_b^0 e_1 (\tilde{r} - e_2) / \tilde{r}; \quad G_{bl} = 0,4E_{bl}, \quad (7.21)$$

где E_b^0 — модуль деформации бетона на границе r_c ; e_1, e_2 — коэффициенты, определяемые из граничных условий.

При $\tilde{r} = 1$ $E_{bl} = E_b v_b$, при $\tilde{r} = \tilde{r}_c$ $E_{bl} = E_b$, в результате:

$$e_1 = (\tilde{r}_c - v_b) / (\tilde{r}_c - 1); \quad e_2 = (1 - v_b)\tilde{r}_c / (\tilde{r}_c - v_b).$$

Перемещения u , расчетного элемента, следуя формулам сопротивления материалов, представляются в виде

$$u_n = \int \left(\int \frac{M_e}{E_{bl}I_l} dl \right) dl + 1,2 \int \frac{\tau_{nl}}{G_{bl}} dl + C_1 l + C_2, \quad (7.22)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий на границе $\tilde{r} = \tilde{r}_c$, где перемещение $u_n = u_n^0$, а угол поворота равен β_0

$$\frac{du_n}{dl} = \int \frac{M_l}{E_{bl}I_l} dl + C_1 = -\beta_0. \quad (7.23)$$

Второй интеграл в (7.22) учитывает влияние поперечных сил на прогибы.

Подставляя в (7.22) значения τ_{nl} , M_l , E_{bl} и I_l соответственно из (7.17), (7.19), (7.21), (7.20) и, учитывая (7.23), после интегрирования получим

$$u_n = \frac{\tau_{nl} r_s}{E_b \sin \alpha} (\bar{m} \Phi_n + 3 \Phi_c) + u_n^0 + \beta^0 (\tilde{r}_c - \tilde{r}) \frac{r_s}{\sin \alpha},$$

где

$$\bar{m} = 12 r_s^2 / h_0^2 \sin^2 \alpha; \quad \Phi_c = \frac{1}{e_1} \ln \frac{\tilde{r}_c - e_2}{\tilde{r} - e_2};$$

$$\Phi_n = \frac{A_1}{e_1} \left[\tilde{r} \ln \left| \frac{(\tilde{r} - e_2)(1 - n_c + n_c \tilde{r}_c)}{(\tilde{r}_c - e_2)(1 - n_c + n_c \tilde{r})} \right| + \right.$$

$$\left. + e_2 \ln \left| \frac{\tilde{r}_c - e_2}{\tilde{r} - e_2} \right| + \frac{1 - n_c}{n_c} \ln \left| \frac{1 - n_c + n_c \tilde{r}_c}{1 - n_c + n_c \tilde{r}} \right| \right] +$$

$$+ \frac{A_2}{e_1 n_c^2 (1 - n_c + n_c \tilde{r}_c)} \left[n_c (\tilde{r} - \tilde{r}_c) + (1 - n_c + n_c \tilde{r}_c) \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{1 - n_c + n_c \tilde{r}_c}{1 - n_c + n_c \tilde{r}} \right| \right]; \quad (7.25)$$

$$A_1 = \frac{e_2 - 1}{(1 - n_c + n_c e_2)^2}; \quad A_2 = \frac{1}{(1 - n_c + n_c e_2)}$$

Полагая в (7.24) $\Phi_n = \Phi_n^k$ и $\Phi_c = \Phi_c^k$, придем к значениям u_n^k . Значения Φ_n^k и Φ_c^k получают из (7.25), полагая $\tilde{r} = 1$.

Значение Φ_c^k характеризует текущую жесткость расчетной полоски на сжатие и сдвиг, а Φ_n^k — аналогичное значение жесткости на изгиб.

В частном случае полосок постоянной толщины ($h_l = H_0 = h_0$, рис. 7.8, з) интегрирование (7.22) приводит к результату

$$\Phi_n^k = \frac{1}{e_1} \left\{ \frac{(\tilde{r}_c - r)^2}{2} + (1 - e_2) [(\tilde{r} - e_2) \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{\tilde{r}_c - e_2}{\tilde{r} - e_2} \right| - \tilde{r}_c + \tilde{r}] \right\}. \quad (7.26)$$

Перемещения точек расчетного элемента вдоль оси l выражаются формулой

$$v_e = - \int \frac{\sigma_l}{E_{bl}} dl + C_3 = - \frac{\sigma_l^k r_s}{E_b e_1 \sin \alpha} \int \frac{d\tilde{r}}{(\tilde{r} - e_2)} + C_3, \quad (7.27)$$

где C_3 определяется из граничного условия (при $\tilde{r} = \tilde{r}_c$, $v_l = v_l^0$).

Окончательно

$$v_e = \frac{\sigma_l^k r_s}{E_b \sin \alpha} \Phi_c + v_l^0. \quad (7.28)$$

Здесь также при $\tilde{r} = 1$ $\Phi_n = \Phi_n^k$, $\Phi_c = \Phi_c^k$ и $v_l = v_l^k$.

Кроме уравнений (7.24) и (7.28) для контакта справедливы два уравнения равновесия, связывающие τ_{nl}^k и σ_r^k с нормальными σ_n^k и касательными τ_c^k напряжениями на контакте. Их можно получить на основании рис. 7.7, б, проецируя силы приложения к граням элемента Δ_1 на оси z и r :

$$\tau_{rz}^k = \tau^k = \tau_{nl}^k \sin^2 \alpha + \sigma_r^k \sin \alpha \cos \alpha; \quad (7.29)$$

$$\sigma_r^k = \sigma_l^k \sin^2 \alpha - \tau_{nl}^k \sin \alpha \cos \alpha,$$

где τ^k и σ_r^k — касательные и радиальные напряжения по периметру арматуры.

Внося в (7.29) значения τ_{nl}^k и σ_l^k из (7.24), (7.28), а затем выражая, перемещения u_n^k и v_n^k через $(u_s - g_k)$ и v_s на основании формул (7.15), находим:

$$\tau^k = (u_s - u_0 - g_k) D_{11}^k + (v_s - v^0) D_{11}^k - D_{13}^k \beta^0 \sin^2 \alpha; \quad (7.30)$$

$$\sigma_r^k = (u_s - u_0 - g_k) D_{12}^k + (v_s - v^0) D_{22}^k + D_{13}^k \beta^0 \sin \alpha \cos \alpha,$$

где

$$D_{11}^k = \frac{E_b \sin^2 \alpha}{r_s} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{(\bar{m} \Phi_n^k + 3 \Phi_c^k)} + \frac{\cos^2 \alpha}{\Phi_c^k} \right];$$

$$D_{22}^k = \frac{E_b \sin^2 \alpha}{r_c} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\Phi_c^k} + \frac{\cos^2 \alpha}{(\bar{m} \Phi_n^k + 3 \Phi_c^k)} \right]; \quad (7.31)$$

$$D_{13}^k = \frac{(\tilde{r}_c - 1) E_b}{(\bar{m} \Phi_n^k + 3 \Phi_c^k)}.$$

Следуя [60], вторую зависимость (7.30) можно преобразовать к виду

$$\sigma_r^k = \tau^k \frac{\eta_2^k}{\eta_1^k} \operatorname{tg} \alpha - v^0 \eta_3^k, \quad (7.32)$$

где обозначены

$$\eta_1^k = \frac{\bar{m} \Phi_n^k + \Phi_c^k (\operatorname{tg}^2 \alpha + 3)}{\bar{m} \Phi_n^k + 3};$$

$$\eta_2^k = \frac{\bar{m} \Phi_n^k + 2 \Phi_c^k}{\bar{m} \Phi_n^k + 3 \Phi_c^k};$$

$$\eta_3^k = \frac{\sin^2 \alpha}{\bar{m} \Phi_n^k \cos^2 \alpha + \Phi_c^k (\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha)}$$

(коэффициенты η_i^k представляют собой некоторые функции влияния изгиба полосок бетона на сцепление).

Таким образом, касательные напряжения сцепления τ^k на контакте арматуры с бетоном и радиальные напряжения σ_r^k , ответственные за раскалывание бетона продольными трещинами, непосредственно ставятся в зависимость от перемещений арматуры (u_s, v_s, g_k) , жесткости конических оболочек, жесткости окружающего зону II сплошного бетона (от последнего фактора зависят перемещения на границе u^0, v^0, β^0 ; в случае жесткого контура $u^0 \approx 0, v^0 \approx 0, \beta^0 \approx 0$).

Напряжения τ^k, σ_r^k можно выразить через производные от перемещений арматуры и ее жесткости осевым и поперечным деформациям и таким образом перейти к уравнениям стыковки двух материалов на границе (эти уравнения рассмотрены в п. 7.6). Поперечными перемещениями арматуры на контакте, кроме случая отпуска преднапряжения, можно пренебречь, полагая $v_s = 0$.

Рассмотрим два частных случая, которые могут представить практический интерес. К первому отнесем случай, когда напряжения $\sigma_l^k = 0$. Из (7.28) следует, что условию $\sigma_l^k = 0$ отвечает равенство $v_l^k - v_l^0 = 0$. Используя второе условие (7.15), можно записать:

$$v_l^k = (u_s - g_k) \cos \alpha + v_s \sin \alpha; \quad (7.33)$$

$$v_l^0 = u^0 \cos \alpha + v^0 \sin \alpha;$$

тогда из равенства $v_l^k = v_l^0$ следует

$$(v^0 - v_s) = (u_s - g_k - u^0) \cos \alpha / \sin \alpha.$$

Внося значение $(v^0 - v_s)$ в уравнения (7.30) и учитывая (7.29), (7.31), находим:

$$\tau^k = [u_s - u_0 - g_k - \beta_0 (\tilde{r} - 1) r_s] \left[\frac{E_b \sin^2 \alpha}{r_s (\bar{m} \Phi_n^k + 3 \Phi_c^k)} \right]; \quad (7.34)$$

$$\sigma_r^k = -\tau^k \sin \alpha \cos \alpha.$$

Первый случай может иметь место после выхода радиальных трещин на контур конструкции, когда зона сцепления теряет возможность воспринимать моменты, в данном случае когда $\tau_{nl}^k = 0$. Из (7.24) при $\tilde{r} = 1$ следует, что

$$u_n^k - u_n^0 - \beta^0(\tilde{r}_c - 1)r_s / \sin \alpha = 0.$$

Внося сюда значения u_n^k и u_n^0 , выраженные через $(u_s - g_k)$, v_s и u^0 , v^0 на основании (7.15), находим

$$(u_s - g_k - u^0) \sin \alpha - \beta^0(\tilde{r}_c - 1)r_s / \sin \alpha - (v_s - v^0) \cos \alpha = 0,$$

откуда, выражая углы β^0 в функции от остальных величин и подставляя в (7.30), приходим к зависимостям вида

$$\tau^k = (u_s - u_0 - g_k) \frac{E_b^0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{r_s \Phi_c^k} + (v_s - v^0) \frac{E_b^0 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{r_s};$$

$$\alpha_r^k = \tau^k \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.35)$$

Второй случай может реализоваться, если полоски конических оболочек у защемления будут отламываться, вследствие образования нормальных трещин.

Рассмотрим еще один вопрос. Проецируя напряжения, приложенные к граням элемента Δ_1 (рис. 7.9) на оси n , l , находим

$$\tau_{nl}^k = \tau^k - \sigma_r^k \operatorname{ctg} \alpha; \quad \sigma_l^k = \tau^k \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_r^k. \quad (7.36)$$

Внося в зависимости (7.14) значения u_n и v_l из (7.24) и (7.28) и затем выражая τ_{nl}^k и σ_l^k через τ^k и σ_r^k на основании (7.36), находим:

$$u = \tau^k B_{11} + \sigma_r^k B_{12} + u^0 + \beta^0(\tilde{r}_c - \tilde{r})r_s; \quad (7.37)$$

$$v = \tau^k B_{12} + \sigma_r^k B_{22} + v^0 + \beta^0(\tilde{r}_c - \tilde{r})r_s \operatorname{ctg} \alpha,$$

где

$$B_{11} = \frac{r_s}{E_b} [\bar{m} \Phi_n + 3 \Phi_c + \Phi_c \operatorname{ctg}^2 \alpha];$$

$$B_{12} = \frac{r_s}{E_b} [\Phi_c \operatorname{ctg} \alpha - \bar{m} \Phi_n - 3 \Phi_c]; \quad (7.38)$$

$$B_{22} = \frac{r_s}{E_b} [(\bar{m} \Phi_n + 3 \Phi_c) \operatorname{ctg}^2 \alpha + \Phi_c].$$

Перемещения u характеризуют деформацию сечения бетона вокруг арматуры. Таким образом, все величины, характеризующие сцепление, а именно: τ^k , σ_r^k и u , оказываются взаимозависимыми.

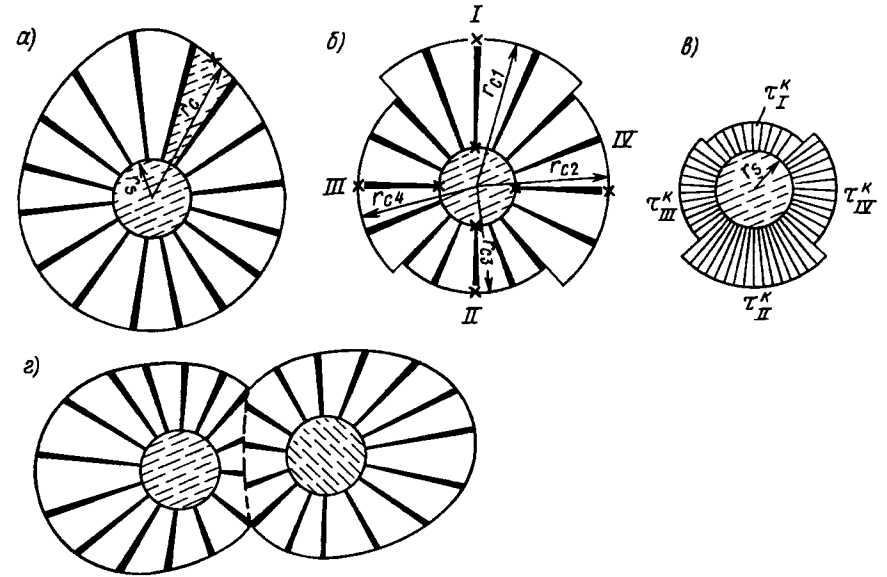


Рис. 7.9. К расчету сцепления арматуры с бетоном при несимметричной схеме контактных трещин

Остановимся еще на одном вопросе. Выше рассматривалась некоторая идеальная симметричная схема образования конических трещин. Однако представленные зависимости будут справедливы и в случае, если схема трещин будет несимметричной (например, такой, как показана на рис. 7.9, а). При этом указанные зависимости будут относиться к отдельным полоскам несимметричной схемы, например к полоске, заштрихованной на рис. 7.9, а).

В практических расчетах реальную несимметричную схему, вимимо, необходимо будет закруглять, представляя в виде набора отдельных сегментов-лепестков (рис. 7.9, б, где показана четырехсегментная фигура, I—IV — сегменты). Эпюры касательных напряжений, действующих по контакту с арматурой, также будут несимметричными. В случае четырехсегментной фигуры эти эпюры можно представлять также четырехлепестковой фигурой, показанной на рис. 7.9, в. Касательные напряжения τ_p^k ($p = I - IV$) этой схемы можно с некоторым приближением связывать с перемещениями, относящимися к серединам сегментов (точки таких середин на рис. 7.9, б показаны крестиками). К рассмотрению несимметричных схем развития контактных трещин будет сводиться и расчет сцепления нескольких арматурных стержней, расположенных рядом (рис. 7.9, з).

7.5. ВТОРОЙ СЛУЧАЙ РАЗВИТИЯ КОНТАКТНЫХ ТРЕЩИН

Анализ этого случая имеет больше теоретическое значение и может использоваться для уточнения первого — основного случая. Во втором случае предполагается, что радиальные трещины в зоне контакта отсутствуют или имеются лишь на некотором локальном участке. Расчет сводится к расчету толстостенной конической оболочки при указанных выше (см. случай 1) граничных условиях. Встречающиеся в литературе решения обычно относятся к расчетам тонкостенных оболочек. Кроме того, используя эти решения, трудно проследить характер развития радиальных трещин и влияние этого явления на изменение напряженно-деформированного состояния бетона и арматуры, а также учесть изменение плотности контактных трещин вдоль оси z . Поэтому примем за основу решение [60], хотя и приближенное, но лишенное в большей степени указанных выше недостатков.

Как и в случае 1, рассмотрим сначала изгиб и продольные деформации призматической полоски (стержня), выделенной из конической оболочки. Средняя поверхность этого стержня показана на рис. 7.10, а. В отличие от случая 1 (см. рис. 7.8, а) в случае 2 необходимо учесть влияние кольцевых сил $N_\theta = \sigma_\theta H_0$, где, как и раньше, H_0 — толщина оболочки. Действие кольцевых сил на стержень заменим действием некоторой дополнительной погонной нагрузки g . Сохраним принятое выше правило знаков для σ_l , однако растягивающие напряжения σ_θ будем принимать за положительные. Проектируя силы N_θ для элемента длиной Δl на плоскость nl (рис. 7.10, а, б, найдем:

$$2 \sigma_\theta H_0 \Delta l \frac{\varphi_0}{2} = g \Delta l \quad \text{или} \quad g = \sigma_\theta H_0 \varphi_0. \quad (7.39)$$

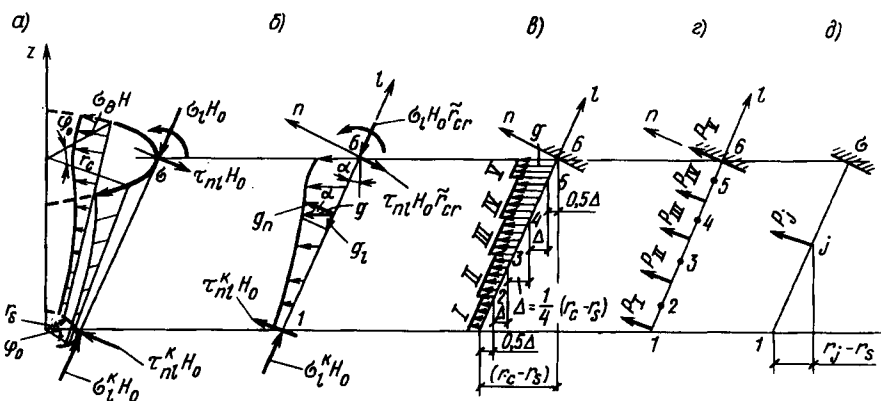


Рис. 7.10. К анализу работы элемента в зоне контактных трещин в случае 2

Величина φ_0 назначается из условия, чтобы при $r = r_s$ ширина расчетной полоски была равна $b = 1$. Отсюда, учитывая, что $b = r \varphi_0$, получим $\varphi_0 = 1/r_s$ и преобразуем выражение для g к виду

$$g = \sigma_0 H_0 / r_s. \quad (7.40)$$

Проекцию нагрузки g на ось n обозначим как g_n , а на ось l как g_l , где (рис. 7.10, б),

$$g_n = g \cos \alpha = \frac{\sigma_\theta H_0 \cos \alpha}{r_s}; \quad g_l = \frac{\sigma_\theta H_0 \sin \alpha}{r_s}.$$

Зная g_n и g_l , можно определить из уравнений равновесия изменение σ_l и τ_{nl} вдоль оси стержня.

Так, в некотором сечении $\tilde{r}_k = \tilde{r}_i$ имеем:

$$\sigma_l = \frac{\sigma_l^k}{\tilde{r}_i} - \frac{1}{H_0 \tilde{r}_i} \int_1^{\tilde{r}_i} g_l dl = \frac{\sigma_l^k}{\tilde{r}_i} - \frac{1}{\tilde{r}_i} \int_1^{\tilde{r}_i} \sigma_\theta d\tilde{r};$$

$$\tau_{nl} = \frac{\tau_{nl}^k}{\tilde{r}_i} - \frac{1}{H_0 \tilde{r}_i} \int_1^{\tilde{r}_i} g_n dl = \frac{\tau_{nl}^k}{\tilde{r}_i} - \frac{\text{ctg} \alpha}{\tilde{r}_i} \int_1^{\tilde{r}_i} \sigma_\theta d\tilde{r}.$$

В дальнейшем задача решалась приближенным способом. Для облегчения моделирования элемент конической оболочки (или расчетный стержень) вдоль оси l разбивался по длине на пять (I—IV) участков — три средних участка длиной $\Delta / \sin \alpha = 0,25, (r_c - r_s) / \sin \alpha$ и два крайних длиной $0,5 \Delta / \sin \alpha$. В принципе, в зависимости от требуемой прочности количество участков может быть изменено. На каждом участке интенсивность нагрузки g принималась постоянной, а общая криволинейная эпюра g заменялась некоторой ступенчатой (рис. 7.10, в). На крайних участках I и V кольцевые напряжения σ_θ будут приниматься равными значениям, вычисленным соответственно для граничных сечений при $r = r_s$ и $r = r_c$. На промежуточных участках они определяются из решения задачи для середины участков и принимаются постоянными для всей их длины.

При определении перемещений от изгиба принималась более упрощенная схема рис. 7.10, г, д, согласно которой распределенная в пределах каждого участка распределенная нагрузка g_n заменялась сосредоточенными силами p_j ($j = I - IV$), которые прикладывались по серединам участков. Радиальные координаты точек (рис. 7.10, д), расположенных по середине участков $j = II, III, IV$, обозначим в виде r_j^* или $r_j = \tilde{r}_j^* / r_c$. Отдельно полоска оболочки со всеми геометрическими размерами выделена на рис. 7.11.

В итоге расчет отдельной бетонной конической оболочки, которая может быть полностью или частично рассечена радиальными

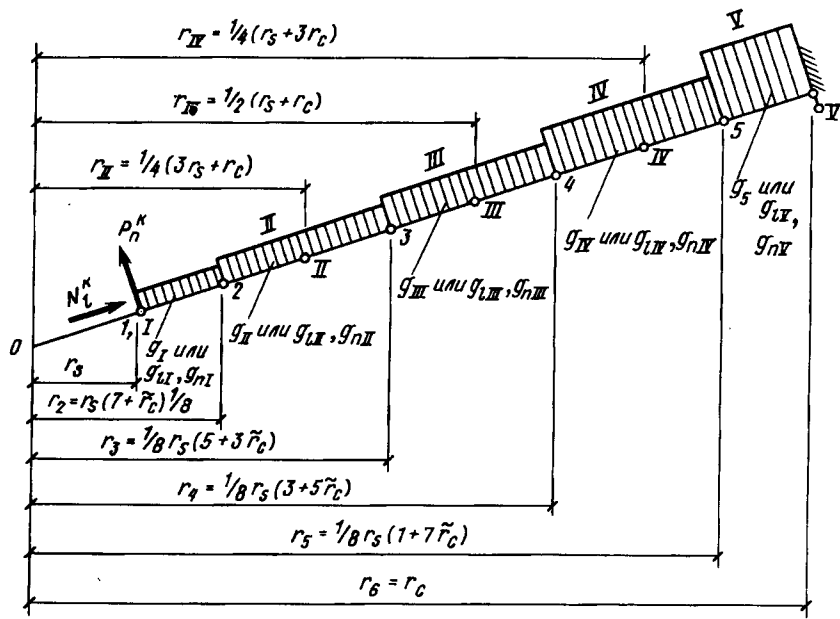


Рис. 7.11. Разбивка расчетного элемента на участки

трещинами раскалывания, выполнялся численным способом по [71]. Он сводился к составлению и решению системы уравнений 23-го порядка (при принятой схеме деления расчетного элемента конической оболочки вдоль оси l на пять участков). Неизвестными при решении задачи являлись:

v_{II}, \dots, v_{IV} — перемещения для участков срединной поверхности оболочки от сжатия вдоль оси l — образующей конуса;

σ_l^k — нормальные напряжения в бетоне расчетной полосы, действующие у контакта с арматурой по площадкам, перпендикулярным к оси l ;

τ_{nl}^k — касательные напряжения у контакта с арматурой, действующие в плоскости rz ;

u_{QI}, \dots, u_{QIV} — прогибы (перемещения вдоль оси n) от действия касательных напряжений (поперечных сил);

u_{nI}, \dots, u_{nIV} — прогибы от действия изгибающих моментов;

$\sigma_{\theta I}, \dots, \sigma_{\theta V}$ — кольцевые напряжения на участках конической оболочки;

u_k — перемещения вдоль оси z для бетона на контакте с арматурой;

v_k — то же, вдоль оси r ;

u_n^k — перемещения бетона вдоль оси n в сечении на границе контактных трещин и внешней бетонной облоймы;

v_l^k — то же, вдоль оси l .

Таблица

№ п.п.	v_{II}	v_{III}	v_{IV}	$\sigma_{\theta I}$	$\sigma_{\theta II}$	$\sigma_{\theta III}$	$\sigma_{\theta IV}$	$\sigma_{\theta V}$
1	$-E_b e_1 \sin \alpha / r_s$			$-T$	$-\text{III}_6$	$-\text{III}_7$	$-\text{III}_8$	$-\text{II}$
2	$-E_b e_1 \sin \alpha / r_s$			$-\text{II}_2$	$-\text{II}_2$	$-\text{II}_7$	$-\text{II}_8$	$-\text{II}$
3	$-E_b e_1 \sin \alpha / r_s$			$-\text{II}_3$	$-\text{II}_3$	$-\text{II}_3$	$-\text{II}_6$	$-\text{II}$
4	$-E_b e_1 \sin \alpha / r_s$			$-\text{II}_4$	$-\text{II}_4$	$-\text{II}_4$	$-\text{II}_4$	$-\text{II}$
5			$3 \ln(d/\bar{r}_1 - e_2)$	$3 T \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_6 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_7 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_8 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{II} \operatorname{ctg} \alpha$
6			$3 \ln(d/\bar{r}_2 - e_2)$	$3 \text{II}_2 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_2 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_7 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_8 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{II} \operatorname{ctg} \alpha$
7			$3 \ln(d/\bar{r}_3 - e_2)$	$3 \text{II}_3 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_3 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_3 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_8 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{II} \operatorname{ctg} \alpha$
8			$3 \ln(d/\bar{r}_4 - e_2)$	$3 \text{II}_4 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_4 \operatorname{ctg} \alpha$	$6 \text{II}_4 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{III}_4 \operatorname{ctg} \alpha$	$3 \text{II} \operatorname{ctg} \alpha$
9	$\sin \alpha$			$-r_1 r_s^2 / E_b \theta_1$				$3 \text{II} \operatorname{ctg} \alpha$
10	$\sin \alpha$			$-r_2 r_s^2 / E_b \theta_2$				
11	$\sin \alpha$			$-r_3 r_s^2 / E_b \theta_3$				
12	$\sin \alpha$			$-r_4 r_s^2 / E_b \theta_4$				$r_4 r_s^2 / E_b \theta_5$

№ п.п.	v_{Π}	v_{III}	v_{IV}	δ^k	τ_{nl}^k	$\sigma_{\theta I}$	$\sigma_{\theta II}$	$\sigma_{\theta III}$	$\sigma_{\theta IV}$	$\sigma_{\theta V}$
13										
14	$\cos \alpha$									
15	$\sin \alpha$									
16	$\text{Л}\Phi_{11}$	$0,5\Delta\text{ctg}\alpha$		$\text{Л}\Phi_{1,1}$	$\text{М}\bar{\Gamma}_2(\text{H}\Phi_{2,2} + \text{Б}_2\Delta)$	$\text{М}\bar{\Gamma}_3(\text{H}\Phi_{3,3} + 2\Delta\text{Б}_3)$	$\text{М}\bar{\Gamma}_4(\text{H}\Phi_{4,4} + 3\Delta\text{Б}_4)$			
17	$\text{Л}\Phi_{12}$	$0,5\Delta\text{ctg}\alpha$		$\text{Л}\Phi_{1,2}$	$\Delta\text{ctg}\alpha$	$\text{Л}\bar{\Gamma}_2\Phi_{2,2}$	$\text{М}\bar{\Gamma}_3(\text{H}\Phi_{3,3} + \Delta\text{Б}_3)$	$\text{М}\bar{\Gamma}_4(\text{H}\Phi_{4,4} + 2\Delta\text{Б}_4)$		
18	$\text{Л}\Phi_{13}$	$0,5\Delta\text{ctg}\alpha$		$\text{Л}\Phi_{1,3}$	$\Delta\text{ctg}\alpha$	$\Delta\text{ctg}\alpha$	$\text{Л}\bar{\Gamma}_3\Phi_{3,3}$	$\text{М}\bar{\Gamma}_4(\text{H}\Phi_{4,4} + \Delta\text{Б}_4)$		
19	$\text{Л}\Phi_{14}$	$0,5\Delta\text{ctg}\alpha$		$\text{Л}\Phi_{1,4}$	$\Delta\text{ctg}\alpha$	$\Delta\text{ctg}\alpha$	$\text{Л}\bar{\Gamma}_2\Phi_{2,4}$	$\text{Л}\bar{\Gamma}_3\Phi_{3,4}$	$\text{Л}\bar{\Gamma}_4\Phi_{4,4}$	
20										
21										
22	$\cos\alpha\sin\alpha \sin^2\alpha$									
23										

№ п.п.	$u_{Q I}^m$	$u_{Q II}^k$	$u_{Q III}^m$	$u_{Q IV}^m$	$u_{n I}$	$u_{n II}$	$u_{n III}$	$u_{n IV}$	u_k	v_k	u_n^0	v_{tl}^0
1												$E_b e_1 \sin\alpha / r_s$
2												$E_b e_1 \sin\alpha / r_s$
3												$E_b e_1 \sin\alpha / r_s$
4												$E_b e_1 \sin\alpha / r_s$
5	$-E_b e_1 \sin\alpha / r_s$											
6	$-E_b e_1 \sin\alpha / r_s$											
7	$-E_b e_1 \sin\alpha / r_s$											
8	$-E_b e_1 \sin\alpha / r_s$											
9	$-\cos\alpha$											
10	$-\cos\alpha$											
11	$-\cos\alpha$											
12	$-\cos\alpha$											

№ п.п.	u_{Q1}^m	u_{Q2}^*	u_{Q3}^m	u_{Q4}^m	u_{n1}	u_{n2}	u_{n3}	u_{n4}	u_k	v_k	u_n^*	u_n^*	v_n^*
13													
14	$\sin \alpha$										$-\cos \alpha$		$\sin \alpha$
15	$-\cos \alpha$												
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													

* свободный член.

В таблице приведены коэффициенты матрицы системы уравнений для расчета конической оболочки, ограниченной двумя смежными контактными трещинами. При выводе этой системы были приняты относительные радиальные координаты границ участков (т.е. точек 1, 2, ..., 5 и I, II, ..., IV, см. рис. 7.11), а также введены следуя [71] дополнительные обозначения групп повторяющихся параметров и некоторых выражений:

$$\Delta = 0,25 (\tilde{r}_1 - 1); \quad b = 0,9 + 0,1e_2;$$

$$y_i = -\frac{r_s}{E_b \theta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 5); \quad d = \tilde{r}_c - e_2;$$

$$f = 0,9 + 0,1 \tilde{r}_c; \quad \tilde{r}_1 = \tilde{r}_I; \quad \tilde{r}_2 = \tilde{r}_{II}; \quad \tilde{r}_3 = \tilde{r}_{III}; \quad \tilde{r}_4 = \tilde{r}_{IV}; \\ \tilde{r}_5 = \tilde{r}_I; \quad \tilde{r}_6 = \tilde{r}_2; \quad \tilde{r}_7 = \tilde{r}_3; \quad \tilde{r}_8 = \tilde{r}_4; \quad \tilde{r}_9 = \tilde{r}_5;$$

$$\Pi = \frac{r_s}{E_b \sin \alpha} m; \quad z = \frac{1}{e_1 b^2};$$

$$M = \Delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{m}{E_b}; \quad m = \frac{12 r_s^2}{H_s^2 \sin^2 \alpha};$$

$$H = \frac{r_s}{\sin \alpha}; \quad \Pi = \frac{E_b e_1 \sin \alpha}{r_s};$$

$$a_i = e_2 - \tilde{r}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 9);$$

$$B_{kj} = -z \left\{ a_j \left[\ln(-a_j/d) + \ln \frac{f}{0,9 + 0,1 \tilde{r}_j} \right] + \right.$$

$$\left. + b (\tilde{r}_j - \tilde{r}_c) / f \right\}; \quad (j = 2, 3, 4);$$

$$\Phi_{ij} = 10z \left\{ [a_i (0,9 + 0,1 \tilde{r}_j) + 10 (0,9 + 0,1 \tilde{r}_i) b] \times \right.$$

$$\times \ln \frac{f}{0,9 + 0,1 \tilde{r}_j} - 0,1 e_2 a_i \ln \left(-\frac{a_j}{d} \right) +$$

$$\left. + \frac{(0,9 + 0,1 \tilde{r}_i) (\tilde{r}_j - \tilde{r}_c) b}{f} \right\};$$

$$(j = 1, 2, 3, 4; \quad i = 1, 2, 3, 4);$$

$$\Gamma = 0,5 \Delta \ln \left(- \frac{d}{a_{i=6}} \right) + 0,5 \Delta + a_{i=5} \ln \frac{a_{i=6}}{a_{i=5}};$$

$$\Pi = 0,5 \Delta + a_{i=9} \ln \left(- \frac{d}{a_{i=9}} \right);$$

$$\Psi_{i-4} = 0,5 \Delta \ln \left(- \frac{d}{a_{i-4}} \right);$$

$$\Psi_i = \Delta \ln \left(- \frac{d}{a_{i+1}} \right) + \Delta + a_i \ln \left(- \frac{a_{i+1}}{a_i} \right);$$

$$(i = 6, 7, 8)$$

$$\Psi_{i-4} = \Delta \ln \left(- \frac{d}{a_{i+1}} \right) + 0,5 \Delta + a_i \ln \left(- \frac{a_{i+1}}{a_{i-4}} \right).$$

$$(i = 6, 7, 8)$$

Для расчета конической оболочки необходимо знать радиальные перемещения в ее основании v_r^0 . При расчете образцов эти перемещения оценивались приближенно, используя известное решение задачи для толстостенной трубы

$$v_r^0 = - \sigma_r^c \frac{r_c [(1 - \mu_b^0) r_c^2 + (1 + \mu_b^0) R^2]}{E_b C_n (R^2 - r_c^2)},$$

где μ_b^0 — коэффициент Пуассона для бетона; C_n — коэффициент учета неупругих деформаций бетонной обоймы, принимаемый $C_n = 0,85$.

Действующие в основании конической оболочки сжимающие σ_l и касательные τ_{nl} напряжения вычислялись с учетом кольцевых напряжений

$$\sigma_l^c = \frac{\sigma_l^j}{\tilde{r}_c} - \frac{1}{\tilde{r}_c} [\sigma_{\theta I} (\tilde{r}_2 - 1) + \sigma_{\theta II} (\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2) + \sigma_{\theta III} (\tilde{r}_4 - \tilde{r}_3) + \sigma_{\theta IV} (\tilde{r}_5 - \tilde{r}_4) + \sigma_{\theta V} (\tilde{r}_6 - \tilde{r}_5)].$$

$$\tau_{nl}^c = \frac{\tau_{nl}^k}{\tilde{r}_c} + \frac{\text{ctg } \alpha}{\tilde{r}_c} [\sigma_{\theta I} (\tilde{r}_2 - 1) + \sigma_{\theta II} (\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2) + \sigma_{\theta III} (\tilde{r}_4 - \tilde{r}_3) + \sigma_{\theta IV} (\tilde{r}_5 - \tilde{r}_4) + \sigma_{\theta V} (\tilde{r}_6 - \tilde{r}_5)];$$

По этим величинам на основании рис. 7.10 определялись радиальные напряжения σ_r^c , действующие на внешнюю бетонную обойму

$$\sigma_r^c = \sigma_l^c \sin^2 \alpha + \tau_{nl}^c \sin \alpha \cos \alpha.$$

Отсутствие радиальных трещин на j -м участке определяли на основании условия (7.9), заменяя σ_l на $\sigma_{\theta j}$.

Если для j -го участка это условие не нарушалось, то принимали значение модуля деформаций бетона в кольцевом направлении $E_{\theta j} = 0,85 E_b^0$, где E_b^0 — начальный модуль деформаций бетона. Если для j -го участка условие (7.9) нарушалось, то величина $E_{\theta j}$ приравнивалась условно малой величине $E_{\theta j} = 0,001 E_b$. Этот прием позволял моделировать образование радиальной трещины.

На каждом этапе нагружения производилась проверка прочности конической оболочки на наиболее нагруженном участке, примыкающем к арматурному стержню условия

$$|\sigma_i^k| / R_b k_2 \leq 1. \quad (7.43)$$

Учитывая некоторое влияние стесненности деформаций в местах, примыкающих к арматуре, и возможное влияние градиента напряжений на прочность, вводился коэффициент увеличения прочности $k_2 = 1,2$.

При нарушении условия (7.43) считали, что коническая бетонная оболочка в зоне примыкания к стержню начинает разрушаться, и бетонная консоль под выступом арматуры как бы теряет опору. При этом как в полосе конической оболочки, так и в бетонной консоли под выступом арматуры предполагалось ограниченное скачкообразное начальное падение жесткости.

Дальнейшее разрушение бетона зависит от интенсивности смещений арматуры в месте примыкания к конической оболочке. Падение жесткости отпора разрушающейся полосы в [71] задавалось плавным с переходом на затяжную нисходящую ветвь диаграммы «касательные напряжения — смещения арматуры».

В исследовании [71] нисходящая ветвь моделировалась путем задания некоторого двухступенчатого графика (рис. 7.12). Уточнение касательных напряжений, отвечающих данным текущим перемещениям, производилось следующим образом. Из прямоугольного треугольника abc (см. рис. 7.12) имеем $ab = bc \text{ tg } \alpha$, где α — заданный угол наклона отрезка одной из прямых, образующих нисходящую ветвь диаграммы. Тогда касательные напряжения τ_i^k , соответствующие перемещениям u_{si} на итерации i , будут

$$\tau_i^k = \bar{\tau} [1 - \text{tg } \alpha \left(- \frac{u_{si}}{\bar{u}} - 1 \right)],$$

где $\bar{\tau}$, \bar{u} — критические значения касательных напряжений на контакте арматуры и бетона и смещений, соответствующих началу разрушения конической оболочки.

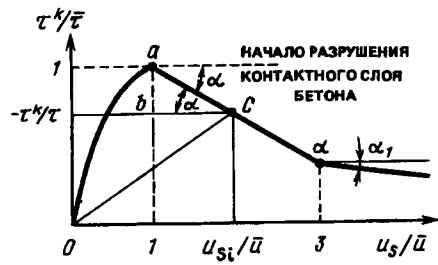


Рис. 7.12. К учету формы нисходящей ветви диаграммы «касательные напряжения — смещения» арматуры

По найденным значениям τ_i^k сразу определяем суммарную жесткость системы для узла разностной сетки, не производя с данного момента отдельно подсчет составляющих компонентов жесткости для бетонных консолей под выступами арматуры и конических оболочек в зоне контакта. Податливость

$$\bar{B}_i = u_{si} / \tau_i \quad (7.44)$$

Форма участка нисходящей ветви была принята по результатам сравнения численных экспериментов с данными опытов. Точка перелома на диаграмме (точка d) соответствует трехкратному увеличению смещений по сравнению с критическими смещениями u . При этом значения углов α и α_1 заданы соответственно 0,3 и 0,03 рад.

За предельную прочность анкеровки рассчитываемого образца при разрушении от продергивания арматуры в бетоне принимается нагрузка, при которой не удается уже достичь силового равновесия по длине стержня в бетоне. При этом обычно у незагруженного конца стержня уровень касательных напряжений превышает критический, и последняя бетонная коническая оболочка оказывается разрушенной, после чего перемещения лавинообразно увеличиваются и расчет заканчивается.

7.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЦЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-АРМИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Такие элементы используются для экспериментальной проверки модели.

Уравнение сцепления арматурного стержня с бетоном. Для арматурного стержня является справедливым следующее известное уравнение равновесия

$$\tau^k = \frac{A_s}{2 \pi r_s} \frac{d \sigma_s}{dz},$$

где σ_s — осевые напряжения арматуры в рассматриваемом сечении; A_s — площадь арматурного стержня,

которое, учитывая, что

$$\frac{d u_s}{dz} = \frac{\sigma_s}{E_s}; \quad \frac{d \sigma_s}{dz} = \frac{d^2 u_s}{dz^2} E_s$$

преобразуется к виду

$$\tau^k = \frac{A_s E_s}{2 \pi r_s} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \quad (7.45)$$

Уравнение (7.45) дополняет систему уравнений (7.30) или (7.34), или (7.35), или (7.37), или систему, приведенную в таблице, (та или иная система используется в зависимости от схемы трещин, кроме того, при выборе системы уравнений учитывается метод решения задачи сцепления). В представленных решениях использовались уравнения, приведенные в таблице. Определив u^k и τ^k , находили некоторую обобщенную податливость бетона контактной зоны $B_k = u^k / \tau^k$ по формуле типа (7.44), хотя такой прием не является показательным. Общие перемещения арматурного стержня представлялись в виде

$$u_s = q_k + u_k + u^0$$

или, учитывая значение q_k из (7.4) и значение $u^k = B_k \tau^k$, находим

$$u_s - u^0 = \tau^k (B_q + B_k).$$

Это соотношение с учетом зависимости (7.45), преобразовывалось к виду

$$\frac{1}{B_q + B_k} (u_s - u^0) - \frac{A_s E_s}{2 \pi r_s} \frac{d^2 u_s}{dz^2} = 0 \quad (7.46)$$

и принималось ниже в качестве основного уравнения деформирования арматурного стержня.

Представим еще вывод уравнения типа (7.46) с использованием зависимостей (7.37). Запишем эти зависимости для контакта арматуры с бетоном (при $\tilde{r} = 1$; $v_s = v_s^k = v_s^k$; $u = u^k = u_s - q_k$ и $B_{ij} = B_{ij}^k$), приняв с целью упрощения $\beta^0 = 0$:

$$u_s - u^0 = \tau^k B_n^k + \sigma_r^k B_{12}^k + q_k = \tau^k (B_n^k + B_q) + \sigma_r^k B_{12}^k;$$

$$v_s - v_s^0 = \tau^k B_{12}^k + \sigma_r^k B_{22}^k \quad (7.47)$$

Подставляя значение σ_r^k из второго уравнения (7.47) в первое и заменяя τ^k его значением из (7.45), приходим к иной записи уравнения типа (7.46)

$$u_s - u^0 - E_s \left(B_{11} + B_q - \frac{(B_{12})^2}{B_{22}} \right) \frac{d^2 u_s}{dz^2} - \frac{v_s - v^0}{B_{22}} B_{12} = 0. \quad (7.48)$$

Ниже значения u^0 и v^0 обозначаются u_b , v_b как перемещения бетонной оболочки, окружающей арматурный стержень. Остановимся на их определении.

Вывод основного уравнения для бетонной оболочки. Обозначим σ_z — напряжения в бетоне, действующие по площадкам, нормальным к оси z ; σ_z^0 — напряжения смятия бетона на опоре (рис. 7.13). Считаем, что до образования контактных трещин наружная граница зоны проникновения контактных трещин формально совпадает с величиной радиуса арматуры $r_c = r_s$.

Предполагаем, что вдоль r можно принять изменение σ_z по линейному закону. Однако коэффициенты этого линейного закона зависят от z и R , т.е. изменяются по длине образца. При этом по длине образец разбивается на две зоны: 1-я зона длиной δ_z , 2-я — длиной $L - \delta_z$. Обозначим величины σ_z при $r = R$ в виде σ_z^I , а при $r = r_c$ в виде σ_z^k (см. рис. 7.13).

В зоне δ_z (при $L - \delta_z \leq z \leq L$)

$$\sigma_z^n = \sigma_z^r k_z^I; \quad k_z^I = \frac{\delta_z}{(L - z)}. \quad (7.49)$$

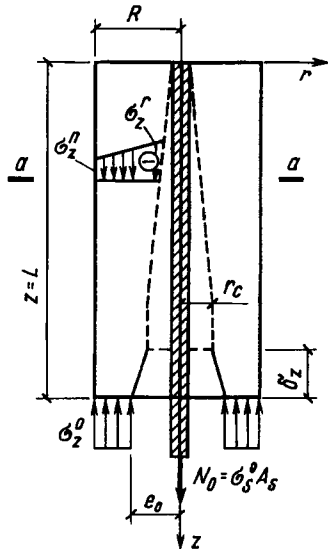


Рис. 7.13. К определению осевых напряжений по внешней бетонной оболочке

$$\text{В зоне } L - \delta_z, \text{ т.е. при } z < L - \delta_z \quad (7.50)$$

$$\sigma_z^n = \sigma_z^r k_z^II,$$

где

$$k_z^II = (z + t) / (L + t - \delta_z)$$

(значением t варьируется характер эпюр).

Изменяя t , можно задавать различные закономерности изменения σ_z^n / σ_z^r по длине образца. Значение t будет зависеть от радиуса и длины образца. Значения t принимали равными $t \approx -0,1L$; $\delta_z = \Delta$, где Δ — шаг разностной сетки при решении задачи численными методами.

Зависимости (7.49), (7.50) являются приближенными. Их можно уточнить, решая представленную задачу методами теории упругости. Однако в данном случае это значительно усложняло бы создание единой расчетной программы, поэтому был принят описанный выше упрощенный подход.

Установим связь между σ_z^r и напряжениями в арматуре σ_s . Условия на опорном торце (усилия в бетоне на торце равны усилиям арматуры):

$$\sigma_s^0 A_s + \sigma_z^0 \pi (R^2 - e_0^2) = 0.$$

Принято следующее правило знаков: растягивающие напряжения — положительные, сжимающие — отрицательные. Аналогично записывается уравнение равновесия для промежуточных сечений, например для сечений $a-a$ (см. рис. 7.13)

$$\sigma_s A_s + \frac{\pi (R - r_c) [\sigma_z^r (R + 2r_c) + \sigma_z^n (r_c + 2R)]}{3} = 0,$$

откуда для участка $L - \delta_z$

$$\sigma_z^r = - \frac{3 \sigma_s A_s}{\pi (R - r_c) [R + 2r_c + k_z^II (r_c + 2R)]} \quad (7.51)$$

Для участка δ_z в формуле (7.50) коэффициент k_z^II заменяется на k_z^I . Запишем соотношение (7.51) в перемещениях.

$$\frac{d u_b}{dz} E_b = - \frac{3 A_s E_s}{\pi (R - r_c) [R + 2r_c + k_z^II (r_c + 2R)]} \frac{d u_s}{dz} \quad (7.52)$$

Остановимся на задании граничных условий на концах рассматриваемого образца. В сечении на выходе арматуры из бетона со стороны приложения нагрузки (при $z = L$) имеем:

$$\sigma_s = \sigma_s^0, \quad u_b = 0, \quad (7.53)$$

с противоположной стороны в свободном от нагрузки сечении арматуры (при $z = 0$)

$$\sigma_s = 0. \quad (7.54)$$

Уравнения (7.46) и (7.52) и граничные условия на концах арматурного стержня и бетонного образца составляют полную систему для решения задачи в перемещениях u_s и u_b .

Для решения системы дифференциальных уравнений применялся метод конечных разностей. Расчетная схема представлена на рис. 7.14. Согласно этой схеме арматурный стержень разбивался на 13 участков плюс два участка с законтурными точками «0» и «14».

На рис. 7.14 контактная зона вдоль стержня условно показана двумя прямыми линиями (в действительности учитывается изменение толщины контактной зоны по длине образца в процессе увеличения нагрузки на стержень).

За неизвестные приняты значения перемещений арматуры и осевых перемещений бетонной оболочки на границе трещин в узлах сетки ($i = 1, 2, \dots, 13$).

Представим основные разрешающие уравнения (7.46, 7.52) в конечных разностях. Уравнение (7.46) записывается для точек $1-13$. При этом в уравнениях 1 и 13 перемещения законтурных точек выражаем через перемещения u_{s2} и u_{s12} с помощью соответствующих граничных условий. Уравнения имеют вид:

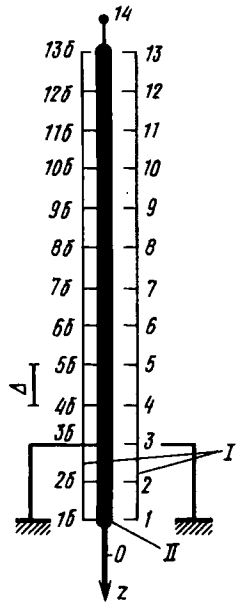


Рис. 7.14. Расчетная схема для случая выгибания стержня из бетона
I — линия у контакта; II — арматурный стержень

$$\frac{u_{si} - u_{bi}}{B_{qi} + B_{ki}} - \frac{A_s E_s}{2 \pi r_s} \frac{u_{s(i-1)} - 2u_{si} + u_{s(i+1)}}{\Delta^2} = 0, \quad (7.55)$$

где Δ — шаг разностной сетки.

Обозначив $s_i = (B_q + B_{ki})A_s E_s / (2 \pi r_s \Delta^2)$, запишем уравнения (7.55) в виде

$$-s_i u_{s(i-1)} + (1 + 2s_i) u_{si} - s_i u_{s(i+1)} - u_{bi} = 0. \quad (7.56)$$

В уравнения (7.56) входят перемещения законтурных точек. С помощью граничных условий исключаем их из уравнений. Первое из граничных условий (7.53) с использованием центральных разностей запишется в виде

$$u_{s0} - u_{s2} = (2 \Delta / E_s) \sigma_s^0. \quad (7.57)$$

Исключив с помощью соотношения (7.57) значение u_{s0} из уравнения (7.56), при $i = 1$ получим

$$(1 + 2s_1) u_{s1} - 2s_1 u_{s2} - u_{b1} = (s_1 2 \Delta / E_s) \sigma_s^0 \quad (7.58)$$

Используя условие (7.54), аналогично предыдущему преобразуем уравнение (7.56) при $i = 13$

$$(1 + 2s_{13}) u_{s13} - 2s_{13} u_{s12} - u_{b1} = (s_{13} 2 \Delta / E_s) \sigma_s^0 \quad (7.59)$$

Таким образом, в расчете используются уравнения (7.56) при $i = 2, 3, \dots, 12$ и уравнения (7.57) и (7.58).

Рассмотрим уравнение (7.52). Обозначим

$$B_i = \frac{3 A_s E_s}{\pi (R r_c) [R + 2r_c + k_{zi}^{\pi} (r_c + 2R)]} E_b^0$$

тогда разностные уравнения имеют вид

$$B_i u_{s(i-1)} - B_i u_{s(i+1)} + u_{b(i-1)} - u_{b(i+1)} = 0. \quad (7.60)$$

Для точки 13 (см. рис. 7.14), с учетом граничного условия (7.54), разрешающее уравнение принимает вид $\sigma_z^* = 0$ или при записи в односторонних разностях

$$-3u_{b13} + 4u_{b12} - u_{b11} = 0. \quad (7.61)$$

Для точки 1 $u_{b1} = 0$.

Используя уравнения (7.56), (7.58) — (7.62), можно составить систему уравнений 26-го порядка, решив которую, находим перемещения арматуры u_{si} и бетона u_{bi} .

С использованием найденных значений перемещений определяем напряжения в арматуре σ_{si} , в бетоне σ_{zi}^* , а также касательные напряжения τ_{ki} . Покажем эти вычисления на примере i -й точки разностной сетки:

$$\sigma_{si} = \epsilon_{si} E_s = E_s \left(\frac{du_s}{dz} \right)_i = E_s \frac{u_s(i-1) - u_s(i+1)}{2 \Delta};$$

$$\sigma_{zi}^r = E_b \frac{u_b(i-1) - u_b(i+1)}{2 \Delta};$$

$$\tau_{ki} = \frac{A_s E_s}{2 \pi r_s} \frac{u_s(i-1) - 2 u_{si} + u_s(i+1)}{\Delta^2}.$$

Для крайних точек имеем:

$$\sigma_{s1} = \sigma_s^0; \quad \sigma_{s13} = 0;$$

$$\sigma_{z1}^r = - \frac{\sigma_s A_s}{\pi (R^2 - l_0^2)};$$

$$\sigma_{z13}^r = E_b \frac{-3 u_{b13} + 4 u_{b12} - u_{b11}}{2 \Delta};$$

$$\tau_{k1} = \frac{A_s E_s}{\pi r_s \Delta^2} (u_{s2} - u_{s1} + \Delta \sigma_s^0 / E_s).$$

Анализ выполненных расчетов. С использованием изложенной методики были получены численные решения для цилиндрических бетонных образцов радиусом $R = 70$ мм для случая вытягивания центрально-забетонированного стержня периодического профиля диаметром 16 мм. В вариантах расчета варьировались прочность бетона R^{on} (15; 30; 50 МПа) и параметры периодического профиля, в частности шаг поперечных выступов H_s (4; 8 мм). Диаграммы опытных и расчетных кривых напряжения–смещения приведены на рис. 7.15 (расчет: 1–6, где 1 при $R_b = 15$ (МПа), $H_s = 4$ мм; 2 – при $R_b = 15$, $H_s = 8$; 3 – при $R_b = 30$, $H_s = 4$; 4 – при $R_b = 30$, $H_s = 8$; 5 – при $R_b = 50$, $H_s = 4$; 6 – при $R_b = 50$, $H_s = 8$; 7 – опыт: при $R_b = 30$, $H_s = 8$ мм).

Основные результаты расчетов (прочность анкеровки, смещение арматуры относительно бетона) показали удовлетворительную сходимость теоретических и опытных (Г.Н. Судакова) значений.

На рис. 7.16 представлен пример расчетных кривых касательных напряжений на контакте с арматурой. Из рисунка видно, что предельные значения τ_k^{max} по мере возрастания нагрузки смещаются вдоль стержня, что наблюдалось в экспериментах [133]. Уровень критических касательных напряжений на контакте арматуры с

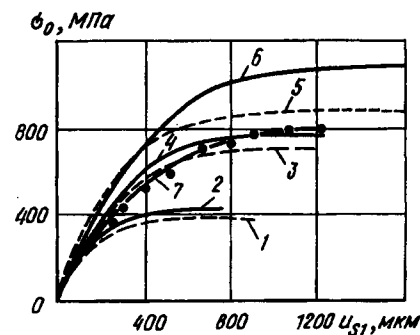


Рис. 7.15. Диаграмма опытных и расчетных кривых "напряжения – смещения"

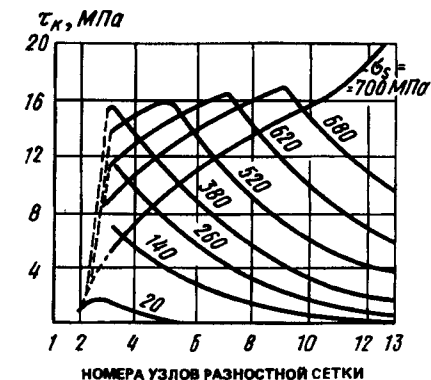


Рис. 7.16. Кривые касательных контактных напряжений τ_k , полученные теоретически

бетоном в вариантах расчета изменялся в диапазоне 13–20 МПа. Соответствующие взаимные смещения арматуры и бетона составляют 90–200 мкм. Причем, чем дальше располагается участок от активного конца арматуры, тем выше эти критические смещения.

Изложенный метод расчета задачи сцепления и аппарат его численной реализации позволяют получать достаточно подробную картину напряженно-деформированного состояния арматуры и бетона в зоне их взаимодействия. В сочетании с МКЭ представленный аппарат может использоваться для расчета различных сложных конструкций и отдельных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александровский С.В.** Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. — М.: Стройиздат, 1973. — 432 с.
2. **Александровский С.В., Васильев П.И.** Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона. — М.: Стройиздат, 1976. С. 97—152.
3. **Алиев Ш.А., Коган Е.А., Холмянский М.М.** Прочность бетона как статически неоднородного несплошного тела. Изд. Азербайджанского политехнич. института. — Баку, 1989. — 176 с.
4. **Арутюнян Н.Х.** Некоторые вопросы теории ползучести. — М. — Л.: Гостехиздат, 1952. — 323 с.
5. **Арутюнян Н.Х., Александровский С.В.** Современное состояние теории ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона. — М.: Стройиздат, 1967. С. 5—96.
6. **Ахвердов И.Н.** Теоретические основы бетоноведения. — Минск. Высшая школа, 1991. — С. 188.
7. **Алексеев С.Н., Иванов Ф.М., Модры С., Шиссель П.** Долговечность железобетона в агрессивных средах. — М.: Стройиздат, 1990. — С. 217.
8. **Баженов Ю.М.** Технология бетона. — М., Высшая школа, 1987. — 416 с.
9. **Балан Т.А.** Вариант критерия прочности структурно-неоднородных материалов при сложнапряженном состоянии // Проблемы прочности. — Киев. — 1986. — №2. — С. 21—26.
10. **Балан Т.А.** Модель деформирования бетона при кратковременном нагружении // Строительная механика и расчет сооружений. — 1986. — №4. — С. 32—36.
11. **Балан Т.А.** Инкрементальная модель деформирования бетона и железобетона в условиях многоосного нагружения и ее реализация в численных методах расчета железобетонных конструкций на статические и динамические воздействия. / Дис. на соиск. учен. степени д-ра техн. наук. — М.: 1987. — 291 с.
12. **Баландин П.П.** К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. — 1937. — №1. — С. 12—36.
13. **Безухов Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести. — М.: Высшая школа, 1961. — 538 с.
14. **Берг О.Я.** Некоторые физические обоснования теории прочности бетона // Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций. — М.: Транжелдориздат, 1960. — 112 с.
15. **Берг О.Я.** Физические основы теории прочности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1962. — 96 с.
16. **Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Писанко Г.Н.** Высокопрочный бетон. — М.: Стройиздат, 1971. — 208 с.
17. **Берг О.Я., Щербаков Е.Н.** К учету нелинейной связи напряжений и деформаций ползучести бетона в инженерных расчетах // — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит-ра. 1973, №12. — С. 14—21.
18. **Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Прокопович И.Е., Застава М.М.** К обоснованию единой методики нормирования деформаций ползучести и усадки бетона // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и архит-ра, 1977 №3. — С. 3—6.
19. **Бергес Ж., Хабиб П.** Ползучесть бетонов при трехосном воздействии РИЛЕМ. — Канны, 1972.
20. **Булгаков В.С.** О влиянии масштаба на несущую способность и деформации железобетонных внецентренно сжатых элементов прямоугольного сечения // Расчет железобетонных конструкций. — М.: Госстройиздат, 1961.
21. **Бирулин Ю.Ф., Мощевитии Г.Т., Карпенко Н.И., Балан Т.А., Ярин Л.И.** Исследование работы железобетонных балок-стенок // Совершенствование технологии производства и монтажа железобетонных конструкций. — М.: 1980. — С. 5—19.
22. **Бич П.М.** Вариант теории прочности бетона // Бетон и железобетон. — 1980. — №6. — С. 28—29.
23. **Болотин В.В.** Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения. Расчеты на прочность. Вып. 8. — М.: 1962. С. 36—52.
24. **Болотин В.В.** Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. — 1965. — №2. — С. 27—37.
25. **Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. — М.: 1986. — 375 с.
26. **Бондаренко В.М.** Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. — Харьков, 1968. — 324 с.
27. **Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.** Инженерные методы нелинейной теории железобетона. — М.: Стройиздат, 1982. — 287 с.
28. **Васильев П.И.** Некоторые вопросы пластических деформаций бетона // Изв. ВНИИГ, т. 49, 1953. — С. 83—113.
29. **Васильев П.И., Гаврили Б.А.** Влияние температуры на ползучесть стареющего бетона // Ползучесть и усадка бетона // Материалы совещания, подготовленные НИИЖБ. — М.: Стройиздат, 1969. — С. 9—20.
30. **Васильев П.И.** Нелинейные деформации ползучести бетона // Изв. ВНИИГ, т. 95, 1971. — С. 59—69.
31. **Гвоздев А.А.** Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. — М.: Госстройиздат, 1949. — 280 с.
32. **Гвоздев А.А.** Ползучесть бетона и пути ее исследования // Исследования прочности, пластичности и ползучести строительных материалов. — М.: Госстройиздат, 1955. — С. 126—137.
33. **Гвоздев А.А., Карпенко Н.И.** Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. — 1965. — №2. — С. 20—23.
34. **Гвоздев А.А.** К вопросу о предельных условиях, условиях текучести для ортотропных сред и для изгибаемых железобетонных плит. Сборник, посвященный 80-летию И.М. Рабиновича. — М.: Стройиздат, 1965.

35. **Гвоздев А.А., Галустов К.З., Яшин А.В.** О некоторых отступлениях от принципа наложения в теории ползучести бетона // Бетон и железобетон. — 1967. — №8. — С. 223—227.

36. **Гвоздев А.А.** Состояние и задачи исследования сцепления арматуры с бетоном // Бетон и железобетон. — №12. — 1968. С. 1—4.

37. **Гвоздев А.А., Яшин А.В., Петрова К.В., Белобров И.К., Гусев Е.А.** Прочность, структурные изменения и деформации бетона. — М.: Стройиздат, 1978, 299 с.

38. **Гвоздев А.А.** Задачи и перспективы развития теории железобетона // Строительная механика и расчет сооружений. — 1981 - №6. — С. 14—17.

39. **Гениев Г.А., Киссюк В.Н.** К вопросу обобщения теории прочности бетона // Бетон и железобетон. — 1965. — №2. — С. 15—17.

40. **Гениев Г.А.** Вариант деформационной теории пластичности бетона // Бетон и железобетон. — 1969. — №2.

41. **Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.** Теория пластичности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат. — 1974, 316 с.

42. **Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Левин Н.И., Никонова Г.А.** Прочность легких и ячеистых бетонов при сложных напряженных состояниях. — М.: Стройиздат, 1978. — 166 с.

43. **Григорьянц Л.М.** Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния арматуры и бетона при наличии наклонных трещин // Труды ЦНИИЭПсельстроя. — М.: 1977.

44. **Гусев Е.А., Шевченко В.И., Сейланов Л.А.** Экспериментальные полностью равновесные диаграммы деформирования бетона // Материалы конференций и совещаний по гидростатике. Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений // ВНИИГ, 1987. — Л.: Энергоатомиздат. — С. 180—185.

45. **Гуревич А.Л., Карпенко Н.И., Яриш Л.И.** О способах расчета железобетонных плит на ЭВМ с учетом процесса трещинообразования // Строительная механика и расчет сооружений. — 1972. — №1, С. 24—29.

46. **Гуща Ю.П.** Исследование ширины раскрытия нормальных трещин // Прочность и жесткость железобетонных конструкций. — М.: 1971. — С. 72—97.

47. **Еньков Е.У.** Физические зависимости плоского напряженного состояния железобетона с трещинами в условиях ползучести и экспериментальное обоснование соответствующих параметров // Строительные конструкции. — Киев, Будівельник, вып. 32. — С. 54—57.

48. **Зайцев Ю.В.** Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. — М.: Стройиздат, 1982. — 196 с.

49. **Здоренко В.С.** Развитие численных методов исследования прочности и устойчивости стержневых и тонкостенных железобетонных конструкций во времени // Дис. д-ра техн. наук. — М. — Киев, 1977. — 302 с.

50. **Ивашенко Ю.А., Лобанов А.Д.** Исследование процесса разрушения бетона при различных скоростях деформирования // Бетон и железобетон. — 1984. — №11.

51. **Ильюшин А.А.** Пластичность // М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 372 с.

52. **Кантарович Л.В.** О методе Ньютона // Тр. математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, 1949, 28. — С. 106—112.

53. **Карпенко Н.И.** Особенности работы железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии и расчет железобетонных плит // Дис. канд. техн. наук, НИИЖБ. — М.: 1964. — 113 с.

54. **Карпенко Н.И.** О работе железобетонных плит с трещинами. Тр. IV конференции по бетону и железобетону. — М.: Стройиздат, 1966. — С. 10—17.

55. **Карпенко Н.И., Рейтман М.И.** Деформирование железобетона при течении арматуры // Прикладная механика. — 1968, т. IV, вып. 10. — С. 121—126.

56. **Карпенко Н.И.** Теоретическое исследование перемещений, условий трещинообразования, ширины раскрытия трещин и условий прочности элементов с трещинами железобетонных плит и оболочек // Исследования конструкций зданий и сооружений для сельского строительства, вып. 2—1. — М.: Стройиздат, 1968. — С. 32—91.

57. **Карпенко Н.И.** Условия текучести арматуры железобетонных сред с трещинами // Строительная механика и расчет сооружений. — М.: 1968. — С. 24—26.

58. **Карпенко Н.И.** К расчету железобетонных пластин и оболочек с учетом трещин // Строительная механика и расчет сооружений. — 1971. — №1. — С. 7—12.

59. **Карпенко Н.И.** О двух общих условиях прочности для железобетонных элементов с трещинами // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. — М.: 1972. — С. 146—159.

60. **Карпенко Н.И.** К построению модели сцепления арматуры с бетоном, учитывающей контактные трещины // Бетон и железобетон. — №1, 1973. — С. 19—22.

61. **Карпенко Н.И.** Теория деформирования железобетона с трещинами. — М.: Стройиздат, 1976. — 208 с.

62. **Карпенко Н.И., Яриш Л.И., Кукунаев В.С., Сегалов А.Е.** Расчет плоскостных конструкций с трещинами // Новое о прочности железобетона. — М.: Стройиздат, 1977. — С. 141—198.

63. **Карпенко Н.И.** К выводу физических соотношений для элементов с трещинами, работающих в условиях объемного напряженного состояния // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций. — М.: 1979. С. 5—44.

64. **Карпенко Н.И.** К построению теории расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строительная механика и расчет сооружений. — М.: 1980. — №2. — С. 28—35.

65. **Карпенко Н.И., Балан Т.А., Леви М.И.** Методы расчета монолитных стен и перекрытий // На стройках России. — М.: 1981, №7. — С. 49—51.

66. **Карпенко Н.И., Петров А.Н.** К определению нелинейных и быстронатекающих деформаций ползучести бетона способом τ_t при сложных

режимах нагружения//Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности. — М.: НИИЖБ, 1980. — С. 157—168.

67. Карпенко Н.И. Об одной характерной функции прочности бетонов при трехосном сжатии//Строительная механика и расчет сооружений. — 1982. — №2. — С. 33—36.

68. Карпенко Н.И. К выводу физических соотношений для расчета многослойных плит//Эффективные железобетонные конструкции сельских зданий, материалы и технология. — М.: 1983. — С. 39—40.

69. Карпенко Н.И. К построению обобщенной зависимости для диаграммы деформирования бетона//Строительные конструкции. — Минск, 1983. — С. 164—173.

70. Карпенко Н.И. Методика конечных приращений для расчета деформаций железобетонных элементов при знакопеременной нагрузке//Совершенствование конструктивных форм, методов расчета и проектирования железобетонных конструкций. — М.: 1983. — С. 3—11.

71. Карпенко Н.И., Судаков Г.Н., Лейтес Е.С. Моделирование механического взаимодействия арматурного стержня с бетоном, учитывающее напряженно-деформированное состояние контактной зоны//Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности. — М.: 1980. С. — 133—156.

71а. Карпенко Н.И., Судаков Г.Н. Сцепление арматуры с бетоном с учетом развития контактных трещин//Бетон и железобетон. — №12. — 1984. — С. 42—44.

72. Карпенко Н.И. К построению условия прочности бетонов при неодносных напряженных состояниях//Бетон и железобетон. — 1985. — №10. — С. 35—37.

73. Карпенко Н.И., Розенберг М.Я. Критерии прочности железобетонных стеновых панелей с трещинами по бетону//Железобетонные конструкции сельских зданий. — М.: 1985. — С. 10—16.

74. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры//Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. — М.: НИИЖБ, 1986. — С. 7—25.

75. Карпенко Н.И., Кокарев А.М., Алдахов С.Д. Основные параметры методики расчета железобетонных элементов на знакопеременную нагрузку//Сельскохозяйственные здания, конструкции, методы расчета, теплофизика. — М.: 1986, с. 44—57.

76. Карпенко Н.И., Прокопович И.Е., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н., Яременко А.Ф. Учет деформаций ползучести и длительного сопротивления бетона в методике диаграмм-изохрон//Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. — М.: НИИЖБ, 1987. — С. 66—81.

77. Карпенко Н.И. К построению общей ортотропной модели деформирования бетона//Строительная механика и расчет сооружений. — 1987. — №2. — С. 31—36.

78. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Диаграммы деформирования бетона, их трансформации в зависимости от различных факторов и использование в расчетах конструкций. — Материалы конференций и совещаний по гидротехнике. Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений//ВНИИГ, 1987. — Л.: Энергоатомиздат. — С. 170—185.

79. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов//Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. — М.: 1987. — С. 4—24.

80. Карпенко Н.И., Клованич С.Ф. К учету температурных воздействий при расчете массивных железобетонных конструкций с трещинами//Строительная механика и расчет сооружений. — №2. — 1988. — М. 6—11.

81. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. Диаграммы деформирования бетона для развития методов расчета железобетонных конструкций с учетом режимов нагружения//Эффективные маломатериалоемкие железобетонные конструкции. — М.: 1988. — С. 4—17.

82. Карпенко Н.И., Розенберг М.Я. Метод расчета деформаций и прочности плосконапряженных железобетонных конструкций//Совершенствование технологии изготовления изделий, объемно-планировочных и конструктивных решений элеваторов и зерноперерабатывающих предприятий. — М.: 1988. — С. 34—43.

83. Карпенко Н.И. К построению методики расчета деформаций железобетонных плит как условно многослойных с учетом шести компонент напряжения//Новые экспериментальные исследования и методы расчета железобетонных конструкций. — М.: 1989, с. 73—94.

84. Карпенко Н.И. Методика расчета стержневых конструкций с учетом деформаций сдвига//Бетон и железобетон. — 1989. — №3. — С. 14—16.

85. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. К построению общей методики расчета статически неопределимых стержневых железобетонных конструкций на основе метода конечных элементов//Строительная механика и расчет сооружений. — 1990. — №2.

86. Карпенко Н.И. Связи между напряжениями и деформациями бетона в случае трехосного растяжения//Бетон и железобетон. — 1991. — №10.

87. Карпенко Н.И., Круглов В.М. Современное состояние исследований по критериям прочности и связям между напряжениями и деформациями бетонных элементов при объемном напряженном состоянии//Матер. конф. и совещ. по гидротехнике. Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений/ВНИИГ, 1991. — Л.: Энергоатомиздат. — С. 170—185.

88. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. Расчет стержневых железобетонных конструкций МКЭ с учетом уточненной матрицы жесткости//Изв. вузов. Сер.: Стр. и арх-ра. — 1991. — №3. — С. 7—11.

89. **Карпенко Н.И., Клованич С.Ф.** Термоползучесть бетона при некоторых режимах нагружения и нагрева // Строительная механика и расчет сооружений. — 1991. — №5. — С. 58—66.

90. **Карпенко Н.И., Джанкулаев А.Я.** Методика учета объемного напряженно-деформированного состояния в расчетах железобетонных плит. Материалы ХХIV Международной конференции по бетону и железобетону. — М.: 1992. — С. 284—285.

91. **Карпенко Н.И.** К построению нелинейной теории ползучести бетона при трехосном растяжении с учетом ослабления сечений внутренними трещинами. Материалы ХХIV Международной конференции по бетону и железобетону. — М.: Стройиздат, 1992. — С. 281—283.

92. **Качанов Л.М.** Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 311 с.

93. **Катин Н.И.** Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях // Исследование свойств бетона и железобетона в конструкциях. — М.: Госстройиздат, 1959.

94. **Козак А.Л.** Исследование процесса трещинообразования в осесимметричных железобетонных конструкциях при термосиловых воздействиях // Дис. канд. техн. наук. — Киев, 1981. — 150 с.

95. **Козачевский А.И.** Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами // Строительная механика и расчет сооружений. — 1983. — №4. — С. 12—16.

96. **Красильников К.Г., Никитина Л.В., Скоблнская Н.Н.** Физико-химия собственных деформаций цементного камня. — М.: Стройиздат, 1980. — 255 с.

97. **Кричевский А.П.** Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия. — М.: Стройиздат, 1984. — 149 с.

98. **Кричевский А.П.** Прочность и деформации тяжелого бетона в условиях плоского напряженного состояния с учетом температурных воздействий // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. — 1985, №1. — Новосибирск. — С. 6—11.

99. **Круглов В.М., Зенин А.В.** Предельные секущие модули бетона // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. — 1985 №11. — С. 1—5.

100. **Круглов В.М., Донец А.Н., Тихомиров С.А.** Построение физических соотношений бетона на основе теории пластического течения // Вопросы проектирования строительства и эксплуатации искусственных сооружений на железных дорогах. — Новосибирск, 1986. — С. 47—53.

101. **Круглов В.М.** Физические соотношения бетона при расчете монолитных конструкций на знакопеременную нагрузку // Монолитное домостроение. — М.: 1986. — С. 107—118.

102. **Круглов В.М.** Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. — 1987. — №1. — С. 40—48.

103. **Леви М.И.** К расчету железобетонных перекрытий и фундамен-

тов МКЭ // Строительная механика и расчет сооружений. — 1979. — №5. — С. 62—66.

104. **Лейтес Е.С.** Об условии прочности бетона // Межотраслевые вопросы строительства. — М.: Стройиздат, 1971. — С. 32—35.

105. **Лейтес Е.С.** Вариант теории пластического течения бетона // Строительная механика и расчет сооружений. — 1978. — №3. — С. 34—37.

106. **Лехницкий С.Г.** Теория упругости анизотропного тела. — М.: Гостехиздат, 1950.

107. **Лившиц М.Б.** Учет вида напряженного состояния в критерии прочности бетона // Строительные конструкции транспортного и общего назначения. — Новосибирск, 1979. — С. 19—30.

108. **Лившиц Я.Д.** Расчет железобетонных конструкций с учетом ползучести и усадки бетона. — Киев, Вища школа, 1971. — 232 с.

109. **Ломакин В.А.** Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. — М.: Наука, 1970.

110. **Лукша Л.К.** Прочность трубобетона. — Минск, Вища школа, 1977. — 96 с.

111. **Лукша Л.К.** Расчет прочности железобетонных конструкций с учетом сложного напряженного состояния бетона // Автореф. дис. д-ра техн. наук. — М.: 1980. — 31 с.

112. **Лукша Л.К.** Гиперболический критерий прочности. Доклады АН БССР, 1983, т. ХХVII, №6. — С. 528—531.

113. **Мадатян С.А.** Диаграмма растяжения высокопрочной арматурной стали в состоянии поставки // Бетон и железобетон. — 1985. — №2. — С. 12—13.

114. **Маилян Л.Р., Беккнев М.Ю., Силь Г.Р.** Работа бетона и арматуры при многократно повторных нагружениях. — Нальчик: Кабардино-Балкарский агрометеорологический институт, 1984.

115. **Малашкин Ю.Н., Тябликов Б.В.** О прочности бетона при трехосном сжатии // Свойства бетона, определяющие его трещиностойкость // Труды ХУ координационного совещания по гидротехнике. — Л.: 1976, вып. 112.

116. **Малашкин Ю.Н.** Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряженных состояний // Автореф. дис. д-ра техн. наук. — М.: 1984. — 38 с.

117. **Малашкин Ю.Н., Безгодов И.М.** Исследование длительной прочности и деформативности бетона при одно-, двух- и трехосном сжатии // Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений. Материалы конференций и совещаний по гидротехнике. — М.: 1987. — С. 216—219.

118. **Маслов Г.Н.** Термическое напряжение бетонных массивов при учете ползучести // Тр. ВНИИГ, 1940, №28. — С. 175—188.

119. **Мельник А.Я.** Распределение напряжений в арматуре железобетонных дисков с трещинами // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. — 1980, №10. — С. 16—19.

120. Методические рекомендации по исследованию ползучести и усадки бетона // НИИЖБ. — М.: 1975. — 118 с.
121. Методические рекомендации по расчету напряженного состояния железобетонных конструкций транспортных сооружений с учетом ползучести и усадки бетона. — М.: 1987. — 62 с.
122. **Миловаиов А.Ф., Передерий В.Д.** Ползучесть бетона при повышенных температурах // Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при нагреве. — М.: НИИЖБ, 1982. — С. 3—14.
123. **Миролюбов В.Н.** К вопросу об обобщении теории октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы // Тр. Ленинградского технологического ин-та. — Л.: 1953, №25. — С. 22—28.
124. **Митасов В.М., Федоров Д.А.** Аналитическое представление диаграмм арматуры и бетона при одноосном растяжении // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. — 1987, №9. — С. 16—20.
125. **Малькевич А.Б.** Термоползучесть старого теплоизолированного бетона (экспериментально-теоретические исследования при различных режимах нагружения и нагрева). Дис. канд. техн. наук. — Л.: 1988.
126. **Мулин Н.М., Гуца Ю.П.** Деформации железобетонных элементов при работе стержневой арматуры в упругопластической стадии // Бетон и железобетон. — 1970. — №3. — С. 24—26.
127. **Мурашев В.И.** Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. — М.: Машстройиздат, 1950.
128. **Надан А.** Пластичность и разрушение твердых тел / Пер. с англ. М.: Ил., 1954. — С. 648.
129. **Носарев А.В.** Об упругих свойствах материалов, произвольно армированных элементами, расположенными в параллельных плоскостях // Тр. СИИТ. — М.: 1968, вып. 279. Исследования и эксплуатация железобетонных пролетных строений мостов. — С. 65—70.
130. **Ноткус А.И., Кудзис А.П.** О применении теории малых упругопластических деформаций в теоретическом обосновании условия прочности // Тр. Вильн. инженерно-строит. ин-та. — Вильнюс, 197 №8. — С. 21—30.
131. **Ноткус А.И., Кудзис А.П.** О надежности результатов двухосных испытаний бетона // Железобетонные конструкции. — Вильнюс, 1979.
132. **Ноткус А.И.** Вариант единой теории пластичности для бетона и металла // Железобетонные конструкции. — 1980, №10. — С. 73—82.
133. **Оагул А.А., Кутин Ю.Ф., Пасешник В.В.** Сцепление арматуры с бетоном (обзор) // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. — Новосибирск, №5, 1977. — С. 3—16.
134. **Пак А.А., Трапезников Л.П., Шерстобитова Т.П., Яковлева Э.Н.** Зависимость критического значения коэффициента интенсивности напряжений бетона от длины трещины // Изв. ВНИИГ, 1980, т. 136. — С. 11—114.
135. **Писаренко Г.С., Лебедев А.А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. — Киев, Наукова думка, 1976. — 416 с.

136. **Поль Б.** Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. Ч. 2. Хрупкое разрушение при одноосных напряженных состояниях // Разрушение. Математические основы теории разрушения. Т. 2. — М.: Мир, 1975. — С. 408—437.
137. **Поляков А.В., Деллос К.П., Яшин А.В., Султанов М.А.** Сопротивление трехосному сжатию железобетона и тяжелого бетона при простом и сложном нагружении // Совершенствование методов расчета строительных конструкций. — М.: МАДИ, 1987. — С. 67—72.
138. **Поляков А.В.** К оценке прочности бетонов на пористых заполнителях при одноосных напряженных состояниях // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. — М.: 1987. — С. 94—102.
139. **Пособие по расчету** статически неопределимых железобетонных конструкций. — М.: Стройиздат, 1994.
140. **Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А.** Прикладная теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1971. — 240 с.
141. **Прокопович И.Е.** Основы прикладной линейной теории ползучести. — Высш. школа, 1978. — 144 с.
142. **Рекомендации по расчету** ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций. — м.: НИИЖБ. — 120 с.
143. **Рекомендации по расчету** железобетонных конструкций с учетом одноосного и знакопеременного напряженного состояния в бетоне (под редакцией Л.П. Макаренко). — Ровно, 1987.
144. **Ржаницын А.Р.** Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. — М.: Гостехиздат, 1949. — 252 с.
145. **Роботнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
146. **Розенберг М.Я.** К вопросу совершенствования расчета прочности бетонных и железобетонных стен при плоском напряженном состоянии с учетом физически нелинейной работы материалов // Конструктивные системы полносборных жилых зданий. — М.: 1984. — С. 66—72.
147. **Руководство по расчету** на ЕС ЭВМ железобетонных колонн со смешанным армированием. — Ростов-на-Дону, СевКавНИИагропром, 1987.
148. **Сабиров Б.** Прочность, деформации различных бетонов в условиях кратковременного и длительного трехосного сжатия: Автореф. дис. канд. техн. наук. — М.: НИИЖБ, 1989. — 22 с.
149. **Санжаровский Р.С.** К теории расчета на нелинейную ползучесть с учетом длительной прочности // Исследования по расчету строительных конструкций. — Л.: 1977. — С. 35—42.
150. **Седрекиян Л.Г.** Элементы статической теории деформирования и разрушения хрупких материалов. — Ереван, 1968.
151. **Скрамтаев Б.Г.** Исследование прочности бетона и пластичности бетонной смеси. — М.: ЦНИИПС и ВИА РККА, 1936. — 320 с.
152. **Соломин В.И., Шишов И.И.** О расчете круглых фундаментных плит с учетом особенностей деформирования железобетона // Строительная механика и расчет сооружений, 1972, №1. — С. 19—23.

153. Тюпин Г.А. К расчету железобетона с помощью моментной теории упругости // Строительная механика и расчет сооружений. — 1968. — №3. — С. 30–32.

154. Трапезников Л.П. Температурная трещиностойкость массивных бетонных сооружений. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 271 с.

155. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1975. — 176 с.

156. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. сб., 1954, вып. 19. — С. 15–47.

157. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. — М.: МГУ, 1961. — 90 с.

158. Флюге В. Статика и динамика оболочек (пер. с нем.). — М.: Госстройиздат, 1961. — 206 с.

159. Харлаб В.Д. К общей линейной теории ползучести // Изв. ВНИИГ, 1961, т. 68. — С. 217–240.

160. Харлаб В.Д. Обобщение вейбуновской статистической теории хрупкого разрушения // Механика стержневых систем и сплошных сред, 1987, №11. — С. 150–152.

161. Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном. — М.: Стройиздат, 1978. — 184 с.

162. Холмянский М.М., Шифрин Е.И. К прочности трещиноватых пород и бетона при трехосном равномерном напряжении // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1981. — №3. — С. 52–61.

163. Цилосани З.Н. Усадка и ползучесть бетона. — Тбилиси, Мицниереба, 1978. — С. 230.

164. Шейкин А.Е., Чеховский Ю.В., Бруссер М.И. Структура и свойства цементных бетонов. — М.: Стройиздат, 1979. — С. 343.

165. Щербаков Е.Н. Общие принципы и практический метод нормирования деформаций цементных бетонов в инженерных расчетах. Особенности быстронатекающей ползучести бетона и способ прогнозирования этих деформаций // ВНИИ транспорта и строительства. — М.: 1990. — С. 4–24, 44–56.

166. Ягуст В.И. Сопротивление развитию трещин в бетонных конструкциях с учетом влияния макроструктуры материала // Автореф. дис. канд. техн. наук. — М.: 1982. — 24 с.

167. Яременко А.Ф., Мельник А.Я. Длительное деформирование железобетонных дисков с трещинами // Строительные конструкции. — Киев, Будівельник, 1979, вып. 35. — С. 40–44.

168. Яременко А.Ф., Гапшенко В.С. Кратковременная и длительная прочность растянуто-сжатых дисков с трещинами // Бетон и железобетон. — 1986. — №12. — С. 23–24.

169. Яременко А.Ф., Мельник А.Я., Гапшенко В.С. Определение коэффициентов λ и ψ для растянутых или растянуто-сжатых элементов с трещинами. Деп. ВНИИС. — М.: №8026, вып. 3, 1988.

170. Ярин Л.И. Методы расчета железобетонных конструкций переменной жесткости вследствие трещинообразования // Автореф. дис. докт. техн. наук. — М.: 1989. — 45 с.

171. Яшин А.В. Деформации бетона под длительным воздействием высоких напряжений и его длительное сопротивление сжатию // Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций. — М.: Стройиздат. — 1969. — С. 38–76.

172. Яшин А.В. Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / Под ред. А.А. Гвоздева. — М.: 1977. — С. 48–57.

173. Яшин А.В. Влияние неоднородных (сложных) напряженных состояний на прочность и деформации бетона, включая область, близкую к разрушению // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций / Под ред. А.А. Гвоздева. — М.: 1979. — С. 187–202.

174. Яшин А.В. Микромеханика разрушения бетона при сложных (многоосных) напряженных состояниях // Прочность и деформационные характеристики элементов бетонных и железобетонных конструкций / Под ред. А.А. Гвоздева. — М.: 1981. — С. 3–29.

175. Яшин А.В. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неоднородных напряженных состояниях. — М.: 1985. — 72 с.

176. Argyris I.H., Faust G. et al. Recent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels // Nucl. Eng. Des. 1974, — 28. P. 42–75.

177. Bach G. und Graf O. Versuche mit allseitig aufliegenden quadratischen und rechteckigen Einsenbetonplatten. // Berlin, 1915.

178. Buyukozturk O. Non-linear Analysis of Reinforced Concrete Structures // Computers Structures, Vol. 7, №1, 1977, pp. 149–156.

179. Cedolin T., Mulas M.G. Una legge costitutiva secante ed esplicita per il calcestruzzo in statipiani di tensione // Studi E Ricerche. 1981. Vol. 3, pp. 75–105.

180. Chervenca V. Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in plane loads // Ph. D. dissertation, Dept. Civil Eng. Univ. Colorado, Boulder, 1970, 202 p.

181. Chervenca V. Finite element model of reinforced concrete structures with cracks // Stavednický Casopis, 1976, №6, pp. 43–49.

182. Chen A.C.T., Chen W.F. Constitutive equations and punch-indentation of concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, NEMG, December, 1975, pp. 465–481.

183. Grotenboer H.I., Leiten S.F.C., Blaawendraad I. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress // Heron, 1981, Vol. 26, №10, 83 p.

184. Gerstle K.H. Simple formulation of triaxial concrete behavior // Journal of ACI. 1981. Vol. 75, №5, pp. 382–387.

185. **Gerstle K.H. et. al.** Strength of concrete under multiaxial stress states//Intern. symp. on concrete structures, Mexico. City, Oct., 1976 — Detroit, ACI Publ., 1978, sp. 55, p. 103—131.

186. **Arthanari S., Yu C.W.** Creep of Concrete Under Uniaxial and Biaxial Stresses at Elevated Temperatures//Mag. of Concr. Res. — 1967. — v. 19. — №6. — P. 149—156.

187. **England G.L., Ross A.D.** Reinforced Concrete Under Thermal Gradient//Mag. of Concrete. Res. Cem. and Concr. Ass. — 1962. — v. 14 — №40. — P. 5—12.

188. **Hannant O.J.** Nomograms for the failure of plain concrete subjected to short-term multiaxial stresses//Struct. Eng. 1974, №2, №5, p. 151—165.

189. **Hannant D.J.** Strein Behavior of Concrete Up to 95°C Under Compressive Stresses//ICE, London. — 1968. — P. 177—191.

190. **Kotsovos M.D.** A mathematical model of the deformational behavior of concrete under generalized stresses based on fundamental material properties//Material of construction, 1980, 13, pp. 289—29.

191. **Kotsovos M.D.** A Methemathical Description of the Strength Properties of Concrete under Generalized Stress//Magazine of Concrete research. 1979. Vol. 31, September, pp. 151—159.

192. **Kupfer H.B.** Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachtziger Beanspruchung//Beton und — Stahlbetonbau. 1973, №11, pp. 269—274.

193. **Mohr O.** Abrandlungen aus dem Gebiete der technischen mechanik//Berlin; W. Ennst C.U. Sohn, 1914—1925.

194. **Kotsovos M.D., Newmann I.B.** A mathematical Description of the Deformational Behavior of Concrete under Complex Loading//Magazine of Concrete Research, 1979, June, Vol. 31, №107, pp. 77—90.

195. **Newmann J., Newmann K.** The cracking and failure of concrete under combined stresses and its implications for structural design//The deformations and rupfure of solids subjected to multiaxial stresses. International Symposium, Cannes, 1972, Paris, 1973, pp. 149—169.

196. **Nasser K.N., Newille A.M.** Creep of Concrete at Elevated Temperatures//ACI Journal, Proc. — 1967. — v. 62. — №12. — pp. 1567—1580.

197. **Ottosen N.S.** A failure criterion for concrete//J. Eng. Mech. Div., ASEE, 1977, 103, №4, pp. 527—536.

198. **Palaniswany R., Saah S.F.** Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression//Journal of the structural division. Proceeding of the ASCE. 1974. Vol. 100. No ST5. May, — pp. 901—916.

199. **Richard F.E., Brantsaeg A., Brown R.L.** A study of concrete under combined compressive stress//Univ. of Illinois, Eng., Exp., st., Bull. 185, 1928.

200. **Robins P.I., Kong F.K.** Modified finite element method applied to RG deep beams//Civil engineering and public works revien. 1973. No 11, — pp. 1061—1072.

201. **Schleicher E.** Oen spannungszustandan der flieszgres-ze//Seits f. angew. Math. und Mech, — 1926, №3. S. 199—215.

202. **Scordelis A.C.** Computer Model for Nonlinear Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures//J. Prestr. Concr. Inst. — 1984. — V. 29. — №6. — P. 116—135.

203. **Tanner H., Fasio R., Zielincku S.** Strength and behavior of beam//panel-test and analysis//Journal.

204. **Morley C.T.** On the yield criterion of an orthogonally reinforced concrete slab element//J. mech. phys. solids, vol. 14, №1, 1966.

205. **William K.J., Warnke E.P.** Constitutive model for the triaxial behavior of concrete//Mt. Assos. Brideg Struch. Eng. Poc., 1975, 19, pp. 1—30.

206. **Rasch Chr.** Spannungs—Degnungs—Linien des Betons und Spannungs verteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit//Deutschen Asschuss fur Stahlberon. — Berlin. — 1962. — Heft 154.

207. **Coto, Y:** Cracks formed in concrete around deformed tension bars//Journal of the American Concrete Institute, Proceedings Vol. 68. №4. April 1971. pp. 244—251.

<i>Предисловие</i>	3
Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БЕТОНА МЕТОДАМИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	9
1.1. Особенности представления бетона моделью сплошного тела	
1.2. Трещины в бетоне и связанные с ними свойства	28
1.3. Краткие сведения об основных уравнениях механики деформируемого твердого тела	44
Глава 2. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА ПРИ НЕОДНООСНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ	60
2.1. Краткий анализ начальных критериев прочности бетона и история их создания	61
2.2. Некоторые современные направления развития критериев прочности	66
2.3. Общий критерий прочности бетонов и способ его построения ..	70
2.4. Вопросы практического использования критериев прочности ...	86
2.5. Составные критерии прочности	90
Глава 3. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ БЕТОНА ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ	92
3.1. Диаграммы сжатия и растяжения бетона. Поперечные деформации	92
3.2. Запись диаграмм в виде связей между приращениями напряжений и деформаций. Описание переменных и знакопеременных программ нагружения	107
3.3. Учет влияния повышенных температур на диаграммы сжатия и растяжения бетона	122
3.4. Три направления в построении связей между напряжениями и деформациями для бетона при объемном напряженном состоянии	126
3.5. О некоторых диаграммах трехосного напряжения	133
3.6. Связи между напряжениями и деформациями при трехосном напряженном состоянии в случае активной нагрузки	136
3.7. Запись общих физических соотношений в виде связей между приращениями компонент тензоров напряжений и деформаций. Нагрузка и разгрузка	145
3.8. Теоретический способ построения связей между напряжениями и деформациями в случае трехосного растяжения на основе модели трещиноватого бетона	155

Глава 4. НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА В УСЛОВИЯХ ОДНООСНЫХ И НЕОДНООСНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ	165
4.1. Методика диаграмм-изохрон при эталонных программах (режимах) нагружения. Описание сложных программ нагружения	165
4.2. Применение методики изохрон к определению деформаций ползучести бетона в условиях трехосного сжатия	183
4.3. Определение деформаций бетона способом ζ_t (трансформируемого времени нагружения)	188
4.4. Учет деформаций усадки бетона	194
4.5. Определение деформаций ползучести бетона в условиях действия повышенных температур	195
4.6. Теоретический способ построения модели ползучести бетона при трехосном растяжении на основе модели трещиноватого бетона	208
Глава 5. ТРЕХМЕРНЫЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ БЕЗ ТРЕЩИН	213
5.1. Армирование. Исходные диаграммы деформирования арматуры	213
5.2. Вывод физических соотношений для железобетонных элементов при ортотропном армировании	223
5.3. Учет влияния температуры	229
5.4. Учет наклонно расположенной арматуры	231
Глава 6. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ	233
6.1. Исходные предпосылки общей модели	233
6.2. Напряжения в элементах с трещинами и их составляющие	241
6.3. Относительные деформации элемента с трещинами	245
6.4. Связь реальных напряжений в арматуре с общими деформациями элемента	248
6.5. Вывод общих физических соотношений	254
6.6. Учет влияния температурных деформаций	264
6.7. Преобразования физических соотношений при повороте осей координат	270
6.8. Случай объемного ортотропного армирования	272
6.9. Определение ширины раскрытия трещин	288
6.10. Плоское напряженное состояние	292
6.11. Экспериментальные параметры, входящие в теоретические зависимости	311
6.12. Особенности описания сложных программ нагружения	317
6.13. Расчет плоских железобетонных конструкций с учетом трещинообразования	324
6.14. О некоторых общих критериях прочности железобетонных элементов с трещинами	332

6.15. Примеры расчета железобетонных конструкций в трехмерной постановке на силовые и термосиловые воздействия	339
Глава 7. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ АРМАТУРЫ	345
7.1. Особенности развиваемого подхода	354
7.2. Местное смятие бетонных консолей, расположенных между выступами арматуры	356
7.3. Определение области контактных конических и радиальных трещин	359
7.4. Расчетная модель зоны конических трещин. Первый случай образования контактных трещин	366
7.5. Второй случай развития контактных трещин	376
7.6. Решение задачи сцепления для центрально-армированных элементов	386
<i>Список литературы</i>	394

CONTENTS

<i>PREFACE</i>	6
Chapter 1. PECULIARITIES OF CONCRETE STRESSED-DEFORMED STATE DESCRIPTION USING METHODS OF DEFORMED SOLID BODY MECHANICS	9
1.1. Peculiarities in representation of concrete as a model of solid body	9
1.2. Cracks in concrete and related properties of the material	9
1.3. Brief information on principal equations of deformed solid body mechanics	28
Chapter 2. STRENGTH THEORIES OF CONCRETE UNDER NON-UNIAXIAL STRESSED STATES	60
2.1. Brief analysis of initial criteria of concrete strength and history of their development	61
2.2. Some modern directions of strength criteria development	66
2.3. A general concrete strength criterion and method for its formulation	70
2.4. Practical usage of concrete strength criteria	86
2.5. Composite strength criteria	90
Chapter 3. THEORY OF CONCRETE DEFORMATION UNDER SHORT-TERM ACTION OF LOAD	92
3.1. Stress-strain diagrams of concrete in compression and tension. Transverse deformations	92
3.2. Formulation of concrete diagrams in the form of relationships between stress and strain increments. Description of complex unilateral and bilateral loading programs	107
3.3. Consideration of high temperature influence on the compression and tension diagrams of concrete	122
3.4. Three directions in formulation of stress-strain relationships for concrete under volumetric stress state	126
3.5. On some diagrams of three-axial stresses	133
3.6. Relationships between stresses and deformations under three-axial stressed state in the case of active loading	136
3.7. Formulation of general physical relationships in terms of increments of the stress and the deformation tensors components. Loading and unloading	145
3.8. Theoretical approach to formulation of stress-deformation relationships in the three-dimensional case on the base of a cracked concrete model ..	155

Chapter 4. SOME APPROACHES TO PREDICTION OF NON-LINEAR CREEP DEFORMATION OF CONCRETE IN THE CASE OF UNIAXIAL AND NON-UNIAXIAL STRESSED STATE	165
4.1. Technique of diagrams-isochrons under standard loading regimes. Description of complex loading programs	165
4.2. Application of the isochrons technique to the prediction of concrete creep deformations under three-axial compression	183
4.3. Prediction of concrete deformations using a transformed loading time technique	188
4.4. Consideration of shrinkage deformations	194
4.5. Concrete creep deformations predictions under action of high temperature	195
4.6. Theoretical approach to a model formulation for concrete creep under three-axial tension on the base of the cracked concrete model	208
Chapter 5. THREE-DIMENSIONAL REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WITHOUT CRACKS	213
5.1. Reinforcement. Initial stress-strain diagrams of reinforcement	213
5.2. Derivation of physical relationships for reinforced concrete members with orthotropic reinforcement	222
5.3. Temperature influence consideration	229
5.4. Inclined reinforcement consideration	231
Chapter 6. GENERAL MODEL OF REINFORCED CONCRETE WITH CRACKS	233
6.1. Initial preconditions of the general model	233
6.2. Stresses in elements with cracks and their components	241
6.3. Strains of elements with cracks	245
6.4. Relation between actual stress in reinforcement with overall deformations of the element	248
6.5. Derivation of the general physical relationships	254
6.6. Consideration of temperature deformation influence	264
6.7. The coordinate axes rotation and corresponding transformations of the physical relationships	270
6.8. A case of volumetric orthotropic reinforcement	272
6.9. Crack width calculation	288
6.10. Plane stress state	292
6.11. Experimental parameters in the theoretical relationships	311
6.12. Peculiarities in complex loading programs descriptions	317
6.13. Analyses of reinforced concrete structures considering the cracking	324
6.14. On some general strength criteria of reinforced concrete elements with cracks	332
6.15. Examples of reinforced concrete structure analysis in three-dimensional formulation under force and thermal actions	339

Chapter 7. FORMULATION OF REINFORCED CONCRETE MODEL CONSIDERING DISCRETE ARRANGEMENT OF THE REINFORCEMENT	354
7.1. Peculiarities of the approach	354
7.2. Local crushing of concrete cantilevers between ribs of a reinforcing bar	354
7.3. Zones of conical and radial contact cracks	354
7.4. Analytical model of conical cracks zone. First case of conical cracks formation	366
7.5. Second case of contact cracks development	377
7.6. Solution of the bond problem for centrally reinforced elements Literature	388

Научное издание

Карпенко Николай Иванович

ОБЩИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Редактор *Л.И. Круглова*

Технический редактор *М.С. Ашиткова*

Корректоры *Е.Б. Тотмина, Н.А. Шатерникова*

Оператор *С.А. Савченко*

Лицензия №020441 от 28.02.92

ИБ №5857

Оригинал-макет изготовлен в Стройиздате с использованием настольной издательской системы на основе ПЭВМ

Подписано в печать 25.04.96 Формат 60x88 /16 Бумага офсетная
Печать офсетная Усл.печ.л. 26,0
Уч.-изд.л. 26,87 Дог. А—УШ—3966 Тираж 2000 экз. Зак 1408.

Стройиздат. 101442 Москва,
Долгоруковская, 23а

Отпечатано в АООТ "Политех-4"
129110, Москва, ул. Б. Переславская, 46.

Издательство "СТРОЙИЗДАТ"
представляет книги:

АРЕНДА В ПРОМЫШЛЕННОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ: СУЩНОСТЬ, ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ
/ Л.Ю. Карновский, А.Н. Люсов, А.С. Хон.

На основе опыта работы инициаторов аренды в промышленности стройматериалов рассмотрены главные проблемы, определены перспективы и основные направления развития арендных предприятий. Проведен анализ технико-экономических показателей, рассмотрена практика решения возникающих вопросов на предприятиях Московской области, производящих строительные материалы. Выявлены особенности и условия благоприятной приватизации арендных предприятий.

Книга предназначена инженерно-техническим работникам и экономистам промышленных предприятий, научным работникам, студентам и аспирантам.

Каландадзе В.Ш. РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ. - 2-е изд., перераб. и доп.

Описаны результаты теоретических и экспериментальных исследований вибрированных и центрифугированных железобетонных конструкций для энергетических сооружений, изготовленных из обычного (тяжелого), пористого и золошлакового заполнителей. Их внедрение дает значительное уменьшение затрат металла и бетона, решает проблему золоудаления, снижает транспортные и монтажные расходы. Первое издание вышло в 1988 году. Второе издание дополнено и переработано с учетом последних достижений в области технологии бетона.

Книга адресована научным и инженерно-техническим работникам исследовательских, проектных и строительных организаций, занимающихся энергетическим и промышленным строительством.

Назин В.В. НОВЕЙШИЕ СЕЙСМОСТОЙКИЕ КОНСТРУКЦИИ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ.

На примере Севастополя, Ялты, Алушты и других городов изложена история развития сейсмостойкого строительства. Приведена методика увеличения прочности зданий. Предложена новая конструкция - ферма-балка. Проанализированы наиболее эффективные сейсмостойкие конструкции и железобетонные механизмы сейсмоизоляции. Рассмотрены гравитационные, а также гравитационно-упругие системы сейсмоизоляции.

Издание адресовано инженерно-техническим работникам проектных и строительных организаций.